Інститут прикладної математики і механіки НАН України
Національна академія наук України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Євгеньєва Євгенія Олександрівна

УДК 517.956.4

ДИСЕРТАЦІЯ

ГРАНИЧНІ РЕЖИМИ ІЗ СИНГУЛЯРНИМ ЗАГОСТРЕННЯМ У КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯННЯХ

Спеціальність 01.01.02 – "Диференціальні рівняння"
(фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_________________ Євгеньєва Є.О.

Науковий керівник: **Шишков Андрій Євгенович**,
доктор фізико-математичних наук, професор.

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Євгеньєва Є.О. Граничні режими із сингулярним загостренням у квазілінійних параболічних рівняннях. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2019.

У **вступі** обґрунтовано актуальність досліджуваної задачі, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури, описано історію проблематики та наведено ключові результати, отримані в області дослідження за останній час.

Початок активного розвитку теорії сингулярних граничних режимів припадає на 1960-ті роки і пов'язаний із дослідженням процесу контрольованого термоядерного синтезу. При побудові математичної моделі цього процесу виникали сингулярні граничні умови. Вперше таку задачу вивчили О.А. Самарський та І.М. Соболь у 1963 році. Вони показали, що за певних умов на характер загострення температури на межі області виникає ефект просторової локалізації, тобто, нескінчена температура не розповсюджується на всю область за скінчений проміжок часу, а локалізується біля її межі.

У 1970-х роках дуже активно вивчалася модель розповсюдження тепла у повністю іонізованій плазмі та ефект просторової локалізації. А вже з 1980-

х років задачі з сингулярними умовами на межі почали позиціонуватись як окремий напрямок досліджень якісних властивостей рівнянь з частинними похідними. Серед відомих вчених, що займалися цією проблемою слід виділити В.О. Галактіонова, М.В. Змітренко, С.П. Курдюмова, О.П. Михайлова, О.А. Самарського, А.С. Калашнікова, B.H. Gilding, M.A. Herrero, C. Cortazar, M. Elgueta. Основні дослідження були пов'язані зі знаходженням необхідних та достатніх умов локалізації граничного режиму для параболічних рівнянь з різними класами коефіцієнтів теплопровідності.

Також активно розвивається та модифікується бар'єрна техніка, вивчаються класи автомодельних розв'язків, розробляється метод з використанням наближених автомодельних розв'язків.

У 1999 році А.Є. Шишковим та А.Г. Щелковим був запропонований новий метод дослідження сингулярних граничних режимів. Метод енергетичних оцінок використовує принципово інший підхід, відмінний від бар'єрних технік. Пізніше у серії робіт В.О. Галактіонова та А.Є. Шишкова (2003–2006 роки) він був розвинутий для широкого класу двічі нелінійних параболічних рівнянь другого порядку та для рівнянь високих порядків.

Однак, у вищезгаданих роботах метод енергетичних оцінок дозволяв знайти лише умови локалізації граничного режиму і не давав містких результатів про поведінку розв'язку біля зони сингулярності. Тому основною метою роботи стала модифікація методу для дослідження поведінки розв'язків широкого класу рівнянь. Такі дослідження розширюють вже відомі класичні результати та показують ефективність нового методу дослідження локалізованих граничних режимів із сингулярним загостренням.

Другий розділ присвячений вивченню такої задачі:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p u = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega,$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad u_0 \in L_{q+1}(\Omega),$$

де $1 \leqslant T < \infty$, $\Delta_p u = \sum_{i=1}^{n} \left(|\nabla_x u|^{p-1} u_{x_i}\right)_{x_i}$, Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$) з гладкою межею $\partial\Omega \in C^2$. Параметри нелінійності p та q задовольняють умовам: $p \geqslant q > 0$. У роботі розгялдається клас слабких розв'язків задачі.

Визначення. Функція $u \in C_{loc}([0,T); L^{q+1}(\Omega))$ називається **слабким розв'язком** описаної задачі, якщо

i) $u(t,\cdot) \in L^{p+1}_{loc}([0,T); W^{1,p+1}(\Omega))$;

ii) $(|u(t,\cdot)|^{q-1}u(t,\cdot))_t \in L^{\frac{p+1}{p}}_{loc}([0,T); (\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))^*)$;

iii) для довільної функції $\eta \in L^{p+1}((0,\tau); \overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))$ з довільним $\tau < T$ виконується інтегральна тотожність:

$$\int_0^\tau \langle (|u|^{q-1}u)_t, \eta \rangle dt + \int_0^\tau \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,u,\nabla u)\eta_{x_i} dxdt = 0$$

iv) виконується початкова умова.

Будемо розглядати множину $U_{u_0,F}$ як клас усіх слабких розв'язків u задачі, які задовольняють енергетичній умові:

$$h(\tau) + E(t) = h_u(\tau) + E_u(t) := \sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |u(\tau,x)|^{q+1} dx +$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dxd\tau \leqslant F(t) \quad \forall\, t \in (0,T),$$

де $F(t) > 0$ — довільна монотонно неспадна на інтервалі $[0,T)$ функція, така, що $F(t) \to \infty$ при $t \to T$. Ця умова визначає поведінку функцій на межі області, а саме, у клас $U_{u_0,F}$ входять розв'язки які на межі мають сингулярне загострення при $t \to T$.

У **підрозділах 2.1 та 2.2** описана постановка задачі, представлено означення слабкого розв'язку та наведені важливі допоміжні результати. Зокрема, визначені важливі для дослідження параметризовані енергетичні функції, які пов'язані з розв'язком u та визначають його поведінку в залежності від відстані до межі області:

$$E(t,s) := \int_{\frac{T}{2}}^{t} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau,$$

$$h(t,s) := \sup_{0\leqslant\tau<t} \int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{q+1} dx \qquad \forall\, s \in (0, s_\Omega),\, \forall\, t \in (0,T).$$

де сімейство областей $\Omega(s) := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > s\}, \quad s > 0.$

У **підрозділі 2.3** досліджуються розв'язки задачі з класу $U_{u_0,F}$ за умови $p = q$ та за експоненціальної поведінки розв'язку на межі. Основним результатом цього підрозділу є теорема 2.5.

Теорема 2.5. Нехай u — довільний слабкий розв'язок із класу $U_{u_0,F}$ з функцією F, визначеною таким чином:

$$F(t) = F_\mu(t) := \exp\left(\omega_0 (T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall t < T,$$

де $\omega_0 > 0$, $\mu > 0$ — деякі сталі. Тоді існують такі сталі $c_1, c_2, c_3 < \infty$, що виконується рівномірна по $t < T$ оцінка:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant c_1 \exp\left(c_2 \omega_0^{\frac{p+\mu}{\mu}} s^{-\frac{p+1}{\mu}}\right) \;\; \forall\, s : 0 < s < s_0' := c_3 \min\left(1, \omega_0^{\frac{p+\mu}{p+1}}\right).$$

У **підрозділі 2.4** також досліджуються розв'язки задачі з класу $U_{u_0,F}$ за умови $p = q$, але поведінка розв'язку на межі визначається пологим степеневим режимом. Основним результатом цього підрозділу є теорема 2.6.

Теорема 2.6. Нехай u — довільний енергетичний розв'язок з класу $U_{u_0,F}$ з функцією F:

$$F(t) = F_\alpha(t) := \omega_0 (T-t)^{-\alpha} \quad \forall\, t < T,$$

де $\omega_0 > 0$, $\alpha > \frac{1}{p+1}$ — деякі сталі. Тоді існує стала $G < \infty$ і таке значення $\hat{s} > 0$, що виконується рівномірна оцінка:

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant G \omega_0 s^{-\alpha(p+1)} \quad \forall\, t < T,\, \forall\, s \in (0, \hat{s}).$$

У **підрозділі 2.5** розглядаються розв'язки задачі із класу $U_{u_0,F}$ у випадку, коли $p > q$, а поведінка на межі описується степеневою функцією. Основним результатом цього підрозділу є теорема 2.7.

Теорема 2.7. Нехай u — довільний енергетичний розв'язок з множини $U_{u_0,F}$, де F визначається співвідношенням:

$$F(t) = F_\beta := \omega_0(T-t)^{-\left(\frac{q+1}{p-q}-\beta\right)} \quad \forall\, t < T, \quad \omega_0 > 0,\, 0 < \beta < \beta_0 = \frac{q+1}{p-q} - \frac{1}{p}.$$

Тоді існує така стала $G > 0$ і значення $\hat{s} > 0$, що справедлива рівномірна за $t \leqslant T$ оцінка:

$$E_u(t,s) + h_u(\tau,s) \leqslant G\omega_0^{\frac{q+1}{\beta(p-q)}} s^{-\nu} \qquad \forall\, t \leqslant T, \forall\, s \in (0,\hat{s}),$$

де $\nu = \frac{(n(p-q)+(q+1)(p+1))(q+1-\beta(p-q))}{\beta(p-q)^2}$.

У **третьому розділі** вивчаються квазілінійні рівняння з потенціалом абсорбції, а саме:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p\, u = -b(t,x)|u|^{\lambda-1}u, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \quad \lambda > p \geqslant q > 0.$$

Визначення. Функція $u(t,x) \in C_{loc}((0,T); L^{q+1}_{loc}(\Omega))$ називається **слабким розв'язком** представленого рівняння, якщо:

i) $u(t,x) \in L^{p+1}_{loc}\left((0,T); W^{1,p+1}_{loc}(\Omega)\right) \cap L^{\lambda+1}_{loc}\left((0,T)\times\Omega\right)$;

ii) $(|u|^{q-1}u)_t \in L^{\frac{p+1}{p}}_{loc}\left((0,T); (W^{1,p+1}_c(\Omega))^*\right) + L^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}_{loc}\left((0,T); (L^{\lambda+1}_c(\Omega))^*\right)$;

iii) виконується інтегральна тотожність:

$$\int_a^b \langle (|u|^{q-1}u)_t, \eta\rangle dt + \int_a^b \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla u)\eta_{x_i} + b(t,x)|u|^{\lambda-1}u\eta\right] dxdt = 0$$

для довільних $0 < a < b < T$ та довільної функції
$\eta \in L^{p+1}_{loc}\left((0,T); W^{1,p+1}_c(\Omega)\right) \cap L^{\lambda+1}_{loc}\left((0,T); L^{\lambda+1}_c(\Omega)\right)$,

де $W^{1,p+1}_c(\Omega)$, $L^{\lambda+1}_c(\Omega)$ є підпросторами $W^{1,p+1}(\Omega)$, $L^{\lambda+1}(\Omega)$ функцій з компактним носієм в Ω.

У **підрозділі 3.1** представлено огляд літератури, пов'язаної з дослідженням таких рівнянь. Найбільший інтерес тут представляють великі розв'язки.

Великим розв'язком вищеописаного рівняння називається слабкий розв'язок з нескінченими початковими та крайовими умовами. Питання існування та поведінки великих розв'язків є дуже актуальним напрямом досліджень та вивчається багатьма відомими вченими зі всього світу, а саме L. Veron, W. Al Sayed, M. Marcus, A.Є. Шишков, C. Bandle, G. Diaz, J.I. Diaz, Y. Du, R. Peng, P. Polaĉik та інші.

У **підрозділі 3.2** дано чітке формулювання задачі, представлено визначення слабкого розв'язку. Також описано потенціал абсорбції та умови на нього.

Функція b називається потенціалом абсорбції, вона є неперервною в області $[0,T] \times \overline{\Omega}$ та задовольняє умовам виродження:

$$b(t,x) > 0 \quad \text{в } [0,T) \times \overline{\Omega}, \quad b(t,x) = 0 \quad \text{на } \{T\} \times \Omega.$$

Характер виродження потенціалу абсорбції описується співвідношеннями:

$$a_1(t)g_1(d(x)) \leq b(t,x) \leq a_2(t)g_2(d(x)) \qquad \forall\,(t,x) \in [0,T) \times \Omega,$$

де $g_1(s) \leq g_2(s)$ — довільні неспадні додатні функції, визначені для всіх $s > 0$.

Застосовуючи результати, отримані в розділі 2, за допомогою методу енергетичних оцінок, отримано оцінки слабких розв'язків вказаного рівняння. Суттєву роль при цьому відіграє поведінка міноранти a_1. Важливо відзначити, що усі результати у цьому розділі отримані для довільних слабких розв'язків відповідної задачі, у тому числі і для великих.

У **підрозділі 3.3** досліджуються слабкі розв'язки рівняння за умови $p = q$. Основним результатом цього підрозділу є теорема 3.8.

Теорема 3.8. Нехай u — довільний слабкий розв'язок розглянутого рівняння і нехай потенціал абсорбції b задовольняє умовам виродження, описаним вище. Покладемо, що характер виродження потенціалу абсорбції описується умовою на функцію a_1:

$$a_1(t) \geq \kappa^{-1} \exp\left(-\omega_0 (T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall\, t < T,\ \kappa > 0,\ \omega_0 > 0,\ \mu > 0,$$

Тоді для всіх $\frac{T}{2} < t < T$ справедлива енергетична оцінка:

$$h(t,s)+E(t,s) \leqslant K_1 \min_{0<\bar{s}<s} \left\{ \exp\left(K_2 \omega_0^{\frac{p+\mu}{\mu}} (s-\bar{s})^{-\frac{p+1}{\mu}} \right) \cdot G_1(\bar{s}) \right\} \quad \forall\, s \in (0, s_0'),$$

$$G_1(s) = \left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh \right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}}$$

де сталі $K_1 < \infty$, $K_2 < \infty$ залежать тільки від відомих параметрів задачі, значення $s_0' > 0$ залежить від κ.

У **підрозділі 3.4** отримано оцінку поведінки розв'язків, коли характер виродження потенціалу абсорбції є степеневим. Така оцінка для лінійного рівняння ($p = q = 1$) була отримана Y. Du, R. Peng, P. Polaĉik. Тож, результати цього підрозділу є розширенням на нелінійний випадок та представлені у теоремі 3.9.

Теорема 3.9. Нехай u — довільний слабкий розв'язок рівняння і нехай b задовольняє умовам виродження, а мінорантa a_1 задовольняє умові:

$$a_1(t) \geqslant \kappa^{-1}(T-t)^{\mu} \quad \forall\, t < T,\ \kappa = const > 0,\ \mu > \frac{(p+2)(\lambda-p)}{(p+1)^2}.$$

Тоді для всіх $\frac{T}{2} < t < T$ має місце оцінка:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant K\, \kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}} \min_{0<\bar{s}<s} \left\{ (s-\bar{s})^{-\theta} G_1(\bar{s}) \right\} \qquad \forall\, s \in (0, \tilde{s}),$$

де $\theta = \frac{(p+1)(\mu(p+1)-(\lambda-p))}{\lambda-p}$, стала $K < \infty$ залежить тільки від відомих параметрів задачі, $\tilde{s} > 0$.

У **підрозділі 3.5** досліджуються слабкі розв'язки рівняння за умови $p > q$. Результати цього розділу представлені теоремі 3.10.

Теорема 3.10. Нехай u — довільний слабкий розв'язок рівняння і нехай потенціал абсорбції b задовольняє умовам виродження, а функція a_1 задовольняє умові:

$$a_1(t) \geqslant \kappa^{-1}(T-t)^{\mu} \qquad \forall\, t < T, \quad \kappa = const > 0, \quad \frac{\lambda - p}{p} < \mu < \frac{\lambda - p}{p-q}.$$

Тоді для всіх $\frac{T}{2} < t < T$ виконується оцінка:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant K\, \kappa^{\frac{q+1}{\lambda - p - \mu(p-q)}} \min_{0<\bar{s}<s} \left\{ (s-\bar{s})^{-\theta} G_1(\bar{s}) \right\} \qquad \forall\, s \in (0, \tilde{s}),$$

де $\theta = \frac{(n(p-q)+(q+1)(p+1))(\mu(p+1)-(\lambda-p))}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}$, стала $K < \infty$ та значення $\tilde{s} > 0$ залежать тільки від відомих параметрів задачі.

Слід відмітити, що в кінці кожного підрозділу третього розділу наведено приклади часткових випадків, які допомагають краще зрозуміти структуру отриманих оцінок загального вигляду.

Ключові слова: квазілінійне параболічне рівняння, слабкий розв'язок, граничний режим із сингулярним загостренням, енергетична функція, вироджений потенціал абсорбції, великий розв'язок.

ABSTRACT

Yevgeniia A. Yevgenieva. Boundary regimes with singular peaking for quasilinear parabolic equations. — Qualification scientific paper, manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.02 Differential equations. —- Institute of Applied Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, V.N. Karazin Kharkiv National University, the Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The **introduction** substantiates the relevance of the problem under study, and provides a link between thesis and scientific programs, plans, themes. The purpose, tasks and methods of research are formulated there. The scientific novelty and value of the obtained results are determined. The information about the publication, personal contribution of the applicant and testing the results of the thesis are provided.

The **first section** is devoted to the review and analysis of literature, describes the history of the problem and presents the key results obtained in the field of recent research.

The beginning of the active development of the theory of singular boundary modes dates back to the 1960s and is associated with the study of the process of controlled thermonuclear fusion. Singular boundary conditions arose when constructing the mathematical model of this process. This problem was first studied by A.A. Samarskii and I.M. Sobol in 1963. They showed that under certain conditions on the character of temperature peaking on the boundary of the domain, there is the effect of spatial localization, namely, infinite temperature does not extend to the whole domain for a finite period of time, but localizes near its boundary.

In the 1970s, the model of heat propagation in fully ionized plasma and the

effect of spatial localization were studied very actively. And since the 1980s, singular boundary condition problems have begun to be positioned as a separate direction for the study of qualitative properties of partial differential equations. Among the well-known scientists who dealt with this problem should be distinguished V.A. Galaktionov, N.V. Zmitrenko, S.P. Kurdyumov, A.P. Mikhailov, A.A. Samarskii, A.S. Kalashnikov, B.H. Gilding, M.A. Herrero, C. Cortazar, M. Elgueta. The main studies were related to finding the necessary and sufficient conditions for localization of the boundary regime for parabolic equations with different classes of thermal conductivity coefficients.

Barrier technique was also being actively developed and modified, the classes of self-similar solutions are being studied, and a method using approximate self-similar solutions is being developed.

In 1999, A.E. Shishkov and A.G. Shchelkov proposed a new method for the study of singular boundary regimes. The method of energy estimates uses a fundamentally different approach other than barrier techniques. Later, in a series of works by V.A. Galaktionov and A.E. Shishkov (2003–2006), it was developed for a wide class of doubly nonlinear second-order parabolic equations and for high-order equations.

However, in the works mentioned above, the method of energy estimates was able to find only the conditions of localization of the boundary regimes and did not give essential results about the behavior of a solution near the blow-up zone. Therefore, the main purpose of the work was to modify the method for investigating the behavior of solutions of a wide class of equations. Such studies extend the already known classical results and demonstrate the efficiency of a new method of investigating localized boundary regimes with singular peaking.

The **second section** is devoted to the study of the following problem:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p u = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega,$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad u_0 \in L_{q+1}(\Omega),$$

where $1 \leqslant T < \infty$, $\Delta_p u = \sum_{i=1}^{n} \left(|\nabla_x u|^{p-1} u_{x_i}\right)_{x_i}$, Ω — is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ with a smooth boundary $\partial\Omega \in C^2$. The parameters of nonlinearity p and q are satisfied the condition: $p \geqslant q > 0$. In the work the class of weak solutions are considered.

Definition. Function $u \in C_{loc}([0,T); L^{q+1}(\Omega))$ is called **a weak solution** of the described problem if

i) $u(t,\cdot) \in L^{p+1}_{loc}([0,T); W^{1,p+1}(\Omega))$;

ii) $(|u(t,\cdot)|^{q-1} u(t,\cdot))_t \in L^{\frac{p+1}{p}}_{loc}([0,T); (\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))^*)$;

iii) for an arbitrary function $\eta \in L^{p+1}((0,\tau); \overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))$ with an arbitrary $\tau < T$ the following integral identity holds:

$$\int_0^\tau \langle (|u|^{q-1}u)_t, \eta \rangle dt + \int_0^\tau \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,u,\nabla u) \eta_{x_i} dx dt = 0$$

iv) the initial condition holds.

We will consider the set $U_{u_0,F}$ as a class of all weak solutions u of the problem, which are satisfied the energy condition:

$$h(\tau) + E(t) = h_u(\tau) + E_u(t) := \sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |u(\tau,x)|^{q+1} dx +$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau \leqslant F(t) \quad \forall t \in (0,T),$$

where $F(t) > 0$ is an arbitrary monotonically nondecreasing function on the interval $[0,T)$ such that $F(t) \to \infty$ as $t \to T$. This condition defines the behavior of the function on the bundary, namely, class $U_{u_0,F}$ contains the solutions which have the singular peaking on the boundary as $t \to T$.

In the **subsections 2.1 and 2.2** the statement of the problem is described, the definition of a weak solution is presented and an important auxiliary results are given. In particular, the parameterized energy functions that are related to the solution u and determine its behavior depending on the distance to the domain boundary are identified:

$$E(t,s) := \int_{\frac{T}{2}}^{t} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau,$$
$$h(t,s) := \sup_{0\leqslant\tau<t} \int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{q+1} dx \qquad \forall\, s \in (0, s_\Omega),\, \forall\, t \in (0,T).$$

where the family of subdomains $\Omega(s) := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > s\}, \quad s > 0.$

In the **subsection 2.3** solutions of the problem from the class $U_{u_0,F}$ are investigated under the condition $p = q$ and the exponential behavior of the solution on the boundary. The main result of this subsection is theorem 2.5.

Theorem 2.5. Let u be an arbitrary weak solution from the class $U_{u_0,F}$ with function F, which is defined by the following way:

$$F = F_\mu(t) := \exp\left(\omega_0 (T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall t < T,$$

where $\omega_0 > 0$, $\mu > 0$ are some constants. Then there exist constants $c_1, c_2, c_3 < \infty$ such that the following uniform with respect to $t < T$ estimate holds:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant c_1 \exp\left(c_2 \omega_0^{\frac{p+\mu}{\mu}} s^{-\frac{p+1}{\mu}}\right) \;\; \forall\, s : 0 < s < s_0' := c_3 \min\left(1, \omega_0^{\frac{p+\mu}{p+1}}\right).$$

In the **subsection 2.4** solutions of the problem from the class $U_{u_0,F}$ are investigated under the condition $p = q$ as well, but the behavior of the solution on the boundary is defined by a flat power regime. The main result of this subsection is theorem 2.6.

Theorem 2.6. Let u be an arbitrary weak solution from the class $U_{u_0,F}$ with function F of the form:

$$F(t) = F_\alpha(t) := \omega_0 (T-t)^{-\alpha} \quad \forall\, t < T,$$

where $\omega_0 > 0$, $\alpha > \frac{1}{p+1}$ are some constants. Then there exist constant $G < \infty$ and the value $\hat{s} > 0$ such that the uniform estimate holds:

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant G \omega_0 s^{-\alpha(p+1)} \quad \forall\, t < T,\, \forall\, s \in (0, \hat{s}).$$

In the **subsection 2.5** solutions of the problem from the class $U_{u_0,F}$ are investigated under the condition $p>q$ and the behavior of the solution on the boundary is defined by a power function. The main result of this subsection is theorem 2.7.

Theorem 2.7. Let u be an arbitrary weak solution from the class $U_{u_0,F}$ with function F is defined by the following relation:

$$F(t)=F_\beta:=\omega_0(T-t)^{-\left(\frac{q+1}{p-q}-\beta\right)}\quad\forall\, t<T,\quad \omega_0>0,\ 0<\beta<\beta_0=\frac{q+1}{p-q}-\frac{1}{p}.$$

Then there exist constant $G>0$ and value $\hat{s}>0$ such that the uniform with respect to $t<T$ estimate holds:

$$E_u(t,s)+h_u(\tau,s)\leqslant G\omega_0^{\frac{q+1}{\beta(p-q)}}s^{-\nu}\qquad \forall\, t\leqslant T,\ \forall\, s\in(0,\hat{s}),$$

where $\nu=\frac{(n(p-q)+(q+1)(p+1))(q+1-\beta(p-q))}{\beta(p-q)^2}$.

In the **third section** a quasilinear equation with absorption potential is studied, namely:

$$(|u|^{q-1}u)_t-\Delta_p\, u=-b(t,x)|u|^{\lambda-1}u,\quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega,\quad \lambda>p\geqslant q>0.$$

Definition. Function $u(t,x)\in C_{loc}((0,T);L^{q+1}_{loc}(\Omega))$ is called **a weak solution** of the presented equation if:

i) $u(t,x)\in L^{p+1}_{loc}\Big((0,T);W^{1,p+1}_{loc}(\Omega)\Big)\cap L^{\lambda+1}_{loc}\left((0,T)\times\Omega\right);$

ii) $(|u|^{q-1}u)_t\in L^{\frac{p+1}{p}}_{loc}\left((0,T);(W^{1,p+1}_c(\Omega))^*\right)+L^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}_{loc}\left((0,T);(L^{\lambda+1}_c(\Omega))^*\right);$

iii) the integral identity holds:

$$\int_a^b\langle(|u|^{q-1}u)_t,\eta\rangle dt+\int_a^b\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla u)\eta_{x_i}+b(t,x)|u|^{\lambda-1}u\eta\right]dxdt=0$$

for arbitrary $0<a<b<T$ and for an arbitrary function $\eta\in L^{p+1}_{loc}\left((0,T);W^{1,p+1}_c(\Omega)\right)\cap L^{\lambda+1}_{loc}\left((0,T);L^{\lambda+1}_c(\Omega)\right)$,

where $W^{1,p+1}_c(\Omega)$, $L^{\lambda+1}_c(\Omega)$ are a subspaces of $W^{1,p+1}(\Omega)$, $L^{\lambda+1}(\Omega)$ of functions with a compact support in Ω.

In the **subsection 3.1** the survey of the papers that connected with the investigation of such equations is presented. Large solutions are the most interesting ones there. A weak solution of the mentioned equation is called a *large solution* if it satisfies infinity initial and boundary values. Existence and properties of large solutions are very actual research field and are studied by many famous authors from all over the world, namely, L. Veron, W. Al Sayed, M. Marcus, А.Є. Шишков, C. Bandle, G. Diaz, J.I. Diaz, Y. Du, R. Peng, P. Polaĉik and others.

In the **subsection 3.2** the clear statement of the problem is given, the definition of the weak solution is presented. The absorption potential and the conditions on it are described there as well.

The function b is called an absorption potential, it is a continuous function in the domain $[0,T] \times \overline{\Omega}$ and satisfies the following degenerate conditions:

$$b(t,x) > 0 \quad \text{in } [0,T) \times \overline{\Omega}, \quad b(t,x) = 0 \quad \text{on } \{T\} \times \Omega.$$

The character of degeneration of the absorption potential is defined by the following relation:

$$a_1(t)g_1(d(x)) \leq b(t,x) \leq a_2(t)g_2(d(x)) \qquad \forall\,(t,x) \in [0,T) \times \Omega,$$

where $g_1(s) \leq g_2(s)$ are arbitrary nondecreasing positive functions, which are defined for all $s > 0$.

Applying the results obtained in section 2 and using the method of energy estimates, we can obtain estimates of weak solutions of the mentioned equation. An essential role is played by the behavior of the minorant a_1. It is important to note that all results in this section are obtained for all weak solutions of the corresponding problem, including large solutions.

In the **subsection 3.3** weak solutions of the equation are investigated under the condition $p = q$. The main result of this subsection is theorem 3.8.

Theorem 3.8. Let u be an arbitrary weak solution of the equation under consideration and let the absorption potential b satisfies the conditions of degeneration from above. Let also that the character of degeneration of the absorption potential is defined by the following condition on the function a_1:

$$a_1(t) \geq \kappa^{-1} \exp\left(-\omega_0 (T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall\, t < T,\ \kappa > 0,\ \omega_0 > 0,\ \mu > 0,$$

Then for all $\frac{T}{2} < t < T$ the following energy estimate holds:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant K_1 \min_{0<\bar{s}<s} \left\{ \exp\left(K_2 \omega_0^{\frac{p+\mu}{\mu}} (s-\bar{s})^{-\frac{p+1}{\mu}}\right) \cdot G_1(\bar{s}) \right\} \quad \forall\, s \in (0, s_0'),$$

$$G_1(s) = \left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh \right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}}$$

where the constants $K_1 < \infty$, $K_2 < \infty$ depend on the known parameters only, the value $s_0' > 0$ depends on κ.

In the **subsection 3.4** estimate of the behavior of weak solutions is obtained when the character of degeneration of absorption potential is a power function. Such estimate for the linear equation ($p = q = 1$) was obtained by Y. Du, R. Peng, P. Polaĉik. So, the main result of this subsection is an expansion on nonlinear case and represents in theorem 3.9.

Theorem 3.9. Let u be an arbitrary weak solution of the equation and let b satisfies the conditions of degeneration and the minorant a_1 satisfies the condition:

$$a_1(t) \geqslant \kappa^{-1}(T-t)^{\mu} \quad \forall\, t < T,\ \kappa = const > 0,\ \mu > \frac{(p+2)(\lambda-p)}{(p+1)^2}.$$

Then for all $\frac{T}{2} < t < T$ the following estimate holds:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant K\, \kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}} \min_{0<\bar{s}<s} \left\{ (s-\bar{s})^{-\theta} G_1(\bar{s}) \right\} \qquad \forall\, s \in (0, \tilde{s}),$$

where $\theta = \frac{(p+1)(\mu(p+1)-(\lambda-p))}{\lambda-p}$, the constant $K < \infty$ depends on the known parameters only, $\tilde{s} > 0$.

In the **subsection 3.5** weak solutions of the equation are investigated under the condition $p > q$. The main result of this subsection is theorem 3.10.

Theorem 3.10. Let u be an arbitrary weak solution of the equation and let the absorption potential b satisfies the conditions of degeneration, and let function $a_1(t)$ satisfies the condition:

$$a_1(t) \geqslant \kappa^{-1}(T-t)^{\mu} \qquad \forall\, t < T, \quad \kappa = const > 0, \quad \frac{\lambda - p}{p} < \mu < \frac{\lambda - p}{p-q}.$$

Then for all $\frac{T}{2} < t < T$ the following estimate holds:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant K\,\kappa^{\frac{q+1}{\lambda - p - \mu(p-q)}} \min_{0<\bar{s}<s} \left\{ (s-\bar{s})^{-\theta} G_1(\bar{s}) \right\} \qquad \forall\, s \in (0, \tilde{s}),$$

where $\theta = \frac{(n(p-q)+(q+1)(p+1))(\mu(p+1)-(\lambda-p))}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}$, the constant $K < \infty$ and the value $\tilde{s} > 0$ depend on the known parameters only.

It should be noted that in the end of each subsection of the third section there are examples of partial cases which can help to understand the structure of obtained general estimates better.

Keywords: quasilinear parabolic equation, weak solution, boundary regime with singular peaking, energy function, degenerate absorption potential, large solution.

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Євгеньєва Є.О. Квазілінійні параболічні рівняння з виродженим потенціалом абсорбції. *Український математичний вісник.* 2018. Т. 15, № 4. С. 576–591.

2. Yevgenieva Ye.A. Propagation of singularities for large solutions of quasilinear parabolic equations. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.* 2019. Vol. 15, № 1. P. 131–144.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar, Impact Factor: 0.531)

3. Євгеньєва Є.О., Шишков А.Є. Метод енергетичних оцінок для дослідження поведінки слабких розв'язків рівняння повільної дифузії із сингулярними граничними даними. *Український математичний вісник.* 2019. Т. 16, № 2. С. 277–288.

   Особистий внесок здобувача. Автору належать Теорема 1.1, Наслідок 2.1.

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

4. Yevgenieva Ye.A. Limiting profile of solutions of quasilinear parabolic equations with flat peaking. *Journal of Mathematical Sciences.* 2018. Vol. 234, № 1. P. 106–116.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar)

5. Shishkov A.E., Yevgenieva Ye.A. Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations. *Mathematische Nachrichten.* 2019. Vol. 292, № 6. P. 1349–1374.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar, Science Citation Index Expanded, Impact Factor: 0.847)

   Особистий внесок здобувача. Автору належать Theorem 1.2, Theorem 1.3, Corollary 1.4, Lemma 2.3, Lemma 5.2, Example 5.3, Example 5.4.

Наукові праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Yevgenieva Ye. Boundary regimes with singular peaking for quasilinear parabolic equations. *International Conference on Differential Equations* : materials of the International Conference Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20–24, 2016, Lviv, 2016. P. 120.

7. Yevgenieva Ye. Boundary regimes with singular peaking for quasilinear parabolic equations. *5th International conference for young scientists on Differential equations and Applications, dedicated to Yaroslav Lopatynsky* : materials of the 5th International conference for young scientists, dedicated to Yaroslav Lopatynsky, November 9–11, 2016, Kyiv, 2016. P. 151–152.

8. Evgenieva E. Boundary LS-Regimes for Quasilinear Parabolic Equations. *Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPHA)* : матеріали Міжнародної наукової конференції, 17–19 жовтня 2017 р., Черкаси, 2017. С. 60–61.

9. Yevgenieva Ye. Weak solutions of quasilinear parabolic equations with blow-up boundary regime. *Міжнародна літня математична школа пам'яті В.А. Плотнікова* : матеріали конференції, 11–16 червня 2018 р., м. Одеса. 2018. С. 36.

10. Yevgenieva Ye. Large solutions of quasilinear parabolic equations with absorption potential. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях* : матеріали Міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17—19 вересня 2018 р.,Чернівці, 2018. С. 41.

11. Yevgenieva Ye. Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations. *Нелінійні проблеми аналізу* : тези доповідей VI Всеукраїнської математичної конференції імені Б.В. Василишина, 26–28 вересня 2018 р., Івано-Франківськ – Микуличин, 2018. С. 89.

12. Yevgenieva Ye. Large solutions of quasilinear parabolic equations of diffusion - nonlinear degenerate absorption type. *Contemporary Analysis and Nonlinear Boundary Problems* : materials of the workshop dedicated to the 80th anniversary of B.V. Bazaliy and to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, October 17–18, 2018, Sloviansk, 2018. P. 14.

13. Yevgenieva Ye.A. Limiting profile of solutions for quasilinear parabolic equations with singular boundary data. *International Conference of Young Mathematicians* : Book of Abstracts, June 6—8, 2019, Kyiv, 2019. P. 45.

14. Yevgenieva Ye.A. Propagation of singularities for solutions of quasilinear parabolic equations with absorption term. *Geometry, Differential Equations and Analysis* : Book of Abstracts of International Conference dedicated to the 100th anniversary of A.V. Pogorelov, June 17–21, 2019, Kharkiv, 2019. P. 57–58.

15. Yevgenieva Ye.A. Boundary values with singular peaking for quasilinear heat equations. *6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Di-*

fferential Equations and Applications : Book of Abstracts, June 18–20, 2019, Vinnytsia, 2019. P. 80–81.

16. Євгеньєва Є.О. Великі розв'язки квазілінійних параболічних рівнянь. *Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV* : матеріали Міжнародної конференції, присвяченої 100-річчю з дня народження В.К. Дзядика, 20–26 червня 2019 р., с. Світязь, Волинь, 2019. С. 76.

ЗМІСТ

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження.

У 1960-х роках почався бурхливий розвиток теорії сингулярних граничних режимів разом із розвитком теорії сильно нестаціонарних та нелінійних проблем контрольованого термоядерного синтезу. Перша математична модель цього процесу була представлена та вивчена у роботі [42] у 1963 році. Умови на межі області задачі були сингулярними, тобто розв'язок на межі мав прямувати до нескінченості при наближенні до деякого часу $T < \infty$. Було виявлено цікавий ефект просторової локалізації, коли нескінченість локалізується у фіксованій області біля межі і не поширюється глибоко всередину області задачі.

Усі дослідження минулого сторіччя були присвячені знаходженню умов на граничний режим, при яких має місце локалізація розв'язків лінійних та квазілінійних рівнянь другого порядку в одномірних та багатомірних областях, а також вивченню поведінки розв'язків таких задач. Найбільш вагомі результати були отримані В.О. Галактіоновим, М.В. Змітренко, С.П. Курдюмовим, О.П. Михайловим, О.А. Самарським, А.С. Калашніковим, B.H. Gilding, M.A. Herrero, C. Cortazar, M. Elgueta та багатьма іншими у роботах [5–8, 22–24, 27, 28, 39–42, 55, 65, 69]. Усі дослідження проводились бар'єрною технікою (методом порівняння). Цей підхід полягає у порівнянні розв'язків задачі з автомодельними розв'язками задачі з модельними граничними даними. Багато труднощів виникало, коли задача не мала автомодельних розв'язків і необхідно було знаходити інші шляхи дослідження, наприклад, метод пошуку наближених автомодельних розв'язків (див. [9–12]). У будь-якому випадку, цей метод є досить результативним, хоча і має багато обмежень та не є універсальним.

У 1999 році у роботі [45] А.Є. Шишковим та А.Г. Щелковим був запропонований новий метод дослідження сингулярних граничних режимів. Метод енергетичних оцінок використовує принципово інший підхід, що полягає у ефективній оцінці перетоків енергії у нескінченій послідовності часових шарів, які накопичуються біля часу загострення, і не використовує бар'єрних технік. Він є комбінацією декількох методів та підходів. А саме, використовує метод апріорних оцінок типу Сен-Венана та нелінійний варіант цього методу, а також метод локальних енергетичних оцінок.

Пізніше у серії робіт В.О. Галактіонова та А.Є. Шишкова [61–64] (2003–2006) метод енергетичних оцінок був розвинутий для широкого класу двічі нелінійних параболічних рівнянь другого порядку та розширений для дослідження рівнянь високих порядків. У монографії [68] (2016) зібрані усі основні принципи та результати, отримані методом енергетичних оцінок, а саме для широкого класу рівнянь отримано точні умови локалізації граничних режимів.

Дисертаційна робота присвячена розвиненню метода енергетичних оцінок для дослідження поведінки розв'язків біля області сингулярності. Основною метою було отримати точні оцінки розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь для різних класів граничних режимів, дослідити залежність поведінки розв'язку від характеру загострення на межі. При цьому, цікавим та дуже важливим наслідком отриманих оцінок стала можливість дослідження рівнянь з потенціалом абсорбції та великих розв'язків таких рівнянь, тобто таких, що приймають нескінчені значення на всій параболічній області задачі.

Великі розв'язки є дуже цікавим об'єктом дослідження та активно вивчаються в останні роки. Питання існування та поведінки великих розв'язків лінійних та напівлінійних рівнянь досліджується багатьма відомими вченими зі всього світу, а саме L. Veron, W. Al Sayed, M. Marcus, А.Є. Шишков, C. Bandle, G. Diaz, J.I. Diaz, Y. Du, R. Peng, P. Polaĉik та інші (див. [51, 58, 73, 74, 81] та посилання в них).

В дисертаційній роботі досліджуються двічі нелінійні рівняння з виродженим потенціалом абсорбції. Основною метою в цьому напрямку було дослідження поведінки великих розв'язків описаних рівнянь та отримання точних оцінок для них в залежності від характеру виродження потенціалу абсорбції. Такі результати є безумовно актуальними, оскільки вони розширюють існуючі результати на більш широкий клас рівнянь.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є отримання точних оцінок розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь для різних класів сингулярних граничних режимів, дослідження залежності поведінки розв'язку від характеру загострення на межі; дослідження поведінки великих розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь з виродженим потенціалом абсорбції, отримання точних оцінок для них в залежності від характеру виродження потенціалу абсорбції.

Об'єкт дослідження — квазілінійні параболічні рівняння з сингулярними граничними даними, квазілінійні параболічні рівняння з виродженим потенціалом абсорбції.

Предмет дослідження — слабкі розв'язки початково-крайової задачі квазілінійного параболічного рівняння з локалізованими сингулярними граничними даними, слабкі та великі розв'язки квазілінійного параболічного рівняння з виродженим потенціалом абсорбції.

Завдання дослідження:

- розвинути метод енергетичних оцінок для дослідження поведінки слабких розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь;
- знайти точну оцінку профілю слабких розв'язків початково-крайової задачі квазілінійного параболічного рівняння з локалізованими сингулярними граничними даними;

– дослідити залежність знайдених оцінок від характеру загострення граничного режиму;

– знайти точну оцінку профілю слабких розв'язків квазілінійного параболічного рівняння з виродженим потенціалом абсорбції з довільними граничними та початковими даними;

– дослідити залежність знайдених оцінок від характеру виродження потенціалу абсорбції;

– дослідити різні випадки співвідношень між параметрами нелінійностей двічі нелінійного параболічного рівняння;

– порівняти отримані оцінки з існуючими оцінками розв'язків лінійних та напівлінійних рівнянь.

Методи дослідження. Для отримання результатів дисертаційної роботи використовується метод енергетичних оцінок, описаний у роботах [45, 61–64, 68]. Він є комбінацією декількох підходів та технік. А саме, використовує метод апріорних оцінок типу Сен-Венана, які застосовуються при вивченні існування, єдиності та асимптотичних властивостей енергетичних слабких розв'язків лінійних еліптичних та параболічних рівнянь (див. [37, 38, 43, 67, 80]), а також нелінійний варіант цього методу (див. [1, 44]); метод локальних енергетичних оцінок (див. [2, 57]).

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі досліджено поведінку слабких розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь з локалізованими сингулярними граничними даними, а також поведінку слабких та великих розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь з виродженим потенціалом абсорбції. Зокрема, отримані такі результати.

– методом енергетичних оцінок знайдено точну оцінку профілю слабких розв'язків початково-крайової задачі квазілінійного параболічного рівняння з локалізованими сингулярними граничними даними в залежності від характеру загострення граничного режиму;

– на основі отриманих оцінок знайдено точну оцінку зверху профілю слабких розв'язків квазілінійного параболічного рівняння з виродженим потенціалом абсорбції з довільними граничними та початковими даними;

– усі оцінки отримано для різних випадків співвідношень між параметрами нелінійностей розглянутих рівнянь.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер та все ж отримані результати можуть бути застосовані при вивченні сильно нестаціонарних фізичних процесів, для яких характерне явище локалізації тепла, магнітного поля та інших величин на визначених ділянках середи. Також важливим аспектом є метод, за допомогою якого проведено дослідження. Метод енергетичних оцінок може застосовуватись при вивченні нелінійних рівнянь у частинних похідних другого та високих порядків у багатомірних областях з сингулярними граничними даними, а також при вивченні великих розв'язків параболічних рівнянь з абсорбцією та логістичних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковому керівникові. Всі результати дисертації отримані авторкою самостійно. Зі статей, які опубліковані у співавторстві, у дисертацію включені лише ті результати, які належать авторці. А саме: роботи [19], [83], [84] написані без співавторів, роботи [20], [77] написані у співавторстві з науковим керівником, йому належить постановка задачі та загальний план дослідження.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації були представлені на конференціях всеукраїнського та міжнародного рівнів: Міжнародна конференція з диференціальних рівнянь, присвячена 110-річниці від дня народження Я.Б. Лопатинського (Львів, 2016); V Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я.Б. Лопатинського (Київ, 2016); Міжнародна конференція з диференціальних рівнянь, математичної фізики та застосувань (Черкаси, 2017); Міжнародна літня математична школа пам'яті В.А. Плотнікова (Одеса, 2018); Summer School Wisla 18 (Вісла, Польща, 2018); Міжнародна наукова конференція, присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях"(Чернівці, 2018); VI Всеукраїнська математична конференція імені Б.В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу"(Микуличин, 2018); Наукова конференція, присвячена 80-річчю Б.В. Базалія та сторіччю Національної академії наук України "Contemporary Analysis and Nonlinear Boundary Problems"(Слов'янськ, 2018); Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2019» (Львів, 2019); Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 2019); Міжнародна конференція до 100-річчя О.В. Погорєлова "Geometry, Differential Equations and Analysis"(Kharkiv, 2019); VI Міжнародна школа-конференція імені Я.Б. Лопатинського "Диференціальні рівняння та їх застосування"(Вінниця, 2019); Міжнародна конференція «Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV», присвячена 100-річчю з дня народження В.К. Дзядика (Світязь, 2019).

Також результати дисертаційного дослідження доповідались на семінарах: розширений семінар відділення математики Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України (Харків, 2019); розширений семінар відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України (Слов'янськ, 2019).

Публікації. Всі основні результати роботи в повній мірі опубліковані у фахових журналах та міжнародних наукових виданнях з наукометричних баз, пройшли апробацію на наукових конференціях та семінарах. Результати дисертації знайшли відображення в 16 наукових публікаціях, в тому числі в 5 статтях [19], [20], [77], [83], [84] у спеціалізованих журналах, з яких три написано без співавторів, і в тезах виступів [85], [86], [87], [88], [60], [89], [90], [91], [92], [93], [21] на 11 наукових конференціях.

Структура дисертації Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, трьох розділів, висновків до дисертації, списку використаних джерел, який містить 93 найменування, та 1 додатку. Повний обсяг роботи – 156 сторінок. Обсяг основної частини дисертації – 117 сторінок. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 22 сторінки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано у відділі нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики та механіки НАН України у відповідності до тематики пріоритетних досліджень відділу та в рамках державних науково-дослідних робіт:

1. НДР «Спектральні та якісні властивості еліптичних та параболічних граничних задач та їх розв'язків», відомча тематика НАН України, номер державної реєстрації: 0116U002032, термін виконання: 2016-2020 роки.

2. НДР «Регулярність та точні поточкові оцінки сингулярних розв'язків квазілінійних еліптичних та параболічних рівнянь структури дифузії-

сильної нелінійної абсорбції», що фінансувалась Державним фондом фундаментальних досліджень згідно договорів:

№ Ф71/66-2016 від 12.07.2016 р., номер державної реєстрації: 0116U007160, термін виконання: липень – грудень 2016 року,

№ Ф71/42-2017 від 11.05.2017 р., номер державної реєстрації: 0117U006053, термін виконання: травень – жовтень 2017 року.

3. НДР «Геометричні властивості метричних просторів, динамічних систем та особливості параболічних рівнянь», що фінансувалась Державною організацією «Відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при Національній академії наук України» згідно протоколу № 28 від 16.05.2017 р.,

   номер державної реєстрації: 0117U006353, термін виконання: липень - грудень 2017 року,

   номер державної реєстрації: 0118U003795, термін виконання: січень - грудень 2018 року.

РОЗДІЛ 1

ІСТОРІЯ ЗАДАЧІ ТА ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Історія задачі та основні результати минулого сторіччя

В дисертаційній роботі вивчаються задачі з сингулярними граничними даними для параболічних рівнянь, тобто розв'язок задачі має прямувати до нескінченності на межі області за скінчений проміжок часу. Найпростішим прикладом таких задач є така:

$$u_t - (k(u)\,u_x)_x = 0 \qquad \text{в } (0,T)\times\mathbb{R}^+,\ T<\infty, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{1.2}$$

$$u(t,0) = f(t) \to \infty \quad \text{as} \quad t \to T. \tag{1.3}$$

Тут k є невід'ємною і достатньо гладкою функцією, а саме $k \in C(0,T) \cap C^2(0,\infty)$. У випадку виродження коефіцієнта у константу $k(u) \equiv k_0 = const > 0$ рівняння (1.1) стає лінійним параболічним рівнянням, а саме:

$$u_t - k_0\,u_{xx} = 0.$$

Теорія сингулярних граничних режимів почала активно розвиватися у 60-і роки минулого століття разом із розвитком теорії сильно нестаціонарних та нелінійних проблем контрольованого термоядерного синтезу КТС (Controlled Thermonuclear Fusion). Процес термоядерного синтезу полягає у синтезі більш важких ядер атомів з більш легких з метою отримання енергії. Найбільш поширеним паливом для цієї реакції є суміш ізотопів, дейтерію та трітію. Проблемою було те, що для запуску процесу синтезу, атоми дейтерію та трітію необхідно сильно нагріти.

У 1964 році М.Г. Басов та О.М. Крохін у роботі [52] запропонували нагрівати дейтерій-трітієву мішень до надвисоких температур за допомогою потужного сфокусованого пучку лазерів. Процес нагріву до такої температури у математичній моделі представлений граничною умовою, відповідно до якої температура на поверхні дейтерій-трітієвої краплі монотонно зростає до нескінченості за деякий скінчений проміжок часу. Тож основною задачею стало визначити, як в залежності від поведінки температурного режиму на поверхні, поводить себе температура всередині області, дослідити процеси та феномени, які можуть при цьому з'являтися.

Найпростіша математична модель процесу нагріву, що включає в себе лише розповсюдження тепла, є задача (1.1), (1.2), (1.3) з коефіцієнтом теплопровідності $k(u) > 0$ таким, що $k(u) \to \infty$ при $u \to \infty$, зокрема, $k(u) = u^{\frac{5}{2}}$ для повністю іонізованої плазми. Функцію u_0 в початковій умові (1.2) слід інтерпретувати як температуру області у початковий момент часу, а функцію f — як задану температуру у довільний момент часу $t \in (0, T)$ на поверхні дейтерій-трітієвої мішені, що генерується лазерним променем та нескінченно зростає при наближенні до моменту часу T (зростання за blow-up режимом).

Виявилося, що в залежності від поведінки граничного режиму f, може виникати ефект просторової локалізації, тобто, нескінчена температура не розповсюджується на всю область за скінчений проміжок часу, а локалізується біля її межі. При цьому поза області локалізації температура залишається обмеженою. Перший детальний аналіз такого ефекту для квазілінійного рівняння теплопровідності (1.1) із коефіцієнтом $k(u) = u^{\sigma}$, $\sigma > 0$ був представлений О.А. Самарським та І.М. Соболем у 1963 році у роботі [42]. В ній отримано чисельні розв'язки описаної задачі не тільки для одновимірного випадку, а й коли розмірність просторової змінної дорівнює 2 та 3.

У 1972 році на конференції у Монреалі Едвард Теллер вперше запропонував лазерне стискання дейтерій-трітієвої мішені до надвисокої щільності. Таке стискання може ініціювати термоядерне горіння, що призведе до синтезу та вивільнення енергії. Принциповим бар'єром було те, що при такому стисканні можливе виникнення шокових хвиль. Але у роботі [71] (1972) I. Nuckolls, L. Wood, A. Thiessen and G. Zimmerman показали чисельно, що лазерне стискання без шокових хвиль можливе. Істотною вимогою такого процесу було те, що потік лазерного випромінювання на DT-мішень має змінюватися монотонно за blow-up режимом за скінчений час.

Після публікації роботи [71] ефект просторової локалізації за умови, що температура u прямує до нескінченності при $t \to T$, став популярним об'єктом дослідження і позиціонувався як одна з типових проблем квазілінійних параболічних рівнянь. Зокрема, задача локалізації blow-up розв'язків у параболічних рівняннях була вперше сформульована С.П. Курдюмовим у 1974 році у [69].

У 1970-х роках починається бурхливий розвиток теорії сингулярних режимів. Для того, щоб прослідкувати основні результати того часу, введемо деякі поняття. Будемо розглядати задачу (1.1), (1.2), (1.3).

Визначення 1.1. *Якщо функція u_0 з (1.2) має компактний носій, то для всіх $t \in [0, T)$ може бути визначена* **вільна межа (термальний фронт)**:

$$\zeta(t) = \sup\{x \in [0, \infty) : u(t, x) > 0\}.$$

Легко бачити, що функція ζ є неперервною та монотонно зростаючою на $[0, T)$. Для таких розв'язків (при компактному носії початкової функції u_0) локалізація граничних режимів визначається у термінах термального фронту.

Визначення 1.2. Граничний режим f з (1.3) називається локалізованим, якщо виконана умова:

$$\lim_{t\to T}\zeta(t) < \infty.$$

Представлені далі означення пов'язані з поняттям ефективної локалізації.

Визначення 1.3. Для довільного розв'язку u задачі (1.1), (1.2), (1.3) множиною сингулярності (blow-up set) називається:

$$\Omega_s = \Omega_s(u) = \{x : \limsup_{t\to T} u(t,x) = \infty\},$$

Визначення 1.4. Розв'язок $u(t,x)$ називається **ефективно локалізованим**, якщо:

$$\omega := \sup\{x \in \Omega_s(u)\} < \infty.$$

При цьому значення ω називається розміром області сингулярності.

Наступне означення — метастабільна локалізація.

Визначення 1.5. У задачі (1.1), (1.2), (1.3) має місце **метастабільна локалізація**, якщо існує таке $r \in (0,\infty)$, що виконується умова:

$$\lim_{t\to T}\int_r^\infty u(t,x)dx < \infty.$$

Як зазначалося раніше, модель (1.1), (1.2), (1.3) описує процес термоядерного горіння у повністю іонізованій плазмі з коефіцієнтом теплопровідності $k(u) = k_0 u^\sigma$, $\sigma > 0$, $k_0 = const > 0$. Тож така задача вивчалася дуже активно. Зокрема, у роботі [40] (1975) О.А. Самарським, М.В. Змітренко, С.П. Курдюмовим та О.П. Михайловим було розглянуто задачу:

$$u_t - k_0\left(u^\sigma\, u_x\right)_x = 0 \qquad \text{в } (0,T)\times\mathbb{R}^+,\ T<\infty, \tag{1.4}$$

$$u(0,x)=0, \tag{1.5}$$

$$u(t,0)=T_0(T-t)^{-\alpha}, \qquad \alpha>0,\, T_0=const>0. \tag{1.6}$$

Для неї знайдено класи граничних режимів, дія яких породжує метастабільну локалізацію тепла. Показано, що в залежності від значення α з (1.6) локалізація (якщо вона має місце) має різний характер. Розглянемо ці випадки більш детально.

1. Якщо $\alpha=\frac{1}{\sigma}$, то локалізація має місце, а область сингулярності (див. Означення 1.3) є деякий інтервал $\Omega_s=(0,x_f)$. У цьому випадку граничний режим називається **S-режим**, а розв'язок задачі (1.4), (1.5), (1.6) має вигляд стоячої хвилі:

$$u(t,x)=\begin{cases} T_0(T-t)^{-\frac{1}{\sigma}}\left(1-\frac{x}{x_f}\right)^{\frac{2}{\sigma}} & \text{при } x\leqslant x_f,\\ 0 & \text{при } x>x_f. \end{cases}$$

Значення x_f називається також глибиною прогріву і очевидно визначає термальний фронт (див. Означення 1.1) $\zeta(t)\equiv x_f$, x_f залежить від властивостей середи k_0, σ та інтенсивності початкового нагріву T_0. Вперше ефект стоячої хвилі був описаний у роботі [42]. Він цікавий тим, що область, в якій температура відмінна від нуля, не змінюється напротязі деякого проміжку часу. При цьому всередині області температура може зростати до як завгодно великих значень.

2. Якщо $\alpha<\frac{1}{\sigma}$, тоді за теоремами порівняння легко показати, що такий режим не може призвести до проникнення тепла глибше, ніж на глибину x_f, яка визначається мажоруючим S-режимом (див. попередній випадок). Отже має місце локалізація тепла. Більш того, у цій же роботі [40] показано, що розв'язок задачі (1.4), (1.5), (1.6) з відповідною умовою на α буде мати вигляд хвилі, що спочатку рухається від межі всередину області, а починаючи з деякого моменту $\hat{t}$ термальний фронт хвилі зупиняється, а розв'язок біля

межі прямує до нескінченності. Доведено, що в цьому випадку $\Omega_s = \{0\}$, такий режим називається **LS-режимом**.

3. Якщо $\alpha > \frac{1}{\sigma}$, то теплова хвиля розповсюджується зі скінченою швидкістю, отже термальний фронт ζ є строго зростаючою функцією. У цьому випадку локалізація залежить від того, в якій області розглядається задача та за який проміжок часу. Такий режим називають **HS-режимом**.

Відмітимо, що у роботі [40] також приведено ряд чисельних розв'язків не тільки для одномірного, а й для двовимірного та тривимірного випадків. Більш детально вивчений випадок S-режиму з параметром $\sigma = \frac{5}{2}$, знайдено оцінки деяких параметрів, необхідних для нагріву повністю іонізованої плазми лазерним випромінюванням.

У роботі [22] (1977) тими ж авторами було розглянуто рівняння (1.4) з метою більш практичного вивчення математичної моделі процесу запалювання термояденого горіння у дейтерій-трітієвій плазмі. За допомогою чисельних методів з використанням реальних експерементальних параметрів показано, що у рамках плоскої геометрії такий процес може супроводжуватись локалізацією горіння на деяких ділянках середи напротязі скінченого проміжку часу. Знайдено критичні розміри амплітуди початкових збурень температури, що призводять до резонансного збурення горіння, визначені масштаби розміру та часу розвитку структури термоядерного горіння.

Робота [24] (1977) містить у собі деякий огляд результатів вивчення особливостей режимів із загостренням. В ній описується процес адіабатичного стискання плазми поршнем, побудовано математичну модель цього процесу, вивчено його аналітичні розв'язки. Також у роботі представлено деякі чисельні розв'язки та вивчено модель процесу за наявності магнітного поля.

У кінці 1970-х років вивчення режимів із загостренням почало позиціонуватись як окремий напрямок досліджень якісних властивостей рівнянь з частинними похідними. Такі задачі розглядались не лише у контексті процесу контрольованого термоядерного синтезу, а і як математичні моделі, що мають широкий спектр застосувань у фізиці. Насамперед, вони пов'язувались з особливостями сильно нестаціонарних процесів, для яких характерне явище локалізації тепла, магнітного поля та інших величин на визначених ділянках середи. У результаті таких процесів виникають стійкі температурні або інші неоднорідні структури.

Також активно розвивається та модифікується бар'єрна техніка дослідження задач з сингулярними граничними режимами, вивчаються класи автомодельних розв'язків, розробляється метод з використання наближених автомодельних розв'язків (більш детально концепція методів досліджень описана у пункті 1.2).

Тож, якщо раніше основним предметом досліджень було рівняння (1.1) з коефіцієнтом теплопровідності k, який степенево залежить від температури u, то у 1979 у роботі [39] була досліджена відповідна початково-крайова задача для лінійного рівняння:

$$u_t = k_0 u_{xx}, \qquad x \in (0,\infty),\, t \in [0,T), \tag{1.7}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in (0,\infty). \tag{1.8}$$

$$u(t,0) = u_0\left(\exp\{r_0(T-t)^{-\alpha}\} - 1\right), \quad \alpha > 0, \qquad u(t,0) \to \infty, \quad t \to T. \tag{1.9}$$

Тут k_0, u_0, r_0 — деякі додатні сталі. У [39] знайдено умови локалізації режиму, розглянуто різні випадки степені α, описано поведінку розв'язку в залежності від α. Також слід відмітити, що у лінійному випадку розв'язок ніколи не буде локалізованим у сенсі означення 1.2. Добре відомо, що навіть якщо початкова функція має обмежений носій, розв'язок лінійного рівняння не буде мати обмеженого носія в жодний момент часу. Тож для всіх $t \in (0,T)$

тепловий фронт буде нескінченним $\zeta(t) = \infty$. У той же час розв'язок може бути ефективно локалізованим, див. означення 1.4. Розглянемо різні типи локалізації.

1. Якщо $\alpha = 1$, то розв'язок задачі (1.7), (1.9), (1.8) має такий вигляд:

$$u(t,x) \sim u_0 \left(\exp\left\{ r_0 (T-t)^{-1} \left(1 - \frac{x}{x_p}\right)^2 \right\} - 1 \right), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_p,$$

де $x_p = 2(k_0 r_0)^{\frac{1}{2}}$ — глибина локалізації, поза проміжком $(0, x_p)$ розв'язок не дорівнює нулю, але завжди обмежений. Тож нескінчена температура проникає в область лише на фіксований проміжок, який є областю сингулярності Ω_s. Очевидно, має місце ефективна локалізація, розмір області сингулярності $\omega = x_p$. Такий режим називається S-режимом.

2. Якщо $0 < \alpha < 1$, розв'язок обмежений таким граничним розподілом при $x \to 0$:

$$u(t,x) \to u_0 \left(\exp\left\{ C \left(r_0 k_0^{\alpha} x^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\} - 1 \right), \quad t \to T,$$

де $C = C(\alpha)$ — додатна стала, що залежить від α. У цьому випадку область сингулярності зосереджена на межі $\Omega_s = \{0\}$, тож граничний режим є ефективно локалізованим і називається LS-режимом.

3. Якщо $\alpha > 1$, то розв'язок в області $0 \leqslant x < x_p := C \left(k_0 r_0 (T-t)^{-\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}}$ змінюється за законом:

$$u(t,x) \sim u(t,0) \exp\left\{ -x \left(\alpha r_0 k_0^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} (T-t)^{-\frac{\alpha+1}{2}} \right\}, \quad t \to 0,$$

где $C = C(\alpha)$ — додатна стала, що залежить від α. Цей випадок характеризується тим, що глибина проникнення нескінченної температури x_p залежить від часу t і при наближенні до часу загострення T прямує до нескінченності. Тож область сингулярності $\Omega_s = (0, \infty)$ і режим є нелокалізованим

(HS-режим).

У роботі [39] описано також багатомірний випадок задачі (1.7), (1.9), (1.8) та отримано аналогічні результати, отримано деякі чисельні результати, що стосуються проникнення тепла у S-режимі.

У 1979 році у серії робіт [5,6] почалося дослідження задачі (1.1), (1.3), (1.2) з коефіцієнтом теплопровідності нестепеневого виду. Основною задачею було отримати такі умови на граничний режим f, при яких розв'язок стає локалізованим. Серед основних результатів слід виділити визначення достатніх умов локалізації для коефіцієнтів:

$$k(u) = \frac{u^{\sigma}}{1+\lambda(u)}, \quad u > 0,\, \sigma = const > O,$$

де функція $\lambda \in C^2(\mathbb{R}^1_+)$, $\lambda(u) \geqslant 0$, $\lambda'(u) \geqslant 0$, $u > 0$. У цих же роботах отримані умови відсутності локалізації для коефіцієнтів:

$$k(u) = u^{\sigma}(1+\lambda(u)), \quad u > 0,\, \sigma = const > O$$

з аналогічними умовами на функцію λ.

У роботі [8] (1981) досліджено ефект локалізації для середи з коефіцієнтом теплопровідності, що має більш довільну залежність від температури:

$$\int_0^1 \frac{k(u)}{u} du < \infty.$$

Показано, що ця умова на коефіцієнт є необхідною і достатньою для того, щоб швидкість розповсюдження збурень у процесах, що описуються відповідним рівнянням, була скінченою.

Подальший розвиток досліджень був пов'язаний зі знаходженням необхідних і достатніх умов локалізації розв'язків для граничних режимів загального виду. Покажемо еволюцію цих досліджень на прикладі задачі:

$$u_t = (u^m)_{xx} \quad \forall (x,t) \in (0,\infty) \times (0,T), \quad m > 1, \quad 0 < T < \infty, \tag{1.10}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in [0,\infty), \tag{1.11}$$

$$u(0,t) = \psi(t) \quad \forall t \in [0,T), \quad \psi(t) \to \infty \ \text{ when } \ t \to T, \tag{1.12}$$

де u_0 та ψ — задані невід'ємні неперервні функції, що задовольняють умові узгодження $\psi(0) = u_0(0)$.

Рівняння (1.10) називається рівнянням пористого середовища, бо воно описує нестаціонарну течію стискаючої ньютонівської рідини у пористому середовищі (фільтрацію) при політропічному режимі (див., наприклад, [3]).

У роботі [9] у 1982 році розглядається задача (1.10), (1.11), (1.12) з граничною функцією $\psi(t)$ з класу $C^2(0,T)$. Для такої задачі отримано представлений результат.

Теорема 1.1. Припустимо, що граничний режим із сингуляним загостренням ψ задовольняє таким умовам:

$$\psi \in C^2(0,T), \qquad \psi'(t) > 0 \ \ \forall t \in (0,T),$$

а також існує границя:

$$\lim_{t \to T} \left(\frac{\psi}{\psi'} \right)'(t) := l.$$

Тоді необхідною і достатньою умовою ефективної локалізації (див. означення 1.4) розв'язку задачі (1.10), (1.11), (1.12) є співвідношення:

$$l = \infty \quad \text{or} \quad \frac{\psi^m}{\psi'} \in L^\infty(0,T). \tag{1.13}$$

Більш того, розмір області сингулярності визначається таким чином:

$$\omega = \begin{cases} 0, & \text{if } l = -\infty, \\ C \limsup_{t \to T} \left(\frac{\psi^m(t)}{\psi'(t)} \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{if } l > -\infty, \end{cases}$$

де C — додатна стала, що залежить лише від l.

Пізніше у роботі [65] B.H. Gilding та M.A. Herrero розширили попередній результат на клас монотонних функцій.

Теорема 1.2. Якщо граничний режим $\psi(t)$ з (1.12) є монотонно зростаючим на $[0,T)$, то розв'язок u задачі буде ефективно локалізованим тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$\rho := \limsup_{t\to T}\left(\psi(t)^{-1}\int_0^t \psi^m(s)ds\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{1.14}$$

Окрім цього, якщо розв'язок є локалізованим, то

$$\limsup_{t\to T}(T-t)^{\frac{1}{m-1}}u(x,t) < \infty \quad \forall x > 0,$$

у той час, як якщо локалізації немає, то

$$\limsup_{t\to T}(T-t)^{\frac{1}{m-1}}u(x,t) = \infty \quad \forall x \geqslant 0.$$

Більш того, у цій же роботі отримано оцінку розміру області сингулярності ω:

$$C_1\rho \leqslant \omega^2 \leqslant C_2\rho,$$

де ρ з (1.14), C_1 та C_2 залежать лише від m.

Також у [65] доведено, що за умов теореми 1.1, критерії локалізації (1.13) та (1.14) є еквівалентними.

Ще більш загальний клас функцій був розглянутий у роботі [55].

Теорема 1.3. Якщо граничний режим $\psi(t)$ з (1.12) є неперервним на $[0,T)$ (без умови монотонності), тоді необхідною і достатньою умовою ефективної локалізації є:

$$\rho^* := \limsup_{t\to T}(T-t)^{\frac{1}{m-1}} \int_0^t \psi^m(t)(s)ds < \infty.$$

У цій же роботі розглянуто задачу Неймана для рівняння (1.10) та отримано критерій локалізації для неї.

1.2 Бар'єрна техніка та автомодельні розв'язки

Усі результати, описані у попередніх підрозділах, отримані чисельно або за допомогою бар'єрної техніки (методу порівняння). Цей метод є досить ефективним та полягає у побудові спеціальних автомодельних розв'язків рівняння та їх аналізі. Ці автомодельні розв'язки перетворюють початкове рівняння на звичайне диференціальне рівняння, яке легше розв'язати та дослідити.

Продемонструємо цю техніку на простому прикладі. Розглянемо початково-крайову задачу для лінійного параболічного рівняння з модельними граничними умовами:

$$u_t = u_{xx} \qquad t > 0,\ x > 0, \tag{1.15}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x > 0,\ \sup u_0 < \infty, \tag{1.16}$$

$$u(t,0) = (1+t)^\alpha, \quad t > 0,\ \alpha > 0. \tag{1.17}$$

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді:

$$u_A(t,x) = (1+t)^\alpha \theta_A(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.18}$$

Підставляючи (1.18) у рівняння (1.15), легко отримати таке звичайне диференціальне рівняння для функції θ_A:

$$\theta_A'' + \frac{1}{2}\theta_A'\xi - m\theta_A = 0, \quad \xi > 0. \tag{1.19}$$

Очевидно, що відповідно до умов (1.16), (1.17), функція θ_A має задовольняти такі умови:

$$\theta_A(0) = 1, \qquad \theta_A(\infty) = 0. \tag{1.20}$$

Таким чином, проблема побудови автомодельного розв'язку (1.18) рівняння з частинними похідними звелася до крайової задачі (1.19), (1.20) для набагато більш простого звичайного диференціального рівняння. Добре відомо, що для задачі (1.19), (1.20) існує єдиний розв'язок, який є строго монотонно зростаючим і має вигляд:

$$\theta_A(\xi) = 2^{2\alpha+1}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{\xi^2}{4}\right\}H_{-(2\alpha+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

де H_ν — функція Ерміта:

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty \exp\{t^2 - 2zt\}t^{-(\nu+1)}dt.$$

Побудований автомодельний розв'язок (1.18) має просту просторово часову структуру. Його легко аналізувати та отримувати різного роду властивості. Тепер, користуючись теоремами порівняння, легко порівнювати розв'язки задачі з більш загальними граничними даними. Наприклад, можна показати, що розв'язок задачі (1.15), (1.16) з умовою на початкову функцію $u_0(x) \leqslant \theta_A(x),\ x > 0$ та з граничними даними, які задовольняють умові:

$$u(t,0) \leqslant (1+t)^\alpha, \quad t > 0,\ \alpha > 0,$$

в силу теорем порівняння, задовольняє нерівності:

$$u(t,x) \leqslant (1+t)^\alpha \theta_A\left(\frac{x}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Проводячи аналіз останньої нерівності, можна отримати необхідні властивості шуканих розв'язків.

Також в рамках методу порівняння доводяться різноманітні твердження щодо стійкості автомодельних розв'язків відносно початкових та граничних умов, відносно збурень коефіцієнту теплопровідності, що допомагає більш глибоко вивчити асимптотичну поведінку розв'язків. Таким чином автомодельні розв'язки виступають в деякому роді бар'єром для класів неавтомодельних розв'язків, які суттєво відрізняються за своїми властивостями.

У багатьох роботах з'ясовувались умови існування та єдиності, вивчалися властивості та асимптотична стійкість різноманітних автомодельних розв'язків рівняння (1.1), див. наприклад, [4–7, 9, 22, 27, 39, 42, 65, 72] і посилання в них.

Зазвичай нетривіальні автомодельні розв'язки допускає достатньо вузький клас рівнянь. Наприклад, рівняння (1.1) з умовами (1.2), (1.3) допускає лише два види таких розв'язків:

$$\text{I. } u_A(t,x) = \theta_A\left(\frac{x}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}\right) \qquad \text{при } f(t) = 1,$$

$$\text{II. } u_A(t,x) = \theta_A\left(x - t\right) \qquad \text{при } f(t) = \theta_A(-t).$$

Звичайно, для рівнянь з коефіцієнтом теплопровідності $k(u)$ більш конкретного вигляду, наприклад степеневого $k(u) = u^\sigma$, з'являються додаткові підходящі класи автомодельних розв'язків (див. [9]). Також додаткові автомодельні розв'язки мають рівняння з експоненціальною нелінійністю $k(u) = e^u$ за рахунок того, що рівняння такого вигляду заміною $v = e^u$ легко зводиться до рівнянь зі степеневою нелінійністю.

Для розширення класу досліджуваних рівнянь розроблялося багато додаткових підходів, один з яких, метод пошуку наближених автомодельних розв'язків, який достатньо повно описано у серії робіт [9–12]. Цей метод полягає у побудові автомодельних розв'язків задачі, які не задовольняють рівняння, але до яких асимптотично збігаються розв'язки задачі, що розглядається. Такий підхід значно розширює клас досліджуваних задач, але не робить описаний метод більш універсальним.

1.3 Метод енергетичних оцінок та основні результати

У 1999 році в роботі [45] А.Є. Шишков та А.Г. Щелков був запропонований новий метод для вивчення локалізованих режимів із загостренням для квазілінійних параболічних рівнянь другого порядку у багатомірних областях.

Цей метод використовує принципово інший підхід, що полягає у ефективній оцінці перетоків енергії у нескінченій послідовності часових шарів, які накопичуються біля часу загострення, і не використовує бар'єрних технік. Він є комбінацією декількох методів та підходів. А саме, використовує метод апріорних оцінок типу Сен-Венана, які застосовуються при вивченні існування, єдиності та асимптотичних властивостей енергетичних слабких розв'язків лінійних еліптичних та параболічних рівнянь (див. [37, 38, 43, 67, 80]), а також нелінійний варіант цього методу (див. [1, 44]); метод локальних енергетичних оцінок (див. [2, 57]).

Пізніше у серії робіт В.О. Галактіонова та А.Є. Шишкова [61–64] (2003–2006) метод енергетичних оцінок був розвинутий для широкого класу двічі нелінійних параболічних рівнянь другого порядку та розширений для дослідження рівнянь високих порядків. У монографії [68] (2016) зібрані усі основні принципи та результати, отримані методом енергетичних оцінок.

Продемонструємо основні результати згаданих робіт та принцип роботи методу на прикладі двічі нелінійного параболічного рівняння. Розглянемо початково-крайову задачу:

$$(u^q)_t - \Delta_p u = 0 \quad (t,x) \in [0,T) \times \Omega,\ n \geqslant 1,\ p > 1,\ q > 0, \tag{1.21}$$

де Ω — обмежена зв'язна область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ з C^2–гладкою межею $\partial\Omega$. Оператор Δ_p є p-лапласіаном, тобто $\Delta_p u = \sum_{i=1}^n \left((\nabla_x u)^{p-1} u_{x_i}\right)_{x_i}$. Початкова і крайова умова для рівняння мають такий вигляд:

$$u(0,x) = u_0 \ \text{ в } \Omega, \quad u_0 \in L^{q+1}(\Omega), \tag{1.22}$$

$$u(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = f(t,x), \tag{1.23}$$

де функція f визначена на $\partial\Omega$ та задає сингулярне загострення функції u на межі, тобто

$$f(t,x) \to \infty \quad \text{ при } t \to T, \quad \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Будемо розглядати функцію $f(t,x)$ як слід на $(0,T)\times\partial\Omega$ функції $\overline{f}(t,x)$, яка визначена на циліндрі $Q = (0,T)\times\Omega$ та задовольняє умовам гладкості:

$$\overline{f}(t,\cdot) \in C_{loc}([0,T); L^{q+1}(\Omega)) \cap L^{p+1}_{loc}([0,T); W^{1,p+1}(\Omega));$$
$$\overline{f}_t(t,\cdot) \in L^1_{loc}([0,T); L^{q+1}(\Omega)) \cap L^{\frac{p+1}{p-q+1}}_{loc}([0,T); L^{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)).$$

Характер загострення граничного режиму при $t \to T$ опишемо функцією:

$$F(t) := \sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |\overline{f}(\tau,x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x \overline{f}(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau + \\ + \left(\int_0^t \left(\int_\Omega |\overline{f}(\tau,x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} d\tau \right)^{q+1} \to \infty \ \text{ при } t \to T. \tag{1.24}$$

Визначення 1.6. Функцію $u \in C_{loc}([0,T); L^{q+1}_{loc}(\Omega))$ будемо називати слабким (енергетичним) розв'язком задачі (1.21), (1.22), (1.23), якщо виконані умови:

i) $u(t,\cdot) - f(t,\cdot) \in L^{p+1}_{loc}([0,T); \overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))$;

ii) $(|u(t,\cdot)|^{q-1}u(t,\cdot))_t \in L^{\frac{p+1}{p}}_{loc}([0,T); (\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))^*)$;

iii) виконується інтегральна тотожність:

$$\int_0^\tau \langle (|u|^{q-1}u)_t, \eta \rangle dx + \int_0^\tau \int_\Omega \sum_{i=1}^n (\nabla_x u)^{p-1} u_{x_i} \eta_{x_i} dx dt = 0 \tag{1.25}$$

для довільної функції $\eta \in L^{p+1}((0,\tau); \overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))$ для довільного $\tau < T$;

iv) виконується початкова умова (1.22).

Тепер, після того, як сформульована задача (1.21), (1.22), (1.23), описані всі функції та введені основні означення, опишемо принцип методу енергетичних оцінок.

На першому кроці вводимо до розгляду енергію, що визначається таким чином:

$$\mathcal{E}^{(u)}(t) := \sup_{0\leqslant\tau<t} \int_\Omega |u(\tau,x)|^{q+1}dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1}dxd\tau, \quad t \in (0,T).$$

Ця функція має фізичну інтерпретацію, вона визначає енергію системи у момент часу t. Використовуючи інтегральну тотожність (1.25), граничну умову (1.23) та означення функції (1.24), неважко отримати (див. лему 6.2.1 у [68]) оцінку енергії:

$$\mathcal{E}^{(u)}(t) \leqslant CF(t) \quad \forall t < T, \quad C = const > 0.$$

Далі часовий проміжок $(0,T)$ розбиваємо спеціальним чином на нескінчену послідовність інтервалів (t_i, t_{i+1}) $(i \in \mathbb{N})$, при чому послідовність $\{t_i\}$ має збігатися до T. Спосіб такого розбиття є одним з ключових моментів дослідження та суттєво залежить від поведінки граничного режиму.

Наступний крок передбачає вивчення поведінки енергетичної функції $\mathcal{E}^{(u)}$ окремо на кожному з часових шарів (t_i, t_{i+1}) та вивчення перетоків енергії з одного шару в інший.

Результатом такого дослідження є оцінка, що описує поведінку енергетичної функції в залежності від відстані до межі та від часу. Оскільки енергетична функція визначає в деякому сенсі розв'язок задачі, то отримана оцінка дає змогу говорити про локалізацію розв'язку та розмір області сингулярності (див. означення 1.4).

Використовуючи описаний метод, у роботах [45, 61–64, 68] була вивчена локалізація граничного режиму задачі (1.21), (1.22), (1.23). Оскільки рівняння (1.21) має дві нелінійності, то при його дослідженні суттєвим моментом є відношення між параметрами нелінійностей p та q. Тому, будемо розглядати 3 випадки.

1. У випадку, коли $p > q$ (див. [68], теорема 6.3.1), розглядається функція F у вигляді:

$$F(t) := \gamma(t) \cdot (T-t)^{-\frac{q+1}{p-q}} \to \infty \ \text{ при } t \to T.$$

Зрозуміло, що задля того, щоб зберегти сингулярність, функція γ має бути такою, щоб $F(t) \to \infty$ при $t \to T$. В залежності від поведінки γ досліджено локалізацію граничного режиму.

1.1. Якщо $\gamma(t) \equiv \gamma_0 = const > 0 \ \forall t < T$, то граничний режим є S-режимом. Тож, розв'язок є ефективно локалізованим (див. означення 1.4), а розмір області сингулярності Ω_s залежить від γ_0 таким чином:

$$\omega = c\gamma_0^{\mu}, \quad c = const > 0. \tag{1.26}$$

де параметр $\mu > 0$ залежить тільки від відомих параметрів задачі.

1.2. Якщо $\gamma(t) \to 0$ при $t \to T$, то граничний режим є LS-режимом. Дійсно, згідно з (1.26), $\omega \to 0$ при $\gamma_0 \to 0$, тож в цьому випадку розмір області сингулярності дорівнює 0, а сама область концентрується на межі $\Omega_s \subset \partial\Omega$.

1.3. Якщо $\gamma(t) \to \infty$ при $t \to T$, то граничний режим є HS-режимом. Режим в цьому випадку не є локалізованим, і область сингулярності співпадає з областю визначення задачі $\Omega_s = \Omega$.

2. У випадку, коли $p = q$ (див. [68], теорема 6.4.1), функція F розглядалася у заданому вигляді:

$$F(t) := \exp\left(\gamma(t) \cdot (T-t)^{-\frac{1}{p}}\right) \quad \forall t < T.$$

Функція γ розглядається лише у класі, який забезпечує умову сингулярності $F(t) \to \infty$ при $t \to T$. У цьому випадку, аналогічно з попереднім, виділяється три можливості для γ.

2.1. Якщо $\gamma(t) = \gamma_0 > 0\ \forall t < T$, то граничний режим є S-режимом. При цьому розмір області сингулярності оцінюється таким чином:

$$\omega = c\gamma_0^{\frac{p}{p+1}}, \quad c = const > 0. \tag{1.27}$$

2.2. Якщо $\gamma(t) \to 0$ при $t \to T$, тоді з (1.27) випливає, що $\omega = 0$, тож $\Omega_{bl} \subset \partial\Omega$, граничний режим є LS-режимом.

2.3. Якщо $\gamma(t) \to \infty$ при $t \to T$, то, очевидно, що граничний режим є HS-режимом і локалізація не має місця.

3.У випадку, коли $p < q$, локалізація завжди має місце, не залежно від функції F. Це доводить теорема.

Теорема 1.4.(див. [68], теорема 6.5.1) Нехай u — довільний енергетичний розв'язок задачі (1.21), (1.22), (1.23) з додатковою структурною умовою $p < q$. Тоді, незалежно від степені сингулярності функції F, для множини сингулярності Ω_{bl} завжди буде виконуватись включення $\Omega_{bl} \subset \partial\Omega$, тобто довільний граничний режим є локалізованим LS-режимом. Більш того, виконується точна рівномірна енергетична оцінка:

$$\mathcal{E}(t,s) \leqslant Cs^{-\frac{pq+2p+1}{q-p}} \quad \forall\, t < T, \forall\, s > 0,$$

де $\mathcal{E}(t,s)$ — параметризована енергія, що залежить не тільки від часу t, але й від s, відстані від довільної точки до межі області (більш детальний опис енергетичних функцій представлений у підрозділі 2.2).

Метод енергетичних оцінок показує себе як дуже перспективний підхід до вивчення локалізованих граничних режимів. Він не використовує жодних теорем порівняння та не вимагає існування автомодельних розв'язків, тому є більш універсальним та практичним.

У вищеописаних роботах цей метод було застосовано для пошуку умов локалізації. Цікаво також дослідити поведінку розв'язків при локалізованих граничних даних. З цією метою було проведено відповідне дослідження, метод енергетичних оцінок був удосконалений та розширений. У розділах 2 та 3 можна бачити, як, використовуючи цей метод, отримати точні оцінки розв'язків задач типу (1.21), (1.22), (1.23). При цьому дуже цікаво прослідківати саме поведінку профілю розв'язків та дослідити, за яким законом відбувається спадання температури біля зони сингулярності, як характер поведінки залежить від заданих граничних умов. Такі дослідження і є метою дисертаційної роботи, вони детально описані у розділах 2 та 3, а відповідні результати отримані у роботах [19, 20, 77, 83, 84].

1.4 Про існування розв'язків

Існування розв'язків задачі Коші та першої крайової задачі зі скінченими або нескінченими початковими та граничними даними для лінійних та нелінійних параболічних рівнянь вивчалось в багатьох роботах. Наведемо декілька важливих посилань.

Розглянемо задачу для рівняння пористого середовища, а саме для рівняння ньютонівської політропічної фільтрації:

$$u_t = \Delta\left(|u|^{m-1}u\right), \quad m > 1, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega \tag{1.28}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{1.29}$$

$$u(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = u_1(t,x). \tag{1.30}$$

Існування узагальнених (слабких) розв'язків задачі Коші (1.28), (1.29) вивчалось в роботах [17, 29, 48, 53]. Існування слабкого розв'язку першої крайової задачі (1.28), (1.29), (1.30) доведено у [36, 49, 54].

Рівняння швидкої дифузії (1.28) при $m \in (0,1)$ розглядалося в роботах [54, 66]. Відмітимо, що у роботі [54] доведено існування розв'язку і задачі (1.28), (1.29), і (1.28), (1.29), (1.30).

Умови існування розв'язків задачі Коші для рівняння нелінійної теплопровідності з поглинанням або зі стоком:

$$u_t = \Delta\left(|u|^{m-1}u\right) + D|u|^{q-1}u, \quad D = const, \tag{1.31}$$

були отримані у [30] (для випадку $D < 0$) та у роботах [16, 32] (для випадку $D > 0$). Задача (1.31), (1.29), (1.30) розглядалась у [13], а для випадку нестепеневих нелінійностей — у роботах [14, 15].

Актуальним для нас є випадок двічі нелінійного дивергентного рівняння:

$$u_t = \nabla_x\left(|\left(|u|^{m-1}u\right)_x|^{p-1}\left(|u|^{m-1}u\right)\right), \quad p > 0, m > 1, \tag{1.32}$$

досліджувався у роботах [18, 31, 33, 35, 46, 47, 50, 59, 82]. Це рівняння зводиться до рівняння (1.21) простою заміною $v = |u|^{m-1}u$.

Відмітимо, що у роботі [46] розглянуто умови існування початково–крайової задачі для рівняння (1.32) з сингулярними граничними даними типу (1.23).

Висновки до розділу 1

У 1960-х роках почався активний розвиток теорії сингулярних граничних режимів разом із розвитком теорії сильно нестаціонарних та нелінійних проблем контрольованого термоядерного синтезу. Перша математична модель цього процесу була представлена та вивчена у роботі [42] у 1963 році. Умови на межі області задачі були сингулярними, тобто розв'язок на межі мав прямувати до нескінченості при наближенні до деякого часу $T < \infty$. Було виявлено ефект просторової локалізації, коли нескінчений ріст розв'язку локалізується у фіксованій області біля межі і не поширюється глибоко всередину області задачі.

Усі дослідження минулого сторіччя були присвячені знаходженню умов на граничний режим, при яких має місце локалізація розв'язків лінійних та напівлінійних рівнянь другого порядку, а також вивченню поведінки розв'язків таких задач. Найбільш вагомі результати були отримані В.О. Галактіоновим, М.В. Змітренко, С.П. Курдюмовим, О.П. Михайловим, О.А. Самарським, А.С. Калашніковим, B.H. Gilding, M.A. Herrero, C. Cortazar, M. Elgueta та багатьма іншими у роботах [5–8, 22–24, 27, 28, 39–42, 55, 65, 69]. Усі дослідження проводились бар'єрною технікою (методом порівняння). Цей підхід полягає у порівнянні розв'язків задачі з автомодельними розв'язками. Багато труднощів виникало, коли задача не допускала автомодельності і необхідно було знаходити інші шляхи дослідження, наприклад, метод пошуку наближених автомодельних розв'язків (див. [9–12]). У будь-якому випадку, цей метод є досить результативним, хоча і має багато обмежень та не є універсальним.

У 1999 році у роботі [45] А.Є. Шишковим та А.Г. Щелковим було запропоновано новий метод дослідження сингулярних граничних режимів. Метод енергетичних оцінок використовує принципово інший підхід, що полягає у ефективній оцінці перетоків енергії у нескінченій послідовності часових шарів, які накопичуються біля часу загострення, і не використовує бар'єрних технік. Він є комбінацією декількох підходів, а саме, методу апріорних оцінок типу Сен-Венана та методу локальних енергетичних оцінок.

Пізніше у серії робіт В.О. Галактіонова та А.Є. Шишкова [61–64] (2003–2006) метод енергетичних оцінок був розвинутий для широкого класу двічі нелінійних параболічних рівнянь другого порядку та розширений для дослідження рівнянь високих порядків. У монографії [68] (2016) зібрані усі основні принципи та результати, отримані методом енергетичних оцінок, а саме для широкого класу рівнянь отримано точні умови локалізації граничних режимів.

РОЗДІЛ 2

ГРАНИЧНІ РЕЖИМИ ІЗ ЗАГОСТРЕННЯМ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Постановка задачі

В обмеженій циліндричній області $Q = (0,T) \times \Omega$, $1 \leqslant T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, $\partial\Omega \in C^2$, розглядається задача:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \sum_{i=1}^{n} (a_i(t,x,u,\nabla u))_{x_i} = 0, \tag{2.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.2}$$

Тут функції $a_i(t,x,s,\xi)$, $i = 1,2,...,n$ є неперервними функціями усіх своїх аргументів і задовольняє умовам коерцитивності та росту:

$$d_0|\xi|^{p+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,s,\xi)\xi_i \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n,\ d_0 = \mathrm{const} > 0, \tag{2.3}$$

$$|a_i(t,x,s,\xi)| \leqslant d_1|\xi|^p \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n,\ i = 1,...,n,\ d_1 = \mathrm{const} < \infty. \tag{2.4}$$

Істотною умовою у цій задачі є умова співвідношення між p та q:

$$p \geqslant q > 0. \tag{2.5}$$

Початкова функція $u_0 \in L_{q+1}(\Omega)$.

Відмітимо, що модельним представником рівняння (2.1) з умовами (2.3), (2.4) є таке:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p u = 0, \tag{2.6}$$

де $\Delta_p u = \sum_{i=1}^{n} \left(|\nabla_x u|^{p-1} u_{x_i}\right)_{x_i}$.

Будемо розглядати клас U_{u_0} усіх слабких розв'язків задачі (2.1), (2.2).

Визначення 2.7. Функція $u \in C_{loc}([0,T); L^{q+1}(\Omega))$ називається **слабким (енергетичним) розв'язком** задачі (2.1), (2.2), якщо

i) $u(t,\cdot) \in L^{p+1}_{loc}([0,T); W^{1,p+1}(\Omega))$;

ii) $(|u(t,\cdot)|^{q-1}u(t,\cdot))_t \in L^{\frac{p+1}{p}}_{loc}([0,T); (\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))^*)$;

iii) виконується інтегральна тотожність:

$$\int_0^\tau \langle (|u|^{q-1}u)_t, \eta\rangle dt + \int_0^\tau \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla u)\eta_{x_i} dxdt = 0$$

для довільної функції $\eta \in L^{p+1}((0,\tau); \overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))$ з довільним $\tau < T$;

iv) виконано початкову умову (2.2).

Будемо розглядати клас $U_{u_0,F}$ усіх енергетичних розв'язків u задачі (2.1)–(2.2), які задовольняють оцінку:

$$\begin{gathered} h(\tau) + E(t) = h_u(\tau) + E_u(t) := \sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |u(\tau,x)|^{q+1} dx + \\ + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dxd\tau \leqslant F(t) \quad \forall\, t \in (0,T), \end{gathered} \tag{2.7}$$

де $F(t) > 0$ — довільна монотонно неспадна на інтервалі $[0,T)$ функція така, що $F(t) \to \infty$ при $t \to T$.

Відмітимо, що введений клас $U_{u_0,F}$ містить у собі розв'язки задачі для рівняння (2.1) із початковою умовою (2.2) та з граничною умовою Діріхле, що загострюється у момент часу $t = T$:

$$u(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = f(t,x) \to \infty \text{ при } t \to T \tag{2.8}$$

а також, з граничною умовою Неймана:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial N}\bigg|_{\partial\Omega} := \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla u)\ \nu_i = g(t,x) \to \infty \text{ при } t \to T,$$

де $\nu = \nu(x) = (\nu_1, ..., \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$ в точці x.

Неважко перевірити (див. [68]), що в цьому випадку розв'язки задачі (2.1), (2.2), (2.8) належать класу $U_{u_0,F}$ з функцією F, що визначається співвідношенням:

$$F(t) := F_f(t) = \sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |\overline{f}(\tau,x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x \overline{f}(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau +$$
$$+ \left(\int_0^t \left(\int_\Omega |\overline{f}(\tau,x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} d\tau \right)^{q+1},$$

де $\overline{f}(t,x)$ — це довільне продовження функції $f(t,x)$ з $[0,T)\times\partial\Omega$ на всю циліндричну область Q. Зрозуміло, що точність відповідної оцінки (2.7) пов'язана з оптимальністю вибору продовження $\overline{f}$.

2.2 Система диференціальних нерівностей

Метод енергетичних оцінок передбачає аналіз енергетичних функцій, тож визначимо енергетичні функції для слабких розв'язків u рівняння (2.1). Енергетичні функції, що визначають граничну умову, задаються аналогічно, як у (2.7):

$$E(t) = E^{(u)}(t) := \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau,$$
$$h(t) = h^{(u)}(t) := \sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |u(\tau,x)|^{q+1} dx \qquad \forall\, t < T,$$

Ці функції визначають поведінку довільного розв'язку u. Для того, щоб вивчити поведінку біля межі області Ω, параметризуємо енергетичні функції за допомогою параметра s, який визначатиме відстань від довільної точки області до її межі $\partial\Omega$. Розглянемо сімейство підобластей $\Omega(s)$, визначених співвідношенням:

$$\Omega(s) := \{x \in \Omega : d(x) > s\}, \quad s \in (0, s_\Omega). \tag{2.9}$$

Слід відмітити, що в силу гладкості області $\Omega(s)$, існує таке число s_Ω, яке визначає "радіус" цієї області. Це таке число, для якого функція $d(\cdot) \in C^2(\Omega \setminus$

$\Omega(s)) \ \forall s \leqslant s_\Omega$ і, відповідно, межа $\partial\Omega(s)$ є C^2–гладким многовидом для всіх $0 < s \leqslant s_\Omega$. Тепер можемо визначити параметризовані енергетичні функції $E(t,s)$, $h(t,s)$:

$$\begin{aligned} E(t,s) &:= \int_{\frac{T}{2}}^{t} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau, \\ h(t,s) &:= \sup_{0 \leqslant \tau < t} \int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{q+1} dx \qquad \forall\, s \in (0, s_\Omega),\ \forall\, t \in (0,T). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Для того, щоб дослідити розв'язки задачі необхідно досліджувати функції $E(t,s)$, $h(t,s)$. Метод передбачає оцінку енергетичних функцій на часових шарах, для цього розіб'ємо проміжок $[0,T)$ за допомогою зростаючої послідовності точок $\{t_j\}$ $(j = 1,2,...,j_0 \leqslant \infty,\ t_0 = 0,\ t_{j_0} = T)$. Таким чином отримаємо інтервали $[t_{j-1}, t_j)$ довжини $\Delta_j := t_j - t_{j-1} > 0$. Тепер введемо до розляду пошарові енергетичні функції:

$$\begin{aligned} E_j(s) &:= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(t,x)|^{p+1} dx dt, \\ h_j(s) &:= \sup_{t_{j-1} \leqslant t < t_j} \int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{p+1} dx \qquad \forall\, j \leqslant j_0,\ \forall\, s \in (0, s_\Omega). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для цих функцій маємо систему диференціальних нерівностей.

Лема 2.1. Нехай u — довільний слабкий розв'язок рівняння (2.1), з умовами (2.3), (2.4), (2.5) з класу $U_{u_0,F}$. Тоді для майже всіх $s \in (0, s_\Omega)$ справедлива система диференціальних нерівностей:

$$E_j(s) + h_j(s) \leqslant C_1 h_{j-1}(s) + C_2 \Delta_j^{\nu_1} \left(-E_j'(s)\right)^{1+\mu_1} + C_3 \Delta_j^{\nu_2} \left(-E_j'(s)\right)^{1+\mu_2}, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} h_j(s) \leqslant (1+\gamma) h_{j-1}(s) + C_4 \gamma^{-(\nu_1+\mu_1)} \Delta_j^{\nu_1} \left(-E_j'(s)\right)^{1+\mu_1} + \\ + C_5 \gamma^{-\frac{1}{q}} \Delta_j^{\nu_2} \left(-E_j'(s)\right)^{1+\mu_2}, \quad j = 1,2,...,j_0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

для довільного $\gamma : 0 < \gamma < 1$. Додатні сталі $C_1 < \infty$, $C_2 < \infty$, $C_3 < \infty$ залежать тільки від відомих параметрів задачі і не залежать від γ, функції

E_j та h_j визначені в (2.11),

$$\nu_1 = \frac{(1-\theta)(q+1)}{q(p+1)+\theta(p-q)}, \quad \mu_1 = \frac{(1-\theta)(p-q)}{q(p+1)+\theta(p-q)},$$
$$\theta = \frac{n(p-q)+q+1}{n(p-q)+(q+1)(p+1)} < 1, \quad \nu_2 = \frac{(q+1)}{q(p+1)}, \quad \mu_2 = \frac{(p-q)}{q(p+1)}.$$

Доведення аналогічне доведенню леми 6.2.3 з [68].

2.3 Локаліований експоненціальний режим для рівняння нейтральної дифузії

У цьому підрозділі досліджуються розв'язки задачі (2.1) із класу $U_{u_0,F}$ у випадку, коли $p = q$. Умови локалізації для такої задачі були досліджені у [68] та детально описані у підрозділі 1.3. Нагадаємо, що розв'язок задачі з класу $U_{u_0,F}$ буде обмеженим всюди всередині області Ω при $t \to T$, коли функція F має таку структуру:

$$F(t) := \exp\left(\omega(t)\cdot(T-t)^{-\frac{1}{p}}\right) \quad \forall\, t<T, \quad \omega(t)\to 0 \text{ при } t\to T. \tag{2.14}$$

Метою дослідження є отримання точної оцінки розв'язку та опис залежності поведінки розв'язку від ω. Основний результат цього підрозділу представлено у теоремі.

Теорема 2.5. Нехай u — довільний слабкий розв'язок рівняння (2.1) із класу $U_{u_0,F}$ з функцією F, визначеною таким чином:

$$F(t) = F_\mu(t) := \exp\left(\omega(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall t<T, \tag{2.15}$$

де $\omega > 0$, $\mu > 0$ — деякі сталі. Тоді існують сталі $c_1 < \infty$, $c_2 < \infty$, $c_3 < \infty$, що залежать лише від p, n, d_0, d_1 такі, що виконується рівномірна відповідно до $t < T$ апріорна оцінка:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant c_1 \exp\left(c_2 \omega^{\frac{p+\mu}{\mu}} s^{-\frac{p+1}{\mu}}\right)$$
$$\forall\, s: 0 < s < s_0' := c_3 \min\left(1, \omega^{\frac{p+\mu}{p+1}}\right), \tag{2.16}$$

де $h(t,s)$, $E(t,s)$ — енергетичні функції з (2.10).

Перед початком доведення теореми введемо розбивку проміжку $[0,T)$ за допомогою Δ_i, визначених таким чином:

$$\Delta_i := (p+\mu)\omega^{p+\mu}\eta^{-(p+\mu)}(i+L)^{-(p+\mu+1)}, \quad i=1,2,..., \tag{2.17}$$

де параметри ω, μ, p з (2.15), η та L будуть визначені пізніше. Спочатку, необхідно гарантувати нерівність:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i = T \Rightarrow T = (p+\mu)\omega^{p+\mu}\eta^{-(p+\mu)}\sum_{i=1}^{\infty}(i+L)^{-(p+\mu+1)} := \\ := (p+\mu)\omega^{p+\mu}\eta^{-(p+\mu)}\sigma(L,p+\mu),\end{gathered} \tag{2.18}$$

що може розглядатись як деяке співвідношення між вільними параметрами η та L. Тепер зафіксуємо сталі $\gamma>0$, $\nu>0$ достатньо велике значення $L_0>0$ такі, що:

$$\theta_0 := (1+\gamma)\left(\frac{1+L_0}{L_0}\right)^{\frac{p+\mu+1}{p+1}}\exp\left[-\frac{L_0}{(1+\nu)(1+L_0))}\right] < 1, \tag{2.19}$$

пізніше будемо вважати, що параметр L з (2.18) задовольняє умові:

$$L \geqslant L_0. \tag{2.20}$$

Зазначимо, що в силу монотонності функції $\sigma(\cdot,p+\mu)$ достатньою умовою для ω, що гарантує виконання співвідношення (2.18), є така:

$$\omega \geqslant \tilde{\omega} = \left(\frac{T}{(p+\mu)\sigma(L_0,p+\mu)}\right)^{\frac{1}{p+\mu}}\eta. \tag{2.21}$$

Це означає, що для будь-якого ω з (2.21) існує значення $L=L(\omega)\geqslant L_0$ таке, що виконується співвідношення (2.18). В силу умови

$$\int_{j-1}^{j}\frac{ds}{s^{p+\mu+1}} > j^{-(p+\mu+1)} > \int_{j}^{j+1}\frac{ds}{s^{p+\mu+1}}$$

виконується нерівність:

$$\omega^{p+\mu}\eta^{-(p+\mu)}(j+L+1)^{-(p+\mu)} < T-t_j := \sum_{i=j+1}^{\infty}\Delta_i < \omega^{p+\mu}\eta^{-(p+\mu)}(j+L)^{-(p+\mu)}.$$

Ці співвідношення призводять до

$$\exp\big(\eta(j+L)\big) \leqslant \exp\left(\omega(T-t_j)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \leqslant e^{\eta}\exp\big(\eta(j+L)\big) \tag{2.22}$$

і, більш того,

$$\Delta_j = (p+\mu)\omega^{p+\mu}\eta^{-(p+\mu)}\big((j+L)^{-1}\big)^{(p+\mu+1)} \geqslant$$
$$\geqslant (p+\mu)\omega^{p+\mu}\eta^{-(p+\mu)}\omega^{-(p+\mu+1)}\eta^{p+\mu+1}(T-t_j)^{\frac{p+\mu+1}{p+\mu}} = (p+\mu)\omega^{-1}\eta(T-t_j)^{\frac{p+\mu+1}{p+\mu}}. \tag{2.23}$$

Аналогічно,

$$\Delta_j \leqslant (p+\mu)\omega^{-1}\eta(T-t_j)^{\frac{p+\mu+1}{p+\mu}}(1+\xi_j),$$

де $\xi_j = \left(1-\frac{1}{j+L+1}\right)^{-(p+\mu+1)} - 1 \to 0$ при $j \to \infty$.

Тепер пошарові функції $E_j(s)$, $h_j(s)$ з (2.11) повністю визначені. Застосовуючи лему 2.1 та враховуючи умову $p=q$, маємо систему диференціальних нерівностей:

$$E_j(s) \leqslant C_1 h_{j-1}(s) + C_2\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}E_j(s)\right), \quad j=1,2,..., \tag{2.24}$$

$$h_j(s) \leqslant (1+\gamma)h_{j-1}(s) + C_3\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}E_j(s)\right), \quad j=1,2,... \tag{2.25}$$

для майже всіх $s \in (0, s_\Omega)$, $\forall\gamma : 0 < \gamma < 1$. Тепер підставимо значення $\gamma = \gamma_0 = 2^{-1}$ у (2.25) і додамо отриману нерівність до (2.24). У результаті матимемо

$$h_j(s) + E_j(s) \leqslant \overline{C}_1 h_{j-1}(s) + \overline{C}_2\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}E_j(s)\right), \tag{2.26}$$

де $\overline{C}_1 = C_1 + \frac{3}{2}$, $\overline{C}_2 = C_2 + 2^{p+1}C_3$.

Тепер реалізуємо детальний аналіз асимптотичної поведінки рівнянь системи (2.24), (2.25), (2.26), що задовольняють відповідним початковим умовам.

Лема 2.2. Нехай сталі $\nu > 0$, $L_0 > 0$, $\gamma > 0$ задовольняють (2.19) і, як наслідок, маємо співвідношення:

$$\lambda_0 := (1+\gamma)^{-1}\theta_0\left(\frac{L_0}{1+L_0}\right)^{\frac{p+\mu+1}{p+1}} = \exp\left[-\frac{L_0}{(1+\nu)(1+L_0))}\right] < 1. \tag{2.27}$$

Припустимо, що послідовність $\{\Delta_i\}$ визначається через (2.17), (2.18) і нехай виконуються співвідношення (2.20), (2.21). Нехай деяка нескінчена послідовність невід'ємних незростаючих абсолютно неперервних функцій $E_j(s)$ задовольняє звичайну диференціальну нерівність (2.24) для майже всіх $s \in (0, s_\Omega)$, де послідовність невід'ємних незростаючих функцій $h_j(s)$ задовольняє нерівність (2.25). Нехай виконана початкова умова:

$$E_j(0) \leqslant G \exp\big(\eta(j+L+1)\big) \quad \forall j \in N,\ \eta > \ln \lambda_0^{-1},\ G = \mathrm{const} \geqslant 1. \qquad (2.28)$$

Тоді функції $\{E_j(s)\}$ задовольняють таку оцінку:

$$\begin{aligned} &E_j(s) \leqslant K_5 G \exp\big(\ln \lambda_0^{-1}(j+L)\big) U_\omega(s), \quad \forall j \in N,\ \forall s \in (0, s_\Omega), \\ &\text{де } U_\omega(s) = \exp\Big(K_6 \gamma^{-\frac{1}{\mu}} \eta^{-\frac{p+\mu}{\mu}} \big(\eta - \ln \lambda_0^{-1}\big)^{\frac{p+\mu+1}{\mu}} \omega^{\frac{p+\mu}{\mu}} s^{-\frac{p+1}{\mu}}\Big), \end{aligned} \qquad (2.29)$$

сталі $K_5, K_6 < \infty$ не залежать від G, η, ω, γ, $K_7 > 0$ не залежить від ω, G; $s' := \min(s_\Omega, s_\omega)$, $s_\omega = K_7 \omega^{\frac{p+\mu}{p+1}}$.

Доведення. Введемо до розгляду послідовність вагових функцій $\{A_i(s)\}$, $\{H_i(s)\}$, що пов'язані з $\{E_i(s)\}$, $\{h_i(s)\}$ таким чином:

$$A_j(s) := \lambda_0^{j+L} E_j(s), \quad H_j(s) := \lambda_0^{j+L} h_j(s) \quad \forall j \in N,\ H_0(s) = \lambda_0^L h_0(s), \qquad (2.30)$$

де λ_0 з (2.27). Відповідно до цих функцій система (2.24), (2.25) призведе до:

$$A_j(s) \leqslant C_1 \lambda_0 H_{j-1}(s) + C_2 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \left(-\frac{d}{ds} A_j(s) \right) \quad j = 1, 2, ..., \qquad (2.31)$$

$$H_j(s) \leqslant \lambda_1 H_{j-1}(s) + C_3 \gamma^{-\frac{1}{p+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \left(-\frac{d}{ds} A_j(s) \right) \quad \forall j \in N,\ \text{for a.a. } s \in (0, s_\Omega), \qquad (2.32)$$

де $\lambda_1 := (1+\gamma)\lambda_0$. З (2.27) випливає, що $\lambda_1 = \theta_0 \Big(\frac{L_0}{1+L_0}\Big)^{\frac{p+\mu+1}{p+1}} < 1$. Тепер оцінимо перший член правої частини (2.31), використовуючи (2.32) з індексом j замість $(j-1)$. Після j таких ітерацій прийдемо до такого співвідношення:

$$A_j(s) \leqslant C_1 (1+\gamma)^{-1} \lambda_1^j H_0(s) + \overline{C}_3 \gamma^{-\frac{1}{p+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \sum_{i=1}^{j} \lambda_1^{j-i} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_j} \right)^{\frac{1}{p+1}} \big(-A_i'(s) \big), \qquad (2.33)$$

де $\overline{C}_3 = \max\{C_2\gamma^{\frac{1}{p+1}}, \lambda_0 C_1 C_3\}$. Тепер відповідно до енергетичних функцій:

$$U_j(s) := \sum_{i=1}^{j} \lambda_1^{j-i} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_j}\right)^{\frac{1}{p+1}} A_i(s), \quad j = 1, 2, ...,$$

співвідношення (2.33) приводить до нерівності:

$$\begin{aligned} &U_j(s) \leqslant C_1(1+\gamma)^{-1}\lambda_1^j H_0(s) + \theta_j U_{j-1}(s) + \overline{C}_3\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\big(-U_j'(s)\big), \\ &j = 1, 2, ..., \ H_0(s) = \lambda_0^L h_0(s). \end{aligned} \tag{2.34}$$

В силу (2.17), (2.20), (2.27) та (2.19) можна отримати:

$$\begin{aligned} \theta_j = \lambda_1 \left(\frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}\right)^{\frac{1}{p+1}} &= (1+\gamma)\lambda_0 \left(\frac{j+L}{j+L-1}\right)^{\frac{p+\mu+1}{p+1}} \leqslant \\ &\leqslant (1+\gamma)\lambda_0 \left(\frac{1+L_0}{L_0}\right)^{\frac{p+\mu+1}{p+1}} = \theta_0 < 1. \end{aligned}$$

З (2.28), (2.30) та (2.23) отримаємо оцінку:

$$\begin{aligned} &U_j(0) = \sum_{i=1}^{j} \lambda_1^{j-i} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_j}\right)^{\frac{1}{p+1}} \lambda_0^{i+L} G e^{\eta} \exp\big(\eta(j+L)\big) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{j} ((1+\gamma)\lambda_0)^{j-i} \left(\frac{j+L}{i+L}\right)^{\frac{p+\mu+1}{p+1}} \lambda_0^{i+L} G e^{\eta} \exp\big(\eta(j+L)\big) \leqslant \\ &\leqslant G e^{\eta} \sum_{i=1}^{j} \theta_0^{j-i} \exp\big[(\eta - \ln\lambda_0^{-1})(i+L)\big] \leqslant \\ &\leqslant G e^{\eta}(1-\theta_0)^{-1} \exp\big[(\eta - \ln\lambda_0^{-1})(j+L)\big] \quad \forall j \in N. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Крім того, з (2.17) випливає, що $(j+L) = (p+\mu)^{\frac{1}{p+\mu+1}} \omega^{\frac{p+\mu}{p+\mu+1}} \eta^{-\frac{p+\mu}{p+\mu+1}} \Delta_j^{-\frac{1}{p+\mu+1}}$ $\forall\, j \in N$. Тому оцінка (2.35) приводить до:

$$U_j(0) \leqslant G e^{\eta}(1-\theta_0)^{-1} \exp\big[(p+\mu)^{\frac{1}{p+\mu+1}} \omega^{\frac{p+\mu}{p+\mu+1}} \eta^{-\frac{p+\mu}{p+\mu+1}} (\eta - \ln\lambda_0^{-1}) \Delta_j^{-\frac{1}{p+\mu+1}}\big]. \tag{2.36}$$

Оскільки $C_1(1+\gamma)^{-1}\lambda_1^j \leqslant C_1(1+\gamma)^{-1}\lambda_1 = C_1\lambda_0$, то з (2.34), (2.36) для всіх $j \in N$ випливає:

$$\begin{aligned} &\overline{U}_j(s) := U_j(s) - \frac{C_1\lambda_0}{1-\theta_0} H_0(s) \leqslant \theta_0 \overline{U}_{j-1}(s) + \overline{C}_3 \gamma^{-\frac{1}{p+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \big(-\overline{U}_j'(s)\big), \\ &\overline{U}_j(0) \leqslant \frac{G e^{\eta}}{1-\theta_0} \exp\big[(p+\mu)^{\frac{1}{p+\mu+1}} \omega^{\frac{p+\mu}{p+\mu+1}} \eta^{-\frac{p+\mu}{p+\mu+1}} (\eta - \ln\lambda_0^{-1}) \Delta_j^{-\frac{1}{p+\mu+1}}\big]. \end{aligned}$$

Перепишемо останню систему таким чином:

$$\begin{aligned} &\tilde{U}_j(s) := G^{-1}e^{-\eta}(1-\theta_0)\overline{U}_j(s) \leqslant \theta_0\tilde{U}_{j-1}(s) + (1-\theta_0)m_j\big(-\tilde{U}_j'(s)\big), \\ &\tilde{U}_j(0) \leqslant \exp M_j \quad \forall j \in N, \end{aligned} \tag{2.37}$$

де $m_j = (1-\theta_0)^{-1}\overline{C}_3\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}$, $M_j = (p+\mu)^{\frac{1}{p+\mu+1}}\eta^{-\frac{p+\mu}{p+\mu+1}}\big(\eta-\ln\lambda_0^{-1}\big)\omega^{\frac{p+\mu}{p+\mu+1}}\Delta_j^{-\frac{1}{p+\mu+1}}$. В силу лем 9.2.7, 9.2.8 з [68] та зі співвідношення (2.37) випливає рівномірна оцінка:

$$\tilde{U}_j(s) \leqslant U(s) := \exp\left(B_1\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}s^{-\frac{p+1}{\mu}}\right) \quad \forall\, s \in (0, s_\Omega),\ \forall j \in N, \tag{2.38}$$

де $B_1 = C_4\gamma^{-\frac{1}{\mu}}\eta^{-\frac{p+\mu}{\mu}}\left(\eta - \ln\lambda_0^{-1}\right)^{\frac{p+\mu+1}{\mu}}$, $C_4 = \frac{\mu(p+\mu)^{\frac{1}{\mu}}(p+1)^{\frac{p+1}{\mu}}\overline{C}_3^{\frac{p+1}{\mu}}}{(p+\mu+1)^{\frac{p+\mu+1}{\mu}}(1-\theta_0)^{\frac{p+1}{\mu}}}$. З означень (2.30), (2.28) випливає, що:

$$\begin{aligned} E_j(s) &= \lambda_0^{-(j+L)}A_j(s) \leqslant \lambda_0^{-(j+L)}U_j(s) \leqslant \lambda_0^{-(j+L)}\left(\frac{\tilde{U}_j(s)Ge^{\eta}}{1-\theta_0} + \frac{C_1\lambda_0H_0(s)}{1-\theta_0}\right) \leqslant \\ &\leqslant (1-\theta_0)^{-1}\lambda_0^{-(j+L)}\Big(Ge^{\eta}\exp\big[B_1\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}s^{-\frac{p+1}{\mu}}\big] + C_1\lambda_0H_0(s)\Big) \leqslant \\ &\leqslant C_5G\lambda_0^{-(j+L)}\exp\big[B_1\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}s^{-\frac{p+1}{\mu}}\big] \quad \forall s : 0 < s < s',\ C_5 = 2(1-\theta_0)^{-1}e^{\eta} \end{aligned} \tag{2.39}$$

де $s' = \min(s_\Omega, s_\omega)$, а s_ω визначається співвідношенням:

$$B_1\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}s^{-\frac{p+1}{\mu}} \geqslant B_2 := \ln C_1 + \ln\lambda_0 + \ln H_0(0)$$
$$\forall s : 0 < s \leqslant s_\omega = B_1^{\frac{\mu}{p+1}}B_2^{-\frac{\mu}{p+1}}\omega^{\frac{p+\mu}{p+1}}.$$

Таким чином, оцінка (2.29) доведена з $K_5 = C_5$, $K_6 = C_4$, $K_7 = B_1^{\frac{\mu}{p+1}}B_2^{-\frac{\mu}{p+1}}$

Лема 2.3. В умовах теореми 2.5 існують такі сталі $s' > 0$, $\rho \in (0,1)$, α_3, $\alpha_4 > 0$, що виконується така оцінка для параметризованих енергетичних функцій:

$$E(t,s) \leqslant \alpha_3(T-t)^{-\alpha_4}D(s) \quad \forall\, t < T, \forall\, s \in (0, (1-\rho)s'),$$

де $D(s) = \exp\left(C_8\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}s^{-\frac{p+1}{\mu}}\right)$, $C_8 = const > 0$.

Доведення. Нехай u розв'язок рівняння (2.1) з класу $U_{u_0,F}$, а сімейства підобластей $\Omega(s)$ визначені в (2.9). Нехай $\{E_j(s)\}$, $\{h_j(s)\}$ — сімейства енергетичних функцій з (2.11), що пов'язані з розв'язком u та визначаються послідовністю $\{\Delta_j\}$ з (2.17). Нехай також параметр η, визначений співвідношенням (2.17), задовольняє нерівність:

$$\eta > \ln \lambda_0^{-1} = \frac{L_0}{(1+\nu)(1+L_0)}, \tag{2.40}$$

де L_0, ν з (2.27), і нехай виконується нерівність (2.21). Тоді задовольняється система (2.24), (2.25). Більш того, в силу умови (2.15) та властивості (2.22) маємо:

$$E(t_j) \leqslant \exp\left(\omega(T-t_j)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \leqslant \exp(\eta(j+L+1)) \quad \forall j \in N$$

і тоді

$$E_j(0) \leqslant \exp(\eta(j+L+1)) \quad \forall j \in N. \tag{2.41}$$

Отже, в силу леми 2.2 енергетичні функції $\{E_j(s)\}$, $j = 1, 2, ...$, задовольняють оцінку (2.29) зі значеннями $G = 1$, $K_5 = C_5$ із (2.39), $K_6 = C_4$ із (2.38), а саме

$$E_j(s) \leqslant C_5 \exp(\ln \lambda_0^{-1}(j+L)) U_\omega(s) \quad \forall j \in N,\ \forall s : 0 < s < s' = \min(s_\Omega, s_\omega). \tag{2.42}$$

Зафіксуємо довільне значення $s_1 : 0 < s_1 < s'$ і перепишемо нерівність (2.42) у вигляді:

$$E_j(s_1) \leqslant C_5 G_1 \lambda_0^{-(j+L)} \quad \forall j \in N, \quad G_1 := U_\omega(s_1). \tag{2.43}$$

Сумуючи оцінки (2.43), отримаємо

$$E(t_j, s_1) := \int_0^{t_j} \int_{\Omega(s_1)} |\nabla_x u(t,x)|^{p+1} dx dt \leqslant C_6 G_1 \lambda_0^{-(j+L)}$$
$$\forall j \in N,\ C_6 = C_5(1-\lambda_0)^{-1}. \tag{2.44}$$

В силу (2.22) і (2.27) оцінка (2.44) приводить до:

$$E(t_j, s_1) \leqslant C_6 G_1 \exp\left(\ln \lambda_0^{-1} \eta^{-1} \omega (T-t_j)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) =$$
$$= C_6 G_1 \exp\left(\frac{L_0}{(1+\nu)(1+L_0)\eta} \omega (T-t_j)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) = C_6 G_1 \exp\left(\omega_1 (T-t_j)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right), \tag{2.45}$$

де в силу (2.40) отримаємо:

$$\omega_1 = \zeta\omega, \quad \zeta = \eta^{-1} \ln \lambda_0^{-1} < 1. \tag{2.46}$$

Нарешті, з (2.45) слідує, що з урахуванням (2.43) виконується нерівність:

$$E(t, s_1) \leqslant C_7 G_1 \exp\left(\omega_1 (T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall t < T,\ C_7 = C_6 \lambda_0^{-1}. \tag{2.47}$$

Оцінка (2.47) є фінальним результатом першої ітерації алгоритму. Починаємо другу ітерацію. Припустимо, що стала ω_1 із (2.46) задовольняє умову (2.21), а саме:

$$\omega_1 \geqslant \tilde{\omega} = \left(\frac{T}{(p+\mu)\sigma(L_0, p+\mu)}\right)^{\frac{1}{p+\mu}} \eta.$$

Тепер введемо нову послідовність зсувів $\{\Delta_j^{(1)}\}$:

$$\Delta_j^{(1)} := (p+\mu)\omega_1^{p+\mu} \eta^{-(p+\mu)} (j+L)^{-(p+\mu+1)}, \quad j = 1, 2, \dots .$$

Очевидно, що виконується аналог співвідношення (2.22), а саме:

$$\exp\big(\eta(j+L)\big) \leqslant \exp\left(\omega_1 (T - t_j^{(1)})^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \leqslant e^{\eta} \exp\big(\eta(j+L)\big), \tag{2.48}$$

і, як наслідок,

$$\Delta_j^{(1)} \geqslant (p+\mu)\omega_1^{-1} \eta (T - t_j^{(1)})^{\frac{p+\mu+1}{p+\mu}} \quad \forall j \in N,$$
$$\Delta_j^{(1)} \leqslant (p+\mu)\omega_1^{-1} \eta (T - t_j^{(1)})^{\frac{p+\mu+1}{p+\mu}} (1+\xi_j),$$

де $\xi_j \to 0$ при $j \to \infty$. Послідовністю $\Delta_j^{(1)}$ визначаються нові пошарові функції $E_j^{(1)}(s)$ та $h_j^{(1)}(s)$ для всіх $s > s_1$ Очевидно, що ці функції задовольняють аналог співвідношень (2.24), (2.25).

$$E_j^{(1)}(s) \leqslant C_1 h_{j-1}^{(1)}(s) + C_2\big(\Delta_j^{(1)}\big)^{\frac{1}{p+1}}\bigg(-\frac{d}{ds}E_j^{(1)}(s)\bigg), \tag{2.49}$$

$$h_j^{(1)}(s) \leqslant (1+\gamma)h_{j-1}^{(1)}(s) + C_3\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\big(\Delta_j^{(1)}\big)^{\frac{1}{p+1}}\bigg(-\frac{d}{ds}E_j^{(1)}(s)\bigg)$$

для майже всіх $s \in (s_1, s_\Omega)$ і для всіх $j \in N$. В силу (2.48) виконується оцінка (2.47):

$$E_j^{(1)}(s_1) \leqslant C_7 G_1 \exp\big(\eta(j+L+1)\big) \quad \forall j \in N. \tag{2.50}$$

Тоді в силу леми 2.2 зі співвідношень (2.49)–(2.50) випливає оцінка:

$$E_j^{(1)}(s) \leqslant C_5 C_7 G_1 \exp\big(\ln\lambda_0^{-1}(j+L)\big)U_{\omega_1}(s-s_1) \quad \forall\, s \in (s_1, s'), \forall\, j \in N.$$

Зокрема, для $s = s_1 + s_2 < s'$ маємо:

$$E_j^{(1)}(s_1+s_2) \leqslant C_5 C_7 G_1 \exp\big(\ln\lambda_0^{-1}(j+L)\big)U_{\omega_1}(s_2) := C_5 C_7 G_1 G_2 \lambda_0^{-(j+L)} \quad \forall j \in N, \tag{2.51}$$

де $G_2 = U_{\omega_1}(s_2)$. Сумуючи оцінки (2.51), отримаємо:

$$E(t_j^{(1)}, s_1+s_2) \leqslant C_6 C_7 G_1 G_2 \lambda_0^{-(j+L)} \quad \forall j \in N. \tag{2.52}$$

В силу (2.48) оцінка (2.52) приводить до:

$$\begin{aligned} E(t, s_1+s_2) &\leqslant C_7^2 G_1 G_2 \exp\big(\ln\lambda_0^{-1}\eta^{-1}\omega_1(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\big) = \\ &= C_7^2 G_1 G_2 \exp\big(\omega_2(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\big)\forall t < T, \omega_2 = \zeta\omega_1, \text{ де } \zeta = \ln\lambda_0^{-1}\eta^{-1} < 1. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Оцінка (2.53) є фінальною оцінкою другої ітерації алгоритма. Очевидно, що можна реалізувати l таких ітерацій, де l визначається через:

$$\omega_l \geqslant \tilde\omega, \quad \tilde\omega \text{ з (2.21)}, \ \omega_{l+1} < \tilde\omega. \tag{2.54}$$

Отримаємо результат:

$$E\Big(t, \sum_{i=1}^{l} s_i\Big) \leqslant C_7^l \prod_{i=1}^{l} G_i \exp\big(\omega_l (T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\big) \quad \forall t < T, \sum_{i=1}^{l} s_i \leqslant s'. \tag{2.55}$$

Більш того, ми маємо:

$$\prod_{i=1}^{l} G_i = \prod_{i=1}^{l} U_{\omega_{i-1}}(s_i) = \exp\Big[C_4\gamma^{-\frac{1}{\mu}}\eta^{-\frac{p+\mu}{\mu}}d^{\frac{p+\mu+1}{\mu}}\sum_{i=1}^{l}\omega_{i-1}^{\frac{p+\mu}{\mu}}s_i^{-\frac{p+1}{\mu}}\Big] =$$
$$= \exp\Big[C_4\gamma^{-\frac{1}{\mu}}\eta^{-\frac{p+\mu}{\mu}}d^{\frac{p+\mu+1}{\mu}}\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}s_1^{-\frac{p+1}{\mu}}\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\omega_{i-1}}{\omega}\right)^{\frac{p+\mu}{\mu}}\left(\frac{s_1}{s_i}\right)^{\frac{p+1}{\mu}}\Big], \tag{2.56}$$

$\omega_0 := \omega, d = \eta - \ln\lambda_0^{-1} > 0.$

Очевидно, що $\frac{\omega_{i-1}}{\omega} = \zeta^{i-1}$, де $\zeta = \frac{\ln\lambda_0^{-1}}{\ln\lambda_0^{-1}+d} < 1$. Визначимо s_i таким співвідношенням:

$$s_i := s_1\rho^{i-1} \quad \forall i \geqslant 1,$$

де $\rho = const < 1$ буде визначено далі. Тоді

$$\left(\frac{\omega_{i-1}}{\omega}\right)^{\frac{p+\mu}{\mu}}\left(\frac{s_1}{s_i}\right)^{\frac{p+1}{\mu}} = \zeta^{\frac{(i-1)(p+\mu)}{\mu}}\rho^{-\frac{(i-1)(p+1)}{\mu}} = \left(\frac{\zeta^{p+\mu}}{\rho^{p+1}}\right)^{\frac{i-1}{\mu}}.$$

Визначимо тепер ρ таким чином:

$$\rho^{p+1} = \frac{1+\zeta^{p+\mu}}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho := \left(2^{-1}(1+\zeta^{p+\mu})\right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Тоді

$$\left(\frac{\zeta^{p+\mu}}{\rho^{p+1}}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{2\zeta^{p+\mu}}{1+\zeta^{p+\mu}}\right)^{\frac{1}{\mu}} := æ = \mathrm{const} < 1$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\omega_{i-1}}{\omega}\right)^{\frac{p+\mu}{\mu}}\left(\frac{s_1}{s_i}\right)^{\frac{p+1}{\mu}} = \sum_{i=1}^{l} æ^{i-1} < \frac{1}{1-æ}.$$

До того ж,

$$\sum_{i=1}^{l} s_i = s_1\sum_{i=1}^{l}\rho^{i-1} < s_1\frac{1}{1-\rho} := S^{(\infty)}. \tag{2.57}$$

Тому, з (2.56) випливає:

$$\prod_{i=1}^{l} G_i \leqslant \exp\left[C_4\gamma^{-\frac{1}{\mu}}\eta^{-\frac{p+\mu}{\mu}}d^{\frac{p+\mu+1}{\mu}}\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}s_1^{-\frac{p+1}{\mu}}(1-æ)^{-1}\right] := G^{(\infty)}(s_1). \tag{2.58}$$

Тепер в силу (2.57), (2.58) та оцінки (2.55) виконується така нерівність для довільного $s_1 : (1-\rho)^{-1}s_1 < s'$:

$$E\Big(t, \frac{s_1}{1-\rho}\Big) \leqslant C_7^l \exp\big(\omega_l (T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\big) \exp\Big[C_4 \gamma^{-\frac{1}{\mu}} \eta^{-\frac{p+\mu}{\mu}} d^{\frac{p+\mu+1}{\mu}} (1-æ)^{-1} \omega^{\frac{p+\mu}{\mu}} s_1^{-\frac{p+1}{\mu}}\Big],$$

що означає

$$E(t,s) \leqslant C_7^l \exp\big(\omega_l (T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\big) \exp[C_8 \omega^{\frac{p+\mu}{\mu}} s^{-\frac{p+1}{\mu}}] \quad \forall t < T,\ \forall s < (1-\rho)s', \tag{2.59}$$

де $C_8 = C_4 \gamma^{-\frac{1}{\mu}} \eta^{-\frac{p+\mu}{\mu}} d^{\frac{p+\mu+1}{\mu}} (1-æ)^{-1} (1-\rho)^{-\frac{p+1}{\mu}}$, $d = \eta - \ln \lambda_0^{-1}$. Звичайно, у випадку, коли початкова умова (2.21) не задовольняється, отримуємо $l = 0$ і ми маємо розпочинати доведення теореми 2.5 з наступного кроку. Для цього кроку доведення необхідно мати верхню оцінку функцій $h_j(s)$ для $s > 0$, $j \in N$, що є аналогом оцінки (2.42) для $E_j(s)$. Тож, ми повертаємось до співвідношення (2.26). В силу абсолютної неперервності $h_j(s)$ та з (2.26) випливає співвідношення:

$$\widetilde{E}_j(s) := h_j(s) + E_j(s) \leqslant \overline{C}_1 h_{j-1}(s) + \overline{C}_2 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \Big(-\frac{d}{ds} \widetilde{E}_j(s)\Big) \quad \forall j \in N \tag{2.60}$$

для майже всіх $s \in (0, s_\Omega)$. В силу умови (2.15) функції $\widetilde{E}_j(s)$ задовольняють аналог початкової умови (2.41)

$$\widetilde{E}_j(0) \leqslant \exp(\eta(j+L+1)) \quad \forall j \in N. \tag{2.61}$$

Очевидно, що виконується співвідношення, яке є аналогом (2.25):

$$h_j(s) \leqslant (1+\gamma) h_{j-1}(s) + C_3 \gamma^{-\frac{1}{p+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \Big(-\frac{d}{ds} \widetilde{E}_j(s)\Big) \quad \forall j \in N. \tag{2.62}$$

Повторюючи усі кроки доведення теореми 2.5 та використовуючи співвідношення (2.60), (2.62), (2.61) замість (2.24), (2.25), (2.41), отримаємо аналог оцінки (2.55):

$$\widetilde{E}\Big(t, \sum_{i=1}^{l} s_i\Big) := \widetilde{h}\Big(t, \sum_{i=1}^{l} s_i\Big) + E\Big(t, \sum_{i=1}^{l} s_i\Big) \leqslant C_7^l \prod_{i=1}^{l} G_i \exp\big(\omega_l (T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\big), \tag{2.63}$$

де

$$\widetilde{h}(t,s) := \sup_{0\leqslant\tau<t}\int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{p+1}dx.$$

Таким чином, зважаючи на співвідношення (2.54), ми не можемо прямо використовувати оцінку (2.55) (або (2.63)) як початкову умову для $(l+1)$-го кроку ітерацій. Тому застосуємо деякий додатковий підхід. А саме, в силу (2.54) матимемо

$$\omega_{l+1} = \omega\zeta^{l+1} < \tilde{\omega} := \left(\frac{T}{(p+\mu)\sigma(L_0,p+\mu)}\right)^{\frac{1}{p+\mu}}\eta.$$

Тому можна визначити значення $t_0^{(l)} > 0$ за допомогою співвідношення:

$$\begin{gathered}\omega_{l+1} = \omega\zeta^{l+1} = \left(\frac{T-t_0^{(l)}}{(p+\mu)\sigma(L_0,p+\mu)}\right)^{\frac{1}{p+\mu}}\eta \quad \Leftrightarrow \\ \omega_l\left(T-t_0^{(l)}\right)^{-\frac{1}{p+\mu}} = \frac{\eta}{\zeta\left((p+\mu)\sigma(L_0,p+\mu)\right)^{\frac{1}{p+\mu}}} := \Lambda_1.\end{gathered} \tag{2.64}$$

Тепер оцінка (2.63) може бути записана таким чином:

$$\widetilde{E}\left(t,S^{(l)}\right) \leqslant \begin{cases} C_7^l\prod_{i=1}^l G_i \exp\left(\omega_l(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right), & \forall t\in(t_0^{(l)},T); \\ C_7^l\prod_{i=1}^l G_i\exp\Lambda_1, & \forall t\in(0,t_0^{(l)}] \end{cases} \tag{2.65}$$

де $S^{(l)} = \sum_{i=1}^l s_i$. Тож, оцінка (2.65) є фінальною оцінкою розв'язку $u(t,x)$ в області $\{(t,x) : 0 < t \leqslant t_0^{(l)}, |x| > S^{(l)}\}$. Для дослідження розв'язку u в області $\{(t,x) : t_0^{(l)} < t < T, |x| > S^{(l)}\}$ введемо нові енергетичні функції:

$$\widetilde{h}^{(l)}(t,s) := \sup_{t_0^{(l)}<\tau<t}\int_{\Omega(s)}|u(\tau,x)|^{p+1}dx,\ E^{(l)}(t,s) := \int_{t_0^{(l)}}^t\int_{\Omega(s)}|\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1}dxd\tau$$

для всіх $s \geqslant S^{(l)}$ та $t > t_0^{(l)}$. Тепер введемо нові зсуви $\{\Delta_j^{(l)}\}$, $j = 1,2,...,$ подібні до (2.17), а саме

$$\Delta_j^{(l)} := (p+\mu)\omega_l^{p+\mu}\eta^{-(p+\mu)}(j+L)^{-(p+\mu+1)}, \quad j=1,2,..., \tag{2.66}$$

$$t_j^{(l)} = t_{j-1}^{(l)} + \Delta_j^{(l)}, \quad j=1,2,..., \quad t_0^{(l)} \text{ з (2.64).}$$

Тепер умова (2.18) прийме форму:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i^{(l)} = T - t_0^{(l)} = (p+\mu)\eta^{-(p+\mu)}\omega_l^{(p+\mu)}\sigma(L, p+\mu). \tag{2.67}$$

Легко бачити, що означення (2.64) для $t_0^{(l)}$ гарантує виконання (2.67) з деяким значенням $L > L_0$, визначеним рівнянням:

$$\zeta\sigma(L_0, p+\mu)^{\frac{1}{p+\mu}} = \sigma(L, p+\mu)^{\frac{1}{p+\mu}}.$$

Введемо тепер енергетичні функції $h_j^{(l)}(s)$, $E_j^{(l)}(s)$, $j = 1, 2, ...$, пов'язані із зсувами $\{\Delta_j^{(l)}\}$ з (2.66). Очевидно, що ці функції задовольняють систему диференціальних нерівностей. подібну до (2.24), (2.25), (2.26), а саме:

$$E_j^{(l)}(s) \leqslant C_1 h_{j-1}^{(l)}(s) + C_2\big(\Delta_j^{(l)}\big)^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}E_j^{(l)}(s)\right) \quad \forall\, s \in (S^{(l)}, s'),$$

$$h_j^{(l)}(s) \leqslant (1+\gamma)h_{j-1}^{(l)}(s) + C_3\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\big(\Delta_j^{(l)}\big)^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}E_j^{(l)}(s)\right) \quad \forall\, s \in (S^{(l)}, s'),$$

$$h_j^{(l)}(s) + E_j^{(l)}(s) \leqslant \overline{C}_1 h_{j-1}^{(l)}(s) + \overline{C}_2\big(\Delta_j^{(l)}\big)^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}E_j^{(l)}(s)\right) \quad \forall\, j \in N, \tag{2.68}$$

Більш того, легко бачити, що в силу (2.65) функції задовольняють початкові умови:

$$h_j^{(l)}(S^{(l)}) + E_j^{(l)}(S^{(l)}) \leqslant C_7^l G^{(l)} \exp\big(\eta(j+L+1)\big) \quad \forall j \in N, \tag{2.69}$$

де $G^{(l)} = \prod_{i=1}^{l} G_i$. Застосовуючи лему 2.2 до системи (2.68), (2.69), отримаємо оцінку:

$$E_j^{(l)}(S^{(l)}+s) \leqslant C_5 C_7^l G^{(l)} \exp\big(\ln\lambda_0^{-1}(j+L)\big)U_{\omega_l}(s) \quad \forall j \in N, \ \ \forall\, s : s + S^{(l)} < s',$$

що приводить до:

$$E_j^{(l)}(S^{(l+1)}) \leqslant C_5 C_7^l G^{(l+1)} \exp\big(\ln\lambda_0^{-1}(j+L)\big).$$

Сумуючи ці оцінки, отримаємо:

$$E(t_i^{(l)}, S^{(l+1)}) - E(t_0^{(l)}, S^{(l+1)}) \leqslant C_6 C_7^l G^{(l+1)} \exp\big(\ln \lambda_0^{-1}(i+L)\big) \quad \forall i \in N,$$

і використовуючи (2.66), аналогічно отримаємо (2.52), (2.53):

$$E\big(t, S^{(l+1)}\big) \leqslant \begin{cases} C_7^{l+1} G^{(l+1)} \exp\big(\omega_{l+1}(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\big) + E(t_0^{(l)}, S^{(l+1)}), & \forall t \in (t_0^{(l)}, T); \\ E(t_0^{(l)}, S^{(l+1)}), & \forall t \in (0, t_0^{(l)}]. \end{cases} \tag{2.70}$$

Використовуючи (2.65), оцінимо член $E(t_0^{(l)}, S^{(l+1)})$:

$$E(t_0^{(l)}, S^{(l+1)}) \leqslant E(t_0^{(l)}, S^{(l)}) \leqslant C_7^l G^{(l)} \exp\big(\omega_l (T - t_0^{(l)})^{-\frac{1}{p+\mu}}\big).$$

Тоді

$$C_7^{l+1} G^{(l+1)} \exp\big(\omega_{l+1}(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\big) + E(t_0^{(l)}, S^{(l+1)}) \leqslant \\ \leqslant C_7^{l+1} G^{(l+1)} \exp\big(\omega_{l+1}(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\big)(1 + \varepsilon_l(t)),$$

де

$$\varepsilon_l(t) = C_7^{-1}\big(U_{\omega_l}(s_{l+1})\big)^{-1} \exp\Big[\omega_l(T - t_0^{(l)})^{-\frac{1}{p+\mu}} - \omega_{l+1}(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\Big] \leqslant \\ C_7^{-1} \exp\Big[(\omega_l - \omega_{l+1})(T - t_0^{(l)})^{-\frac{1}{p+\mu}}\Big] = C_7^{-1} \exp\Big[(1-\zeta)\omega_l (T - t_0^{(l)})^{-\frac{1}{p+\mu}}\Big] = \\ (\text{в силу (2.64)}) = C_7^{-1} \exp\Big[(1-\zeta)\Lambda_1\Big] =: C_7^{-1} c_\zeta \quad \forall t \in (t_0^{(l)}, T). \tag{2.71}$$

Тоді оцінка (2.70) призводить до:

$$E\big(t, S^{(l+1)}\big) \leqslant \begin{cases} C_9 C_7^{l+1} G^{(l+1)} \exp\big(\omega_{l+1}(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\big), & \forall t \in (t_0^{(l)}, T); \\ C_7^l G^{(l)} \exp\big(\omega_l (T - t_0^{(l)})^{-\frac{1}{p+\mu}}\big), & \forall t \in (0, t_0^{(l)}], \end{cases} \tag{2.72}$$

де $C_9 = 1 + C_7^{-1} c_\zeta$. Оцінка (2.72) є стартовою для наступного кроку нової ітерації процесу. Введемо нове початкове значення $t_0^{(l+1)}$ за допомогою співвідношення, аналогічного до (2.64):

$$\omega_{l+1}\big(T - t_0^{(l+1)}\big)^{-\frac{1}{p+\mu}} = \Lambda_1.$$

Тоді, повторюючи всі розрахунки, починаючи з означення (2.64) і до оцінки (2.70), отримуємо:

$$E\big(t, S^{(l+2)}\big) \leqslant \begin{cases} C_9 C_7^{l+2} G^{(l+2)} \exp\left(\omega_{l+2}(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) + \\ \qquad\qquad + E\big(t_0^{(l+1)}, S^{(l+2)}\big), & \forall t \in (t_0^{(l+1)}, T); \\ E\big(t_0^{(l+1)}, S^{(l+2)}\big), & \forall t \in (0, t_0^{(l+1)}], \end{cases} \tag{2.73}$$

Член $E\big(t_0^{(l+1)}, S^{(l+2)}\big)$ оцінимо, користуючись (2.72):

$$E\big(t_0^{(l+1)}, S^{(l+2)}\big) \leqslant E\big(t_0^{(l+1)}, S^{(l+1)}\big) \leqslant C_9 C_7^{l+1} G^{(l+1)} \exp\left(\omega_{l+1}(T - t_0^{(l+1)})^{-\frac{1}{p+\mu}}\right).$$

Тепер, використовуючи додаткові оцінки, подібні до (2.71), отримаємо з (2.73) таке співвідношення:

$$E\big(t, S^{(l+2)}\big) \leqslant \begin{cases} C_9^2 C_7^{l+2} G^{(l+2)} \exp\left(\omega_{l+2}(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right), & \forall t \in (t_0^{(l+1)}, T); \\ C_9 C_7^{l+1} G^{(l+1)} \exp\left(\omega_{l+1}(T - t_0^{(l+1)})^{-\frac{1}{p+\mu}}\right), & \forall t \in (0, t_0^{(l+1)}]. \end{cases}$$

Здійснивши k таких кроків ітерацій, прийдемо до

$$E\big(t, S^{(l+k)}\big) \leqslant \begin{cases} C_9^k C_7^{l+k} G^{(l+k)} \exp\left(\omega_{l+k}(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right), & \forall t \in (t_0^{(l+k)}, T); \\ C_9^{k-1} (C_7 G)^{l+k-1} \exp\left(\omega_{l+k-1}(T - t_0^{(l+k-1)})^{-\frac{1}{p+\mu}}\right), & \forall t \in (0, t_0^{(l+k-1)}], \end{cases} \tag{2.74}$$

де $t_0^{(l+k)}$ визначається через співвідношення

$$\omega_{l+k}\big(T - t_0^{(l+k)}\big)^{-\frac{1}{p+\mu}} = \Lambda_1 \quad \forall k \in N,\ \Lambda_1 \text{ is from (2.64)}.$$

Тепер необхідно визначити кількість ітерацій k. Це число залежить від t, а саме, $k = k(t)$ визначається таким чином:

$$
\begin{aligned}
&\omega\zeta^{l+k}\big(T-t\big)^{-\frac{1}{p+\mu}} \geqslant \Lambda_1,\ \omega\zeta^{l+k+1}\big(T-t\big)^{-\frac{1}{p+\mu}} < \Lambda_1 \Rightarrow\\
&\omega\zeta^{l+k}\big(T-t\big)^{-\frac{1}{p+\mu}} = (1+\xi_0)\Lambda_1,\ \xi_0 \leqslant \zeta^{-1}-1 \Rightarrow\\
&l+k = \alpha_1 + \alpha_2 \ln(T-t)^{-1}, \quad \alpha_1 = l_1\ln\omega + l_2,\ l_1 = \big(\ln\zeta^{-1}\big)^{-1},\\
&l_2 = \frac{\ln\Lambda_1^{-1} + \ln(1+\xi_0)^{-1}}{\ln\zeta^{-1}}, \quad \alpha_2 = \big((p+\mu)\ln\zeta^{-1}\big)^{-1},
\end{aligned} \tag{2.75}
$$

де Λ_1 з (2.64). Тоді, в силу (2.75) оцінка (2.74) призводить до

$$
\begin{aligned}
&E\big(t, S^{(l+k(t))}\big) \leqslant (C_9C_7)^{l+k}G^{(l+k)}\exp\big(\omega_{l+k}(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\big) \leqslant\\
&\leqslant (C_9C_7)^{\alpha_1+\alpha_2\ln(T-t)^{-1}}G^{(\infty)}(s_1)\exp\big(\Lambda_1(1+\xi_0)\big) \leqslant \alpha_3(T-t)^{-\alpha_4}G^{\infty}(s_1),\\
&\alpha_3 = l_3\omega^{l_4},\ l_3 = \exp\big((1+\xi_0)\Lambda_1\big)(C_7C_9)^{l_2},\ l_4 = l_1\ln(C_7C_9).
\end{aligned} \tag{2.76}
$$

Використовуючи (2.57), (2.58), з (2.76) отримаємо нерівність:

$$
E\big(t, S^{(\infty)}\big) := E(t, s_1(1-\rho)^{-1}) \leqslant E\big(t, S^{(l+k(t))}\big) \leqslant \alpha_3(T-t)^{-\alpha_4}G^{(\infty)}(s_1), \tag{2.77}
$$

що призводить до

$$
E(t,s) \leqslant \alpha_3(T-t)^{-\alpha_4}G^{(\infty)}(s(1-\rho)) = \alpha_3(T-t)^{-\alpha_4}D(s) \qquad \forall t < T,\ \forall\, s \in (0,(1-\rho)s'), \tag{2.78}
$$

де $D(s) = \exp\Big(C_8\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}s^{-\frac{p+1}{\mu}}\Big)$, C_8 з (2.59).

Доведення теореми 2.5.

Будемо стартувати з глобальної експоненціальної оцінки (2.15) розв'язку u та отриманої покращеної степеневої оцінки (2.78) розв'язку у довільній строго внутрішній підобласті $\Omega(s)$. Тепер, стартуючи з цієї останньої нерівності, отримаємо точну оцінку зверху для розв'язку u в $\Omega(s)$. Зафіксуємо довільне значення $\bar{s} \in (0,(1-\rho)s')$ та введемо нову функцію:

$$
v(t,x) := D(\bar{s})^{-\frac{1}{p+1}}u(t,x) \quad \forall (t,x) \in (0,T)\times\Omega(\bar{s}),
$$

де u — розв'язок, що досліджується. Визначимо

$$\begin{aligned}
&\overline{E}(t,s) := \int_0^t \int_{\Omega(s)} |\nabla_x v(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau = D(\bar{s})^{-1} E(t,s),\\
&\overline{h}(t,s) := \sup_{0<\tau<t} \int_{\Omega(s)} |v(\tau,x)|^{p+1} dx = D(\bar{s})^{-1} h(t,s) \quad \forall s > \bar{s},\ \forall t < T,
\end{aligned} \tag{2.79}$$

де $E(t,s), h(t,s)$ — енергетичні функції визначені в (2.10). Визначимо $\{\overline{E}_j(s)\}$, $\{\overline{h}_j(s)\}$ як сімейства енергетичних функцій, пов'язаних з функцією з (2.79) та зі зсувами $\{\Delta_j\}$. Очевидно, що ці функції задовольняють аналоги співвідношень (2.24)–(2.26), а саме,

$$\overline{E}_j(s) \leqslant C_1 \overline{h}_{j-1}(s) + C_2 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \left(-\frac{d}{ds} \overline{E}_j(s) \right), \quad j = 1, 2, ...,$$

$$\overline{h}_j(s) \leqslant (1+\gamma) \overline{h}_{j-1}(s) + C_3 \gamma^{-\frac{1}{p+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \left(-\frac{d}{ds} \overline{E}_j(s) \right),$$

$$\overline{h}_j(s) + \overline{E}_j(s) \leqslant \overline{C}_1 \overline{h}_{j-1}(s) + \overline{C}_2 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \left(-\frac{d}{ds} \overline{E}_j(s) \right) \quad \forall\, s \in (\bar{s}, (1-\rho)s').$$

Більш того, в силу (2.77) виконується "початкова"умова:

$$\overline{E}_j(\bar{s}) \leqslant \overline{E}(t_j, \bar{s}) \leqslant \alpha_3 (T - t_j)^{-\alpha_4} \quad \forall j \geqslant 1,$$

Без втрати загальності можемо покласти, що $\alpha_4 > (p+1)^{-1}$. Тоді введемо додатні числа β, ξ:

$$\beta > \alpha_4, \quad 0 < \xi < 1: \ \theta_0 := (1+\gamma) \xi^{\alpha_4 - \frac{1}{p+1}} < 1. \tag{2.80}$$

В силу монотонності функції $\overline{E}(T,s)$ можемо знайти таке значення $\bar{\bar{s}} = \bar{\bar{s}}(\bar{s}) > \bar{s}$, щоб виконувалась нерівність:

$$\overline{E}(T,s) > 2\alpha_3 T^{-\alpha_4} \xi^{-\beta} \ \ \forall s \in [\bar{s}, \bar{\bar{s}}]. \tag{2.81}$$

Дійсно, якщо таке значення $\bar{\bar{s}} > \bar{s}$ не існує, то для значення $s = \bar{s}$ виконується нерівність $E(T, \bar{s}) \leqslant 2\alpha_3 T^{-\alpha_4} \xi^{-\beta} D(\bar{s})$ та судження теореми 2.5 з

$c_1 = 2\alpha_3 T^{-\alpha_4}\xi^{-\beta}$ та $c_2 = C_8$. Тепер ми маємо продовжити доведення теореми 2.5 тільки якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\bar{s} = \bar{s}(\varepsilon)$ таке, що

$$E(T, \bar{s}) > 2\alpha_3 T^{-\alpha_4}\xi^{-\beta} D(\bar{s}), \quad \bar{s} = \bar{s}(\varepsilon) \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

Очевидно, що для такого значення $\bar{s}$ існує $\bar{\bar{s}} > \bar{s}$, що задовольняє (2.81). Тепер введемо сімейство неперервних функцій

$$\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot) : [0, t'] \to [t_1, T] \quad \forall \tilde{s} \in (\bar{s}, \bar{\bar{s}}]$$

за допомогою співвідношення:

$$\Big(\Gamma_{\tilde{s}}(t) - t\Big)^{-\beta} = \frac{\xi^\beta}{\alpha_3 T^{\beta-\alpha_4}}\Big(\overline{E}(\Gamma_{\tilde{s}}(t), \tilde{s}) - \overline{E}(t, \tilde{s})\Big). \tag{2.82}$$

Значення $t_1 = t_1(\tilde{s}) = \Gamma_{\tilde{s}}(0)$ визначається рівністю:

$$t_1^{-\beta} = \frac{\xi^\beta}{\alpha_3 T^{\beta-\alpha_4}}\overline{E}(t_1, \tilde{s}), \tag{2.83}$$

та t' визначається співвідношенням:

$$(T - t')^{-\beta} = \frac{\xi^\beta}{\alpha_3 T^{\beta-\alpha_4}}\Big(\overline{E}(T, \tilde{s}) - \overline{E}(t', \tilde{s})\Big). \tag{2.84}$$

В силу означення (2.83), умови (2.80) і властивості(2.81) маємо

$$\overline{E}(t_1, \tilde{s}) t_1^\beta = \frac{\alpha_3 T^{\beta-\alpha_4}}{\xi^\beta} < 2^{-1}\overline{E}(T, \tilde{s}) T^\beta \quad \forall \tilde{s} \in (\bar{s}, \bar{\bar{s}}]. \tag{2.85}$$

Зі строгої монотонності функції $\varphi(t) := \overline{E}(t, \tilde{s}) t^\beta$ випливає, що $t_1(\tilde{s}) < T$ $\forall \tilde{s} \in (\bar{s}, \bar{\bar{s}}]$. Відмітимо, що означення (2.84) приводить до

$$t' < T, \text{ якщо } \sup_{t \to T} \overline{E}(t, \tilde{s}) < \infty, \tag{2.86}$$

$$t' = T, \text{ якщо } \sup_{t \to T} \overline{E}(t, \tilde{s}) = \infty. \tag{2.87}$$

Тепер можна заключити, що функція $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$ визначає строго монотонну зростаючу послідовність $\{t_j\}$ таким співвідношенням:

$$t_j := \Gamma_{\tilde{s}}(t_{j-1}), \quad j = 1, 2, ..., \ t_0 = 0. \tag{2.88}$$

Більш того, ця послідовність є нескінченою та $t_j \to T$ при $j \to \infty$ у випадку (2.87). У випадку (2.86) ця послідовність є скінченою та існує такий номер j_0, що

$$t_{j_0} = \Gamma_{\tilde{s}}(t_{j_0-1}) > t', \quad t_{j_0-1} \leqslant t'.$$

Тепер введемо нові зсуви $\{\Delta_j\} = \{\Delta_j(\tilde{s})\}$ для системи (2.24), (2.25), а саме,

$$\Delta_j = \Delta_j(\tilde{s}) = t_j - t_{j-1}, \quad \{t_j\} \text{ з } (2.88). \tag{2.89}$$

В силу означення (2.82) функції $\Gamma_{\tilde{s}}(t)$ і оцінки (2.77) (а отже (2.78)) виконуються нерівності:

$$\Delta_j^{-\beta} = \frac{\xi^\beta}{\alpha_3 T^{\beta-\alpha_4}}\big(\overline{E}(t_j,\tilde{s}) - \overline{E}(t_{j-1},\tilde{s}))\big) \leqslant \\ \leqslant \frac{\xi^\beta \alpha_3 (T-t_j)^{-\alpha_4}}{\alpha_3 T^{\beta-\alpha_4}} \leqslant \xi^\beta T^{\alpha_4-\beta}(T-t_j)^{-\alpha_4} \quad \forall j \in N.$$

Тоді

$$\Delta_j = \Delta_j(\tilde{s}) \geqslant \xi^{-1} T^{1-\frac{\alpha_4}{\beta}} (T-t_j)^{\frac{\alpha_4}{\beta}} = \xi^{-1} T^{1-\frac{\alpha_4}{\beta}} \left(\frac{(T-t_j)}{T}\right)^{\frac{\alpha_4}{\beta}} T^{\frac{\alpha_4}{\beta}} \geqslant \\ \geqslant \xi^{-1} T \left(\frac{(T-t_j)}{T}\right) \geqslant \xi^{-1}\Delta_{j+1} \quad \forall j \in N, \forall\, \tilde{s} \in (\bar{s}, \bar{\bar{s}}). \tag{2.90}$$

Визначимо тепер енергетичні функції $\overline{E}_j(s)$, $\overline{h}_j(s)$ у відповідності до зсувів (2.89). Ці функції задовольняють систему (2.24), (2.25) для майже всіх $s \in (\tilde{s}, s')$. Тепер введемо нові енергетичні функції $\overline{A}_j(s)$, $\overline{H}_j(s)$ за допомогою співвідношень:

$$\overline{A}_j(s) := \Delta_j(\tilde{s})^{\alpha_4}\overline{E}_j(s),\ \overline{H}_j(s) := \Delta_j(\tilde{s})^{\alpha_4}\overline{h}_j(s) \quad \forall s > \tilde{s},\ j \in N. \tag{2.91}$$

Очевидно, що ці функції задовольняють представленим далі нерівностям для майже всіх $s \in (\tilde{s}, s')$:

$$\overline{A}_j(s) \leqslant C_1\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_4}\overline{H}_{j-1}(s) + C_2\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}\overline{A}_j(s)\right) \quad \forall j \in N, \\ \overline{H}_i(s) \leqslant \lambda_i \overline{H}_{i-1}(s) + C_3\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\Delta_i^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}\overline{A}_i(s)\right) \quad \forall i \in N, \tag{2.92}$$

де $\lambda_i = (1+\gamma)\Big(\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}\Big)^{\alpha_4}$. Легко перевірити, що

$$\lambda_j \lambda_{j-1} ... \lambda_{i+1} \Delta_i^{\frac{1}{p+1}} = (1+\gamma)^{j-i} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_4 - \frac{1}{p+1}}. \tag{2.93}$$

Використовуючи співвідношення (2.93) та ітеруючи систему (2.92), отримаємо нерівності:

$$\overline{A}_j(s) \leqslant C_1 (1+\gamma)^{j-1} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_0}\right)^{\alpha_4} \overline{H}_0(s) +$$
$$+ \overline{C}_3 \gamma^{-\frac{1}{p+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \left(\sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_4 - \frac{1}{p+1}} \big(- \overline{A}_i'(s) \big) \right) \quad \forall s \in (\tilde{s}, s'),$$

де $\overline{C}_3 = \max\{C_2 \gamma^{\frac{1}{p+1}}, (1+\gamma)^{-1} C_1 C_3\}$, $\overline{H}_0(s) = \Delta_0^{\alpha_4} \overline{h}_0(s)$, $\Delta_0 = \xi^{-1}\Delta_1$. Тепер введемо ще одне сімейство енергетичних функцій:

$$U_j(s) := \sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_4 - \frac{1}{p+1}} \overline{A}_i(s), \quad j = 1, 2, ..., \ \forall s > \tilde{s}.$$

Легко переконатись, що ці функції задовольняють співвідношення:

$$U_j(s) - \overline{A}_j(s) = \theta^{(j)} U_{j-1}(s), \quad j = 1, 2, ..., \tag{2.94}$$

де в силу (2.90) $\theta^{(j)} := (1+\gamma)\big(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\big)^{\alpha_4 - \frac{1}{p+1}} \leqslant (1+\gamma)\xi^{\alpha_4 - \frac{1}{p+1}} = \theta_0$ з θ_0 із (2.80). Використовуючи (2.80), отримаємо з (2.94):

$$U_j(s) \leqslant C_1 T^{\alpha_4} \bar{\lambda}^{j-1} \overline{h}_0(s) + \theta_0 U_{j-1}(s) + \overline{C}_3 \gamma^{-\frac{1}{p+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} (-U_j'(s)) \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, s'), \tag{2.95}$$

де $\bar{\lambda} = (1+\gamma)\xi^{\alpha_4} < 1$. Оцінимо тепер "початкове" значення $U_j(\tilde{s})$ функції

$U_j(s)$. В силу означення (2.89) та (2.82) отримаємо:

$$U_j(\tilde{s}) = \sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_4 - \frac{1}{p+1}} {\Delta_i}^{\alpha_4} \overline{E}_i(\tilde{s}) =$$
$$= \alpha_3 T^{\beta-\alpha_4} \xi^{-\beta} \sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_4 - \frac{1}{p+1}} {\Delta_i}^{-\beta} {\Delta_i}^{\alpha_4} = \tag{2.96}$$
$$= \alpha_3 T^{\beta-\alpha_4} \xi^{-\beta} {\Delta_j}^{-(\beta-\alpha_4)} \sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\beta - \frac{1}{p+1}} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_3 (1-\theta_0)^{-1} T^{\beta-\alpha_4} \xi^{-\beta} {\Delta_j}^{-(\beta-\alpha_4)}.$$

Легко перевірити, що функції $\overline{U}_j(s) := U_j(s) - (1-\theta_0)^{-1} C_1 T^{\alpha_4} \overline{h}_0(\tilde{s})$ задовольняють звичайній диференціальній нерівності (2.95) для майже всіх $s \in (\tilde{s}, s')$:

$$\overline{U}_j(s) \leqslant \theta_0 \overline{U}_{j-1}(s) + \overline{C}_3 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} (-\overline{U}'_j(s)).$$

Більш того, функції $\overline{U}_j(s)$ задовольняють "початковій"умові (2.96):

$$\overline{U}_j(\tilde{s}) \leqslant \alpha_3 (1-\theta_0)^{-1} T^{\beta-\alpha_4} \xi^{-\beta} {\Delta_j}^{-(\beta-\alpha_4)}.$$

Тоді, в силу леми 2.5 функції $\overline{U}_j(s)$ задовольняють таку рівномірну за $j \in N$ оцінку:

$$\overline{U}_j(s) \leqslant \alpha_3 C_{10} \overline{U}(s-\tilde{s}) \quad \forall s \in (\tilde{s}, s'),\ j = 1, 2, ..., \tag{2.97}$$

де $C_{10} = (1-\theta_0)^{-1} T^{\beta-\alpha_4} \xi^{-\beta} \left(\overline{C}_3 (\beta-\alpha_4)(p+1) e^{-1} (1-\theta_0)^{-1}\right)^{(\beta-\alpha_4)(p+1)}$, $\overline{U}(s) := s^{-(\beta-\alpha_4)(p+1)}$ і, отже:

$$U_j(s) \leqslant C_{11} + \alpha_3 C_{10} \overline{U}(s-\tilde{s}) \quad \forall s \in (\tilde{s}, s'), \tag{2.98}$$

де $C_{11} = (1-\theta_0)^{-1} C_1 T^{\alpha_4} h_0(\tilde{s})$. Визначимо значення $s^{(1)} > 0$ співвідношенням:

$$\overline{U}(s) \geqslant \alpha_3^{-1} C_{11} C_{10}^{-1} \quad \forall s \leqslant s^{(1)} \quad \Rightarrow \quad s^{(1)} = \left(\alpha_3 C_{10} C_{11}^{-1}\right)^{\frac{1}{(\beta-\alpha_4)(p+1)}}.$$

Тоді, з (2.98) випливає, що:

$\overline{A}_j(s) \leqslant U_j(s) \leqslant 2\alpha_3 C_{10} \overline{U}(s-\tilde{s}) \quad \forall s \in (\tilde{s}, s''),\ s'' = \min(s', s^{(1)} + \tilde{s}),\ j = 1, 2, ...,$

що приводить в силу (2.91) та (2.82) до:

$$\overline{E}_j(s) \leqslant 2\alpha_3 C_{10}\overline{U}(s-\tilde{s})\big(\Delta_j(\tilde{s})\big)^{-\alpha_4} \quad \forall \tilde{s} \in (\bar{s}, \bar{\bar{s}}],\ \forall s \in (\tilde{s}, s''), \tag{2.99}$$

Тепер просумуємо нерівності (2.99) з $j = 1$ до $j = i$. Використовуючи властивість (2.90), отримаємо:

$$\overline{E}(t_i, s) \leqslant 2\alpha_3 C_{10}\overline{U}(s-\tilde{s})\sum_{j=1}^{i}\Delta_j^{-\alpha_4} \leqslant 2\alpha_3 C_{10}\overline{U}(s-\tilde{s})\Delta_i^{-\alpha_4}(1-\xi^{\alpha_4})^{-1}.$$

Використовуючи додатково означення (2.82), (2.89), ми матимемо з останньої нерівності:

$$\overline{E}(t_i, s) \leqslant C_{12}\alpha_3^{\frac{\beta-\alpha_4}{\beta}}\overline{U}(s-\tilde{s})\overline{E}_i(\tilde{s})^{\frac{\alpha_4}{\beta}}, \quad C_{12} = 2(1-\xi^{\alpha_4})^{-1}C_{10}\xi^{\alpha_4}T^{-\frac{(\beta-\alpha_4)\alpha_4}{\beta}}\alpha_3^{-\frac{\alpha_4}{\beta}},$$

і, як наслідок,

$$\overline{E}(t_i, s) \leqslant C_{12}\alpha_3^{\frac{\beta-\alpha_4}{\beta}}\overline{U}(s-\tilde{s})\overline{E}(t_i, \tilde{s})^{\frac{\alpha_4}{\beta}} \quad \forall \tilde{s} \in (\bar{s}, s^{(3)}),\ \forall s \in (\tilde{s}, s'''),\ i = 1, 2, \ldots\ , \tag{2.100}$$

де $s''' = \min(s', s^{(1)}) = \min(s^{(1)}, s_\Omega, s_\omega) \leqslant s''$, $s^{(3)} = \min(\bar{\bar{s}}, s''') = \min(\bar{\bar{s}}, s^{(1)}, s_\Omega, s_\omega)$. Тепер ми маємо отримати співвідношення типу (2.100) не тільки для $t = t_i(\tilde{s})$, $i = 1, 2, ...$, але й для довільного $t < T$. Спочатку розглянемо значення t_1, яке визначається за співвідношенням (2.83) як функція $t_1 = t_1(\tilde{s})$. В силу монотонного зростання енергетичної функції $E(t, s)$ за змінною t та монотонного спадання за s, означення (2.83) гарантує, що $t_1(\tilde{s})$ є монотонно зростаючою функцією. Більш того, з (2.85) випливає, що

$$t_1(\tilde{s}) < T \quad \forall \tilde{s} \in (\bar{s}, s^{(3)}), \tag{2.101}$$

де $s^{(3)}$ з (2.100). Для довільного $\tilde{s}$ з (2.101) покладемо, що $\{t_i\} = \{t_i(\tilde{s})\}$ є послідовністю, визначеною у (2.88). Легко бачити, що функція $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$, визначена у (2.82), відображає відрізок $[t_{i-1}(\tilde{s}), t_i(\tilde{s})]$ у $[t_i(\tilde{s}), t_{i+1}(\tilde{s})]$ неперервно, монотонно та бієктивно для всіх $i \geqslant 1$ у випадку (2.87) та для всіх $i : 1 \leqslant i \leqslant j_0 - 1$

у випадку (2.86). Більш того, у випадку (2.86) вона також бієктивно відображає відрізок $[t_{j_0-1}, \Gamma_{\tilde{s}}^{-1}(t')]$ у $[t_{j_0}, T]$. Нехай тепер t — довільна точка з інтервалу $(t_1(\tilde{s}), T)$. Для визначеності можемо вважати, що $t \in (t_{k-1}, t_k)$ з деяким $k \in N$ у випадку (2.87) або $t \in (t_{k-1}, t_k)$ з деяким $k \leqslant j_0$ або $t \in (t_{j_0}, T)$ у випадку (2.86). В силу бієктивності відображення $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$ можемо реконструювати скінчену послідовність $\{\bar{t}_i(\tilde{s})\}$ таким чином:

$$\bar{t}_i := \Gamma_{\tilde{s}}^{-1}(\bar{t}_{i+1}),\ \ i = k, k-1, \dots, 0,\ \text{where}\ \bar{t}_{k+1} := t,\ \bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1}),\ \bar{t}_0 \in (0, t_1(\tilde{s})).$$

Звідси отримуємо послідовність зсувів $\bar{\Delta}_j(\tilde{s})$:

$$\bar{\Delta}_j^{-\beta} := (\bar{t}_j - \bar{t}_{j-1})^{-\beta} = \frac{\xi^\beta T^{\alpha_4-\beta}}{\alpha_3}\Big(\overline{E}(\bar{t}_j, \tilde{s}) - \overline{E}(\bar{t}_{j-1}, \tilde{s})\Big).$$

Як це зроблено вище у (2.90), покажемо, що ці зсуви задовольняють нерівність $\bar{\Delta}_{j+1} < \xi\bar{\Delta}_j\ \forall j \leqslant k$. Відповідно до цих зсувів введемо нові енергетичні функції $\overline{E}_j^{(1)}(s)$, $\overline{h}_j^{(1)}(s)$. Повторюючи для цих функцій усі кроки обчислень, починаючи з оцінки (2.78) і до співвідношення (2.100), отримаємо:

$$\overline{E}(\bar{t}_i, s) - \overline{E}(\bar{t}_0, s) \leqslant C_{12}\alpha_3^{\frac{\beta-\alpha_4}{\beta}}\overline{U}(s-\tilde{s})\overline{E}(\bar{t}_i, \tilde{s})^{\frac{\alpha_4}{\beta}}, \quad \forall i \leqslant k+1,$$

і, як наслідок, для $i = k+1$ маємо:

$$\overline{E}(t, s) - \overline{E}(\bar{t}_0, s) \leqslant C_{12}\alpha_3^{\frac{\beta-\alpha_4}{\beta}}\overline{U}(s-\tilde{s})\overline{E}(t, \tilde{s})^{\frac{\alpha_4}{\beta}} \quad \forall\, \tilde{s} \in (\bar{s}, s^{(3)}), \forall s \in (\tilde{s}, s'''). \tag{2.102}$$

Відмітимо, що точка t в останній нерівності є довільною $t < T$. Оскільки $\bar{t}_0(\tilde{s}) < t_1(\tilde{s})$, то, сумуючи нерівності (2.100) за $i = 1$ та нерівність (2.102), отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} &\overline{E}(t, s) \leqslant \overline{E}(t, s) - \overline{E}(\bar{t}_0(\tilde{s}), s) + \overline{E}(t_1(\tilde{s}), s) \leqslant C_{12}\alpha_3^{\frac{\beta-\alpha_4}{\beta}}\overline{U}(s-\tilde{s})\times \\ &\times \left(\overline{E}(t, \tilde{s})^{\frac{\alpha_4}{\beta}} + \overline{E}(t_1(\tilde{s}), \tilde{s})^{\frac{\alpha_4}{\beta}}\right) < 2C_{12}\alpha_3^{\frac{\beta-\alpha_4}{\beta}}\overline{U}(s-\tilde{s})\overline{E}_(t, \tilde{s})^{\frac{\alpha_4}{\beta}}, \end{aligned} \tag{2.103}$$

Яке справедливе для довільного $t < T$ та довільних $s, \tilde{s} : \bar{s} < \tilde{s} < s \leqslant s^{(3)}$. Введемо нові змінні: $v = s - \bar{s}$, $w = \tilde{s} - \bar{s} > 0$ та зміщені енергетичні функції

$\overline{E}_{\bar{s}}(t,v) := \overline{E}(t,\bar{s}+v)$. Тоді співвідношення (2.103) може бути записано таким чином:

$$\overline{E}_{\bar{s}}(t,v) \leqslant c\overline{U}(v-w)\overline{E}_{\bar{s}}(t,w)^{\frac{\alpha_4}{\beta}} \quad \forall\, 0 < w < v < s^{(3)} - \bar{s},\, \forall\, t < T, \qquad (2.104)$$

з $c = 2C_{12}\alpha_3^{\frac{\beta-\alpha_4}{\beta}}$. В силу леми 2.7 та в силу структури (2.97) функції $\overline{U}(\cdot)$ співвідношення (2.104) приводить до рівномірної за $t < T$ оцінки $\overline{E}_{\bar{s}}(t,v) \leqslant \alpha_3 C_{13} v^{-\beta(p+1)}$ $\forall\, v \leqslant s^{(3)} - \bar{s}$, $\forall\, t < T$, що приводить до:

$$\overline{E}(t,s) \leqslant \alpha_3 C_{13}(s-\bar{s})^{-\beta(p+1)} \quad \forall\, t < T,\, \forall s : \bar{s} < s < s^{(3)}, \qquad (2.105)$$

де $C_{13} := 2^{(p+1)\beta^2} C_{12}^{\frac{\beta}{\beta-\alpha_4}}$. Підставляючи вирази (2.79) для $\overline{E}(t,s)$ та (2.78) для $D(s)$, отримаємо з (2.105):

$$E(t,s) \leqslant \alpha_3 C_{13} f(\bar{s},s) := \alpha_3 C_{13} \exp\left(C_8 \omega^{\frac{p+\mu}{\mu}} \bar{s}^{-\frac{p+1}{\mu}}\right)(s-\bar{s})^{-\beta(p+1)}$$
$$\forall\, s \in (\bar{s}, s^{(3)}), \quad \forall\, \bar{s} < s^{(3)},\, \forall\, t \leqslant T. \quad (2.106)$$

Перепишемо оцінку (2.106) у такій формі:

$$E(t,s) \leqslant \alpha_3 C_{13} \omega^{-\beta(p+\mu)} \varphi(\bar{r},r), \quad r := s\omega^{-\frac{p+\mu}{p+1}},$$
$$\bar{r} := \bar{s}\omega^{-\frac{p+\mu}{p+1}}, \quad \varphi(\bar{r},r) := \exp\left(C_8 \bar{r}^{-\frac{p+1}{\mu}}\right)(r-\bar{r})^{-\beta(p+1)}.$$

Легко бачити, що для допустимого значення s в оцінці (2.106) виконується таке обмеження: $s \leqslant s_\omega = b_1 \omega^{\frac{p+\mu}{p+1}}$, де $b_1 = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^{\frac{\mu}{p+1}}$. Тому $s \leqslant b_1 \omega^{\frac{p+\mu}{p+1}}$ і, отже, $r = s\omega^{-\frac{p+\mu}{p+1}} \leqslant b_1$. Зафіксуємо довільну точку $s < s^{(3)}$. Тоді, відносно точки $\bar{s} = 2^{-1}s$ можливі лише два випадки, а саме,

1) $E(T,\bar{s}) \leqslant 2\alpha_3 T^{-\alpha_4}\xi^{-\beta} D(\bar{s})$,

2) $E(T,\bar{s}) > 2\alpha_3 T^{-\alpha_4}\xi^{-\beta} D(\bar{s})$.

У випадку 1) маємо настпну оцінку:
$E(T,s) \leqslant E(T,\bar{s}) \leqslant 2\alpha_3 T^{-\alpha_4}\xi^{-\beta} \exp\left(2^{\frac{p+1}{\mu}} C_8 \omega^{\frac{p+\mu}{\mu}} s^{-\frac{p+1}{\mu}}\right)$, що відповідає шуканій оцінці (2.16) в точці s.

У випадку 2) також маємо дві можливості, а саме

а) існує $\bar{\bar{s}} = \bar{\bar{s}}(\bar{s}) < s$ таке, що $E(T,\bar{\bar{s}}) = 2\alpha_3 T^{-\alpha_4}\xi^{-\beta} D(\bar{s})$ і $E(T,s') >$

$2\alpha_3 T^{-\alpha_4}\xi^{-\beta}D(\bar{s})\ \forall\, s'\in[\bar{s},\bar{\bar{s}})$,

b) $E(T,s') > 2\alpha_3 T^{-\alpha_4}\xi^{-\beta}D(\bar{s}) \quad \forall\, s'\leqslant s$.

У випадку a) маємо оцінку:

$$E(T,s)\leqslant E(T,\bar{\bar{s}}) = 2\alpha_3 T^{-\alpha_4}\xi^{-\beta}D(\bar{s}) = 2\alpha_3 T^{-\alpha_4}\xi^{-\beta}\exp\big(2^{\frac{p+1}{\mu}}C_8\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}s^{-\frac{p+1}{\mu}}\big), \tag{2.107}$$

що відповідає оцінці для випадку 1). В кінці кінців, у випадку b) виконується оцінка (2.106):

$$\begin{aligned} E(t,s) &\leqslant \alpha_3 C_{13}\omega^{-\beta(p+1)}\exp\big(C_8\bar{r}^{-\frac{p+1}{\mu}}\big)(r-\bar{r})^{-\beta(p+1)} = \\ &= \alpha_3 C_{13}\omega^{-\beta(p+1)}\exp\big(2^{\frac{p+1}{\mu}}C_8 r^{-\frac{p+1}{\mu}}\big)2^{\beta(p+1)}r^{-\beta(p+1)}\leqslant \\ &\leqslant \alpha_3\omega^{-\beta(p+1)}2^{\beta(p+1)}C_{13}\tilde{k}\exp\big(2^{\frac{p+\mu+1}{\mu}}C_8 r^{-\frac{p+1}{\mu}}\big), \end{aligned} \tag{2.108}$$

де $\tilde{k} = \max_{r\leqslant b_1}\frac{r^{-\beta(p+1)}}{\exp\left(2^{\frac{p+\mu+1}{\mu}}C_8 r^{-\frac{p+1}{\mu}}\right)}$. Нарешті об'єднуючи оцінки (2.107), (2.108), матимемо:

$$\begin{gathered} E(t,s)\leqslant E_0(t,s) := C_{15}\exp\big(2^{\frac{p+\mu+1}{\mu}}C_8\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}s^{-\frac{p+1}{\mu}}\big) \\ \forall t\leqslant T,\quad \forall s: 0<s<\min(s_\Omega, s_\omega, s^{(1)}), \\ C_{15} = \alpha_3\big(2T^{-\alpha_4}\xi^{-\beta} + 2^{\beta(p+1)}C_{13}\tilde{k}\omega^{-\beta(p+1)}\big). \end{gathered} \tag{2.109}$$

З урахуванням перерахованих вище значень констант s_Ω, s_ω, $s^{(1)}$, остання оцінка приводить до шуканої оцінки (2.16) для енергетичної функції $E(t,s)$ розв'язку u. Необхідна оцінка для $h(t,s)$ випливає з представлених далі простих обчислень. Зафіксуємо $0<\lambda = const < 1$, $s>0$ і покладемо, що $\xi_{\lambda,s}(r)$ є зрізаючою Ліпшицевою функцією:

$$\begin{gathered} \xi_{\lambda,s}(r) = 0 \quad \text{if } r\leqslant \lambda s, \quad \xi_{\lambda,s}(r) = 1 \quad \text{if } r\geqslant s, \\ \xi_{\lambda,s}(r) = (r-\lambda s)(s(1-\lambda))^{-1} \quad \text{if } \lambda s < r < s. \end{gathered}$$

Тоді, підставляючи функцію $\eta(t,x) = u(t,x)\xi_{\lambda,s}^{\frac{p+1}{p}}(d(x))$ у якості тестової функції в інтегральну тотожність, після стандартних обчислень отримаємо нерівність:

$$\frac{p}{p+1}\int_{\Omega(\lambda s)}|u(t,x)|^{p+1}\xi_{\lambda,s}^{\frac{p+1}{p}}dx+d_0\int_0^t\int_{\Omega(\lambda s)}|\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1}\xi_{\lambda,s}^{\frac{p+1}{p}}dxd\tau\leqslant$$
$$\leqslant d_1\left(\int_0^t\int_{\Omega(\lambda s)\setminus\Omega(s)}|\nabla_x u|^{p+1}dxd\tau\right)^{\frac{p}{p+1}}\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\left(\int_{\Omega(\lambda s)\setminus\Omega(s)}|u(\tau,x)|^{p+1}\xi_{\lambda,s}^{\frac{p+1}{p}}dx\right)^{\frac{1}{p+1}}\times$$
$$\times\, t^{\frac{1}{p+1}}\max_{\Omega(\lambda s)\setminus\Omega(s)}|\nabla\xi_{\lambda,s}(d(x))|+\frac{p}{p+1}\int_{\Omega(\lambda s)}|u(0,x)|^{p+1}\xi_{\lambda,s}^{\frac{p+1}{p}}dx,$$

що, в силу нерівності Юнга, приводить до оцінки:

$$\left(\frac{p}{p+1}-\varepsilon\right)\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\int_{\Omega(\lambda s)}|u(\tau,x)|^{p+1}\xi_{\lambda,s}^{\frac{p+1}{p}}dx\leqslant\frac{p}{p+1}h_0(\lambda s)+$$
$$+\,C(\varepsilon)\left(\frac{d_1T^{\frac{1}{p+1}}}{s(1-\lambda)}\right)^{\frac{p+1}{p}}\int_0^t\int_{\Omega(\lambda s)\setminus\Omega(s)}|\nabla_x u|^{p+1}dxd\tau\quad\forall\, t<T,\,\forall\,\varepsilon>0.$$

В силу (2.109) остання оцінка з $\varepsilon=\frac{p}{2(p+1)}$ приводить до:

$$\frac{p}{2(p+1)}h(t,s)\leqslant\frac{p}{p+1}h_0(\lambda s)+C\left(\frac{p}{2(p+1)}\right)\left(\frac{d_1T^{\frac{1}{p+1}}}{s(1-\lambda)}\right)^{\frac{p+1}{p}}E_0(t,\lambda s).$$

Оптимізуючи отриману оцінку за вільним параметром $\lambda<1$, отримаємо шукану оцінку для $h(t,s)$. Таким чином, теорема 2.5 доведена.

2.4 Пологий граничний режим для рівняння нейтральної дифузії

У цьому підрозділі досліджуються розв'язки задачі (2.1) із класу $U_{u_0,F}$ у випадку, коли $p=q$. Розглядається пологий степеневий граничний режим, а отже згідно з (2.14), розв'язок є обмеженим всередині області Ω при $t\to T$. При цьому на межі все ж має місце сингулярність. Метою дослідження є отримання точної оцінки розв'язку, що описує поведінку біля межі та дає інформацію про залежність поведінки від характеру загострення граничного режиму. Основний результат цього підрозділу представлено у теоремі.

Теорема 2.6. Нехай u — довільний енергетичний розв'язок рівняння (2.1), що належить до класу $U_{u_0,F}$ з функцією F:

$$F(t)=F_\alpha(t):=\omega_0(T-t)^{-\alpha}\quad\forall\, t<T,\tag{2.110}$$

де $\omega_0 > 0$, $\alpha > \frac{1}{p+1}$ — деякі сталі. Тоді існує стала $G < \infty$, що залежить лише від p, n, d_0, d_1, і значення $\hat{s} > 0$ таке, що виконується рівномірна апріорна оцінка:

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant G\omega_0 s^{-\alpha(p+1)} \quad \forall\, t < T,\, \forall\, s \in (0,\hat{s}), \tag{2.111}$$

де $h(t,s)$, $E(t,s)$ — енергетичні функції, що визначені в (2.10).

Доведення.

Із означення (2.10) випливає монотонне спадання і неперервність функції $J_T(s) := E(T,s) + h(T,s)$ по s. Більш того, відомо, (див. наслідок з теореми 6.3.1 у [68] та огляд результатів у 1.3), що в умовах теореми $J_T(s) \to \infty$ при $s \to 0$ і $J_T(s) < \infty\ \forall\, s > 0$. А отже знайдеться таке значення $\bar{s} \in (0, s_\Omega)$, що для всіх s з інтервалу $(0,\bar{s})$ буде виконана конструктивна умова:

$$E(T,s) + h(T,s) > 2\omega_0 T^{-\alpha_1}\xi^{-\alpha}, \tag{2.112}$$

де $\xi \in (0,1)$ буде визначена пізніше, α_1 — довільне значення з проміжку $\left(\frac{1}{p+1}, \alpha\right)$. Тепер зафіксуємо точку $\tilde{s} \in (0,\bar{s}]$. Очевидно, що в цій точці також виконується умова (2.112).

Далі будемо розбивати проміжок $[0,T)$ послідовністю точок $\{t_j\}$ ($j = 1,2,...,$ $t_0 = 0$, $t_j \to T$ при $j \to \infty$) на проміжки $[t_{j-1}, t_j)$ довжиною $\Delta_j := t_j - t_{j-1} > 0$. Цю послідовність $\{t_j\}$ визначимо спеціальним чином, а саме, введемо до розгляду неперервну функцію $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot) : [0,t'] \to [t_1, T]$, яку задамо співвідношенням:

$$\big(\Gamma_{\tilde{s}}(t) - t\big)^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\Big(E(\Gamma_{\tilde{s}}(t),\tilde{s}) - E(t,\tilde{s}) + \sup_{t<\tau<\Gamma_{\tilde{s}}(t)} h(\tau,\tilde{s})\Big). \tag{2.113}$$

Значення $t_1 = t_1(\tilde{s}) = \Gamma_{\tilde{s}}(0)$ и t' визначаються із співвідношень:

$$t_1^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\left(E(t_1,\tilde{s}) + \sup_{0<\tau<t_1} h(\tau,\tilde{s})\right), \tag{2.114}$$

$$(T - t')^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\Big(E(T,\tilde{s}) - E(t',\tilde{s}) + \sup_{t'<\tau<T} h(\tau,\tilde{s})\Big). \tag{2.115}$$

В силу означення (2.114) і оцінки (2.112) маємо

$$\left(E(t_1,\tilde{s}) + \sup_{0<\tau<t_1} h(\tau,\tilde{s})\right) t_1^\alpha = \frac{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}{\xi^\alpha} <$$
$$< \frac{1}{2}\left(E(T,\tilde{s}) + \sup_{0<\tau<T} h(\tau,\tilde{s})\right) T^\alpha \quad \forall \tilde{s} \in (0,\bar{s}].$$

Таким чином, в силу строгої монотонності функції

$R_{\tilde{s}}(t) := (E(t,\tilde{s}) + h(t,\tilde{s}))t^\alpha$ слідує, що $t_1(\tilde{s}) < T$ $\forall \tilde{s} \in (0,\bar{s}]$. Відмітимо також, що з означення (2.115) випливає, що

$$t' < T, \text{ якщо } \sup_{t\to T}(E(t,\tilde{s}) + h(t,\tilde{s})) < \infty, \tag{2.116}$$

$$t' = T, \text{ якщо } \sup_{t\to T}(E(t,\tilde{s}) + h(t,\tilde{s})) = \infty. \tag{2.117}$$

Тож, можемо заключити, що функція $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$ визначає строго монотонну зростаючу послідовність $\{t_j\}$ співвідношенням:

$$t_j := \Gamma_{\tilde{s}}(t_{j-1}), \quad j = 1, 2, ..., \quad t_0 = 0.$$

Більш того, ця послідовність є нескінченою і $t_j \to T$ при $j \to \infty$ у випадку (2.117). У випадку (2.116) послідовність є скінченою та існує число j_0 таке, що

$$t_{j_0} = \Gamma_{\tilde{s}}(t_{j_0-1}) > t', \quad t_{j_0-1} \leqslant t'.$$

Для зручності визначимо значення j_∞ таким чином:

$$j_\infty = \begin{cases} j_0, & \text{для випадку (2.116);} \\ \infty, & \text{для випадку (2.117)} \end{cases}$$

Відмітимо, що при такому визначенні послідовності $\{t_j\}$, зсуви $\Delta_j = \Delta_j(\tilde{s}) = t_j - t_{j-1}$ будуть задаватися таким чином:

$$\Delta_j^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\big(E(t_j,\tilde{s}) - E(t_{j-1},\tilde{s}) + \sup_{t_{j-1}<\tau<t_j} h(\tau,\tilde{s})\big). \tag{2.118}$$

Далі покажемо, що послідовність $\{\Delta_j\}$ є спадною, більш того, доведемо, що $\Delta_{j+1} \leqslant \xi\Delta_j \ \forall\, j \in \mathbb{N}$, де $\xi \in (0,1)$ з (2.113). В силу означення (2.113) функції $\Gamma_{\tilde{s}}(t)$ і оцінки (2.110) маємо нерівність:

$$\Delta_j^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\big(E(t_j,\tilde{s}) - E(t_{j-1},\tilde{s}) + \sup_{t_{j-1}<\tau<t_j} h(\tau,\tilde{s})\big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\xi^\alpha \omega_0 (T-t_j)^{-\alpha}}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \leqslant \xi^\alpha T^{-(\alpha-\alpha_1)}(T-t_j)^{-\alpha} \quad \forall j \leqslant j_\infty.$$

Далі в силу умови $T \geqslant 1$, з формулювання задачі отримуємо:

$$\Delta_j = \Delta_j(\tilde{s}) \geqslant \xi^{-1} T^{1-\frac{\alpha_1}{\alpha}}(T-t_j) \geqslant \xi^{-1}(T-t_j) \geqslant \xi^{-1}\Delta_{j+1} \quad \forall j \leqslant j_\infty.$$

Тобто,

$$\Delta_{j+1} \leqslant \xi\Delta_j \quad \forall\, j \leqslant j_\infty.$$

За сформованою послідовністю $\{t_j\}$ визначимо пошарові енергетичні функції $E_j(s)$ та $h_j(s)$ за допомогою співвідношень (2.11). Очевидно, що для цих функцій має місце лема 2.1, а отже справедлива система (2.12), (2.13). Тепер нашою метою є отримання функціональної нерівності для енергетичних функцій $E(t,s)$, $h(t,s)$, визначених у (2.10). Для цього будемо аналізувати систему (2.12), (2.13). Спочатку введемо вагові енергетичні функції:

$$A_j(s) := \Delta_j^{\alpha_1} E_j(s), \quad H_j(s) := \Delta_j^{\alpha_1} h_j(s). \tag{2.119}$$

Для них стартова система (2.12), (2.13) перепишеться:

$$\begin{aligned} &A_j(s) + H_j(s) \leqslant \overline{C}_1 H_{j-1}(s) + C_2 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}A_j(s)\right), \\ &H_j(s) \leqslant \lambda_j H_{j-1}(s) + C_3 \gamma^{-\frac{1}{p+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}A_j(s)\right) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{2.120}$$

де $\overline{C}_1 = C_1 \xi^{\alpha_1}$, $H_0(s) = \Delta_0^{\alpha_1} h_0(s)$, $\Delta_0 = \xi^{-1}\Delta_1$,

$$\lambda_j := (1+\gamma)\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_1} \leqslant \lambda := (1+\gamma)\xi^{\alpha_1} < 1, \quad j = 1,2,\dots. \tag{2.121}$$

Відмітимо, що (2.121) — перша вимога до вибору сталої ξ. Очевидно, що

$$\lambda_j\lambda_{j-1}...\lambda_{i+1}\Delta_i^{\frac{1}{p+1}} = (1+\gamma)^{j-i}\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}} \quad \forall\, j > i.$$

Враховуючи це, проітеруємо нерівності (2.120). У результаті отримуємо:

$$A_j(s) + H_j(s) \leqslant \overline{C}_1(1+\gamma)^{j-1}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_0}\right)^{\alpha_1} H_0(s) + \overline{C}_3\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\times$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}}\big(-A_j'(s)\big)\right) \quad \forall\, j \leqslant j_\infty, \forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}), \quad (2.122)$$

де $\overline{C}_3 = \max\{C_2\gamma^{\frac{1}{p+1}}, (1+\gamma)^{-1}\overline{C}_1 C_3\}$. Далі будемо зводити отриману систему (2.122) до системи виду (2.166). Для цього введемо нові енергетичні функції таким чином:

$$U_j(s) := \sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}}(A_i(s) + H_i(s)) \quad j = 1, 2, \dots. \qquad (2.123)$$

Очевидні співвідношення:

$$U_j(s) - A_j(s) - H_j(s) = \theta^{(j)}U_{j-1}(s), \quad j = 1, 2, \dots,$$

де

$$\theta^{(j)} := (1+\gamma)\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}} \leqslant \theta_0 := (1+\gamma)\xi^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}} < 1 \qquad (2.124)$$

Умовою (2.124) накладаються більш жорсткі кінцеві вимоги на вибір сталої ξ. Таким чином для нових функцій $U_j(s)$ справедлива система:

$$U_j(s) \leqslant \overline{C}_1\lambda^{j-1}H_0(s) + \theta_0 U_{j-1}(s) + \overline{C}_3\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}(-U_j'(s))$$
$$\forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}) \quad (2.125)$$

Визначимо тепер початкові дані для них. Оцінимо $U_j(\tilde{s})$:

$$
\begin{aligned}
U_j(\tilde{s}) = \sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}}\Delta_i^{\alpha_1}\left(E_i(\tilde{s})+h_i(\tilde{s})\right) = \\
= \omega_0\xi^{-\alpha}T^{\alpha-\alpha_1}\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}}\Delta_i^{-(\alpha-\alpha_1)} = \\
= \omega_0\xi^{-\alpha}T^{\alpha-\alpha_1}\Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)}\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}} \leqslant \\
\leqslant G_1\omega_0\Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)} \quad \forall\, j \leqslant j_\infty, \quad (2.126)
\end{aligned}
$$

де $G_1 = \xi^{-\alpha}T^{\alpha-\alpha_1}(1-\theta_0)^{-1}$. Далі визначимо значення $\bar{b} = \overline{C}_1\lambda\overline{H}_0(s)$ і перепишемо систему (2.125), (2.126) таким чином:

$$
\begin{aligned}
&\overline{U}_j(s) := U_j(s) - \bar{b} \leqslant \theta_0\overline{U}_{j-1}(s) + \overline{C}_3\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}(-\overline{U}_j'(s)), \\
&\overline{U}_j(\tilde{s}) \leqslant G_1\omega_0\Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)},
\end{aligned}
$$

Для аналізу отриманої системи застосуємо лему 2.6. Отримаємо рівномірну оцінку:

$$
\overline{U}_j(s) \leqslant G_2\omega_0\psi(s-\tilde{s}) \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}), \quad \psi(s) := s^{-(\alpha-\alpha_1)(p+1)}
$$

$$
G_2 := \left(\frac{\overline{C}_3(\alpha-\alpha_1)(p+1)}{e(1-\theta_0)}\right)^{(\alpha-\alpha_1)(p+1)} G_1.
$$

Для $U_j(s)$ відповідно маємо оцінку:

$$
U_j(s) \leqslant G_2\omega_0\psi(s-\tilde{s}) + \bar{b} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}), \tag{2.127}
$$

Далі визначимо значення $s_1 > \tilde{s}$ співвідношенням:

$$
\psi(s_1 - \tilde{s}) = G_3^{-1}\omega_0^{-1}\bar{b},
$$

тоді (2.127) перепишеться:

$$
U_j(s) \leqslant 2G_2\,\omega_0\psi(s-\tilde{s}) \quad \forall\, s : \tilde{s} < s < s_2 := \min\{s_1, \bar{s}\}.
$$

Згадуючи означення (2.123) і (2.119), отримуємо оцінку:

$$E_j(s) + h_j(s) \leqslant \Delta_j^{-\alpha_1} U_j(s) \leqslant 2G_2\omega_0\psi(s-\tilde{s})\Delta_j^{-\alpha_1} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_2). \tag{2.128}$$

Тепер отримаємо оцінку для енергетичних функцій $E(t,s)$ і $h(t,s)$. Для цього зафіксуємо значення $i \leqslant j_\infty$ і просумуємо нерівність (2.128) за j від 1 до i. В силу (2.118) отримаємо

$$\begin{aligned} E(t_i, s) + h(t_i, s) &\leqslant 2G_2\omega_0\psi(s-\tilde{s}) \sum_{j=1}^{i} \Delta_j^{-\alpha_1} \leqslant \\ &\leqslant 2G_2\omega_0\psi(s-\tilde{s})\Delta_i^{-\alpha_1} \sum_{j=1}^{i} (\xi^{\alpha_1})^{j-1} \leqslant \frac{2G_2}{1-\xi^{\alpha_1}} \omega_0\psi(s-\tilde{s})\Delta_i^{-\alpha_1} = \\ &= G_3 \omega_0^{\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha}} \psi(s-\tilde{s}) \left(E(t_i,\tilde{s}) + h(t_i,\tilde{s})\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_2), \\ &\text{где } G_3 = 2\xi^{\alpha_1}(1-\xi^{\alpha_1})^{-1} T^{-\frac{(\alpha-\alpha_1)\alpha_1}{\alpha}} G_2. \end{aligned} \tag{2.129}$$

Наступний крок доведення — отримання оцінки типу (2.129) для довільної точки $t < T$. Для цього відмітимо, що функція $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$, визначена у (2.113), неперервно, монотонно та взаємнооднозначно відображає будь-який відрізок $[t_{j-1}, t_j]$ на $[t_j, t_{j+1}]$ $\forall\, j \leqslant j_\infty - 1$. Зафіксуємо точку $\bar{t} \in [t_1, T)$. Нехай для визначеності $\bar{t} := \bar{t}_k \in (t_k, t_{k+1}]$ при деякому $k \leqslant j_\infty - 1$. Тоді єдиним чином відновлюється послідовність $\{\bar{t}_i\}$, $i \leqslant j_\infty$ така, що:

$$\bar{t}_{i+1} = \Gamma_{\tilde{s}}(\bar{t}_i) \quad \forall\, i \leqslant j_\infty, \quad \bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1}], \quad \bar{t}_0 \in (0, t_1].$$

За допомогою цієї послідовності визначаються нові зсуви $\{\overline{\Delta}_i\}$:

$$\overline{\Delta}_i^{-\alpha} := (\bar{t}_i - \bar{t}_{i-1})^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \Big(E(\bar{t}_i, \tilde{s}) - E(\bar{t}_{i-1}, \tilde{s}) + \sup_{\bar{t}_{i-1} < t < \bar{t}_i} h(t, \tilde{s}) \Big).$$

Аналогічно перевіряється, що $\overline{\Delta}_{i+1} \leqslant \xi \overline{\Delta}_i$ $\forall\, i \leqslant j_\infty - 1$. За цими зсувами визначаються відповідні енергетичні функції $\overline{E}_i(s)$ і $\overline{h}_i(s)$. Далі повторюємо процедуру (2.119)–(2.129). Відмінність буде лише в тому, що в якості початкової функції виступає функція $\overline{h}_0(s) := h(\bar{t}_0, s)$. Оцінимо $\overline{H}_0(s)$, використовуючи умову (2.110):

$$\overline{H}_0(s) = (\xi^{-1}\Delta_1)^{\alpha_1}\overline{h}_0(s) \leqslant \xi^{-\alpha_1}\omega_0 \left(\frac{\bar{t}_1 - \bar{t}_0}{T - \bar{t}_0}\right)^{\alpha_1} \leqslant \xi^{-\alpha_1}\omega_0.$$

В результаті отримуємо оцінку типу (2.129):

$$E(\bar{t}_i, s) + h(\bar{t}_i, s) \leqslant G_3\omega_0^{\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha}}\psi(s-\tilde{s})\left(E(\bar{t}_i,\tilde{s}) + h(\bar{t}_i,\tilde{s})\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_3),$$

де G_3 з (2.129), $s_3 := \min\{\bar{s}_1, \bar{s}\}$, де значення $\bar{s}_1$ визначається співвідношенням:

$$\psi(\bar{s}_1 - \tilde{s}) = G_3^{-1}\omega_0^{-1}\bar{\bar{b}}, \text{ где } \bar{\bar{b}} := \overline{C}_1\lambda\overline{H}_0(s).$$

Тепер в силу того, що вибір точки $\bar{t}_k$ був довільним, отримуємо оцінку для всіх $t < T$:

$$E(t, s) + h(t, s) \leqslant G_3\omega_0^{\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha}}(s-\tilde{s})^{-(\alpha-\alpha_1)(p+1)}\left(E(t,\tilde{s}) + h(t,\tilde{s})\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \quad \forall\, t < T, \quad \forall\, s,\, \tilde{s} : 0 < \tilde{s} < s < s_3,$$

Таким чином мы отримаємо функціональну нерівність для енергетичних функцій. Для її аналізу застосуємо лему 2.7. Отримаємо оцінку:

$$E(t, s) + h(t, s) \leqslant 2^{\frac{\alpha^2(p+1)}{\alpha-\alpha_1}} G_3^{\frac{\alpha}{\alpha-\alpha_1}}\omega_0 s^{-\alpha(p+1)} \quad \forall\, t < T, \forall\, s \in (0, s_3).$$

Отримали твердження теореми з $G = 2^{\frac{\alpha^2(p+1)}{\alpha-\alpha_1}} G_3^{\frac{\alpha}{\alpha-\alpha_1}}$, $\hat{s} = s_3$.

2.5 Локалізований степеневий режим для рівняння повільної дифузії

Розглянемо тепер розв'язки задачі (2.1) із класу $U_{u_0,F}$ у випадку, коли $p > q$. Умови локалізації для такої задачі були досліджені у [68] та детально описані у підрозділі 1.3. Нагадаємо, що розв'язок задачі з класу $U_{u_0,F}$ буде обмеженим всюди всередині області Ω при $t \to T$, коли функція F має таку структуру:

$$F(t) := \omega(t) \cdot (T-t)^{-\frac{q+1}{p-q}}, \quad \omega(t) \to 0 \text{ при } t \to T.$$

Метою дослідження є отримання точної оцінки розв'язку та опис залежності поведінки розв'язку від ω. Основний результат цього підрозділу представлено у теоремі.

Теорема 2.7. Нехай u — довільний енергетичний розв'язок рівняння (2.1) з множини $U_{u_0,F}$, де F — це локалізований LS-режим, що визначається таким чином:

$$F(t) = F_\beta := \omega_0 (T-t)^{-\left(\frac{q+1}{p-q}-\beta\right)} \quad \forall\, t < T, \quad \omega_0 > 0,\, 0 < \beta < \beta_0 = \frac{q+1}{p-q} - \frac{1}{p}. \tag{2.130}$$

Тоді існує стала $G > 0$ і значення $\hat{s} > 0$, що залежить лише від відомих параметрів задачі, такі, що для розв'язку u справедлива рівномірна за $t \leqslant T$ енергетична оцінка:

$$E_u(t,s) + h_u(\tau,s) \leqslant G\omega_0^{\frac{q+1}{\beta(p-q)}} s^{-\nu} \qquad \forall\, t \leqslant T,\, \forall\, s \in (0,\hat{s}), \tag{2.131}$$

де $\nu = \frac{(n(p-q)+(q+1)(p+1))(q+1-\beta(p-q))}{\beta(p-q)^2}$.

Доведення.

Із означення (2.10) випливає, що енергетичні функції $E(t,s)$, $h(t,s)$ для розв'язку u є незростаючими функціями аргументу s при довільному $t \leqslant T$. Крім того, в силу результатів, описаних у підрозділі 1.3, маємо

$$E(t,s) + h(\tau,s) < \infty \quad \forall\, s > 0,\, \forall\, t \leqslant T. \tag{2.132}$$

Зафіксуємо тепер числа

$$\xi \in (0,1); \quad \alpha_1 \in (p^{-1}, \alpha), \quad \alpha := \frac{q+1}{p-q} - \beta.$$

В силу (2.132) маємо дві альтернативи: або

$$E(T,s)+h(T,s)\leqslant 2\omega_0 T^{-\alpha_1}\xi^{-\alpha}\quad \forall\, s>0,$$

або існує таке значення $\bar{s}\in(0,s_\Omega)$, де s_Ω з (2.9), що

$$E(T,s)+h(T,s)>2\omega_0 T^{-\alpha_1}\xi^{-\alpha}\quad \forall\, s\in(0,\bar{s}). \tag{2.133}$$

Почнемо аналіз з випадку (2.133). Для довільної точки $\tilde{s}\in(0,\bar{s})$ визначимо кінцеву зростаючу послідовність $\{t_j\}=\{t_j(\tilde{s})\}$, $j=1,2,...$, $t_0=0$ за допомогою неперервної функції $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot):[0,t']\to[t_1,T]$, що визначається рівністю:

$$\Big(\Gamma_{\tilde{s}}(t)-t\Big)^{-\alpha}=\frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\Big(E(\Gamma_{\tilde{s}}(t),\tilde{s})-E(t,\tilde{s})+\sup_{t<\tau<\Gamma_{\tilde{s}}(t)}h(\tau,\tilde{s})\Big). \tag{2.134}$$

Значення $t_1=t_1(\tilde{s})=\Gamma_{\tilde{s}}(0)$ визначається рівністю:

$$t_1^{-\alpha}=\frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\left(E(t_1,\tilde{s})+h(t_1,\tilde{s})\right), \tag{2.135}$$

а t' визначається зі співвідношення:

$$(T-t')^{-\alpha}=\frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\Big(E(T,\tilde{s})-E(t',\tilde{s})+\sup_{t'<\tau<T}h(\tau,\tilde{s})\Big). \tag{2.136}$$

В силу означення (2.135) і припущення (2.133) маємо

$$\begin{aligned}\left(E(t_1,\tilde{s})+h(t_1,\tilde{s})\right)t_1^\alpha=\frac{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}{\xi^\alpha}<\\ <\frac{1}{2}\left(E(T,\tilde{s})+h(T,\tilde{s})\right)T^\alpha\quad \forall\tilde{s}\in(0,\bar{s}].\end{aligned}$$

Таким чином, в силу строгої монотонності функції $R_{\tilde{s}}(t):=\left(E(t,\tilde{s})+\sup_{0<\tau<t}h(\tau,\tilde{s})\right)t^\alpha$ маємо, що $t_1(\tilde{s})<T$ $\forall\tilde{s}\in(0,\bar{s}]$. Відмітимо також, що в силу (2.132) з означення (2.136) випливає:

$$t'=t'(\tilde{s})<T\quad \forall\tilde{s}\in(0,\bar{s}].$$

Тож, можемо зробити висновок, що функція $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$ визначає строго монотонну зростаючу послідовність $\{t_j\}$ співвідношенням:

$$t_j := \Gamma_{\tilde{s}}(t_{j-1}), \quad j = 1, 2, ..., j_0 = j_0(\tilde{s}) < \infty : t_{j_0} = \Gamma_{\tilde{s}}(t_{j_0-1}) > t', \quad t_{j_0-1} \leqslant t'. \tag{2.137}$$

За послідовністю $\{t_j\}$ з (2.137) визначимо послідовність інтервалів $\Delta_j = \Delta_j(\tilde{s}) = t_j - t_{j-1}$, $j = 1, 2, ..., j_0$, для яких в силу означення (2.134) має місце співвідношення:

$$\Delta_j^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \big(E(t_j, \tilde{s}) - E(t_{j-1}, \tilde{s}) + \sup_{t_{j-1} < \tau < t_j} h(\tau, \tilde{s}) \big). \tag{2.138}$$

Покажемо тепер, що послідовність $\{\Delta_j\}$ є кваліфіковано спадною. З умови теореми 2.7 випливає, що для енергетичних функцій $E(t)$, $h(t)$ розв'язку u має місце оцінка:

$$E(t) + h(t) = E_u(t) + h_u(t) \leqslant \omega_0 (T - t)^{-\alpha} \quad \forall\, t < T. \tag{2.139}$$

В силу (2.139) з означення (2.134) функції $\Gamma_{\tilde{s}}(t)$ випливає нерівність:

$$\begin{aligned} \Delta_j^{-\alpha} &= \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \big(E(t_j, \tilde{s}) - E(t_{j-1}, \tilde{s}) + \sup_{t_{j-1} < \tau < t_j} h(\tau, \tilde{s}) \big) \leqslant \\ &\leqslant \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \left(E(t_j) + h(t_j) \right) \leqslant \xi^\alpha T^{-(\alpha-\alpha_1)} (T - t_j)^{-\alpha} \quad \forall j \leqslant j_0. \end{aligned}$$

Звідси в силу умови $T \geqslant 1$ з формулювання задачі отримуємо:

$$\Delta_j \geqslant \xi^{-1} T^{1-\frac{\alpha_1}{\alpha}} (T - t_j) \geqslant \xi^{-1} (T - t_j) \geqslant \xi^{-1} \Delta_{j+1} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{j+1} \leqslant \xi \Delta_j \quad \forall j \leqslant j_0, \tag{2.140}$$

де $\Delta_{j_0+1} := T - t_{j_0}$. Співвідношення (2.140) назвемо властивістю кваліфікованої монотонності послідовності $\{\Delta_j\}$. За сформованою послідовністю $\{t_j\}$ визначаються пошарові енергетичні функції $E_j(s)$ і $h_j(s)$ за допомогою співвідношень (2.11).

В силу леми 2.1 енергетичні функції $E_j(s)$ и $h_j(s)$ задовольняють систему (2.12), (2.13). Аналізуючи цю систему, встановимо оцінки для енергетичних функцій $E(t,s)$, $h(t,s)$. Для цього спочатку введемо вагові енергетичні функції:

$$A_j(s) := \Delta_j^{\alpha_1} E_j(s), \quad H_j(s) := \Delta_j^{\alpha_1} h_j(s), \quad j = 1, 2, ..., j_0. \tag{2.141}$$

Для них стартова система (2.12), (2.13) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} &A_j(s) + H_j(s) \leqslant \overline{C}_1 H_{j-1}(s) + C_2 \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1\mu_1} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_1} + \\ &C_3 \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1\mu_2} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_2} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}), \\ &H_j(s) \leqslant (1+\gamma)\xi^{\alpha_1} H_{j-1}(s) + C_4 \gamma^{-(\nu_1+\mu_1)} \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1\mu_1} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_1} + \\ &C_5 \gamma^{-\frac{1}{q}} \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1\mu_2} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_2}, \end{aligned} \tag{2.142}$$

де $\overline{C}_1 = C_1 \xi^{\alpha_1}$, $\overline{H}_0(s) = \Delta_0^{\alpha_1} h_0(s)$, $\Delta_0 = \xi^{-1}\Delta_1$. Накладемо тепер першу умову на вибір сталої ξ, а саме, покладемо $\xi < (1+\gamma)^{-\alpha_1^{-1}}$. При цьому, в силу (2.140) маємо:

$$\lambda_j := (1+\gamma)\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_1} \leqslant \lambda := (1+\gamma)\xi^{\alpha_1} < 1, \quad j = 1, 2, ..., j_0.$$

Легко перевірити співвідношення:

$$\lambda_j \lambda_{j-1} ... \lambda_{i+1} \Delta_i^{\nu_k - \alpha_1\mu_k} = (1+\gamma)^{j-i} \Delta_j^{\nu_k - \alpha_1\mu_k} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{(1+\mu_k)\alpha_1 - \nu_k} \qquad \forall\, j > i,\ k = 1, 2.$$

Враховуючи це, проітеруємо нерівності (2.142). У результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} &A_j(s) + H_j(s) \leqslant \overline{C}_1 (1+\gamma)^{j-1} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_0}\right)^{\alpha_1} H_0(s) + \\ &+ \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1\mu_1} C_6 \gamma^{-(\nu_1+\mu_1)} \left[\sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{(1+\mu_1)\alpha_1 - \nu_1} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_1}\right] + \\ &+ \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1\mu_2} C_7 \gamma^{-\frac{1}{q}} \left[\sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{(1+\mu_2)\alpha_1 - \nu_2} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_2}\right] \\ &\forall\, j \leqslant j_0,\ \forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}), \end{aligned} \tag{2.143}$$

де $C_6 = \max\left\{C_2 \gamma^{(\nu_1+\mu_1)}, \overline{C}_1 C_4 \lambda^{-1}\right\}$, $C_7 = \max\left\{C_3 \gamma^{\frac{1}{q}}, \overline{C}_1 C_5 \lambda^{-1}\right\}$. Перетворимо тепер систему (2.143) до такого вигляду, щоб застосувати лему 2.4. Для цього введемо нові енергетичні функції

$$U_j^{(1)}(s) := \sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} (A_i(s) + H_i(s)),$$
$$U_j^{(2)}(s) := \sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_2}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_2}{1+\mu_2}} (A_i(s) + H_i(s)), \quad j = 1, 2, ..., j_0. \tag{2.144}$$

Очевидні співвідношення:

$$U_j^{(1)}(s) - A_j(s) - H_j(s) = \theta_{1,j}\, \overline{U}_{j-1}^{(1)}(s), \quad U_0^{(1)}(s) = 0,$$
$$U_j^{(2)}(s) - A_j(s) - H_j(s) = \theta_{2,j}\, \overline{U}_{j-1}^{(2)}(s), \quad U_0^{(2)}(s) = 0, \quad j = 1, 2, ..., j_0, \tag{2.145}$$

де

$$\theta_{1,j} := (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \leqslant \theta_1 := (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_1}} \xi^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} < 1,$$
$$\theta_{1,j} := (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_2}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_2}{1+\mu_2}} \leqslant \theta_2 := (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_2}} \xi^{\alpha_1 - \frac{\nu_2}{1+\mu_2}} < 1, \tag{2.146}$$

За допомогою умов (2.146) накладаються більш жорсткі кінцеві вимоги на вибір сталої ξ. Очевидно, що $H_j(s)$, $j = 1, 2, ..., j_0$ є абсолютно неперервними монотонно незростаючими функціями. Тому з нерівностей (2.143), в силу співвідношень (2.145) випливає справедливість для майже всіх $s \in (\tilde{s}, \bar{s})$ співвідношень:

$$U_j^{(1)}(s) \leqslant \overline{C}_1 \lambda^{j-1} H_0(s) + \theta_1 U_{j-1}^{(1)}(s) + C_6 \gamma^{-(\nu_1+\mu_1)} \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1\mu_1} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(1)}(s)\right)^{1+\mu_1} +$$
$$+ C_7 \gamma^{-\frac{1}{q}} \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1\mu_2} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(2)}(s)\right)^{1+\mu_2}, \quad j = 1, 2, ..., j_0, \tag{2.147}$$

$$U_j^{(2)}(s) \leqslant \overline{C}_1 \lambda^{j-1} H_0(s) + \theta_2 U_{j-1}^{(2)}(s) + C_6 \gamma^{-(\nu_1+\mu_1)} \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1\mu_1} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(1)}(s)\right)^{1+\mu_1} +$$
$$+ C_7 \gamma^{-\frac{1}{q}} \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1\mu_2} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(2)}(s)\right)^{1+\mu_2}, \quad j = 1, 2, ..., j_0. \tag{2.148}$$

Оцінимо зверху значення $U_j^{(1)}(\tilde{s})$. В силу (2.141) і означення (2.138) інтервалів $\{\Delta_j\} = \{\Delta_j(\tilde{s})\}$ $\forall j \leqslant j_0$ маємо

$$U_j^{(1)}(\tilde{s}) = \sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \Delta_i^{\alpha_1}(E_i(\tilde{s}) + h_i(\tilde{s})) =$$
$$= \omega_0 \xi^{-\alpha} T^{\alpha-\alpha_1} \sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \Delta_i^{-(\alpha-\alpha_1)} \quad \forall\, j \leqslant j_0.$$

Звідси легко випливає

$$\begin{aligned} U_j^{(1)}(\tilde{s}) &= \omega_0 \xi^{-\alpha} T^{\alpha-\alpha_1} \Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)} \sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \leqslant \\ &\leqslant \omega_0 \xi^{-\alpha} T^{\alpha-\alpha_1} \Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)} \sum_{i=1}^{j} \left(\theta_1 \xi^{\alpha-\alpha_1}\right)^{j-1} \leqslant \\ &\leqslant G_1 \omega_0 (1 - \theta_1 \xi^{\alpha-\alpha_1})^{-1} \Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)} \quad \forall\, j \leqslant j_0, \end{aligned} \tag{2.149}$$

де $G_1 = \xi^{-\alpha} T^{\alpha-\alpha_1}$. Аналогічно отримуємо оцінку для $\overline{U}_j^{(2)}(\tilde{s})$:

$$\overline{U}_j^{(2)}(\tilde{s}) \leqslant G_1 \omega_0 (1 - \theta_2 \xi^{\alpha-\alpha_1})^{-1} \Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)} \quad \forall\, j \leqslant j_0. \tag{2.150}$$

Додаючи нерівності (2.147) і (2.148) та враховуючи монотонне незростання функцій $U_j^{(1)}(s)$ і $U_j^{(2)}(s)$, отримаємо диференціальну нерівність відносно функцій $U_j(s) := U_j^{(1)}(s) + U_j^{(2)}(s)$:

$$U_j(s) \leqslant 2 \max\left\{ \frac{C_6}{\gamma^{\nu_1+\mu_1}} \Delta_j^{\mu_1(\alpha+\beta-\alpha_1)} \left(-U_j'(s)\right)^{1+\mu_1}, \frac{C_7}{\gamma^{\frac{1}{q}}} \Delta_j^{\mu_2(\alpha+\beta-\alpha_1)} \left(-U_j'(s)\right)^{1+\mu_2} \right\} +$$
$$+ 2\overline{C}_1 \lambda^{j-1} H_0(s) + \overline{\theta} U_{j-1}(s) \quad \text{для почти всех } s \in (\tilde{s}, \bar{s}), \quad \overline{\theta} = \max(\theta_1, \theta_2). \tag{2.151}$$

Відповідно, нерівності (2.150) і (2.149) породжують "початкову"умову для функцій $U_j(s)$:

$$U_j(\tilde{s}) \leqslant G_2 \omega_0 \Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)} \quad \forall\, j \leqslant j_0, \tag{2.152}$$

де $G_2 = G_1 \left((1 - \theta_1 \xi^{\alpha-\alpha_1})^{-1} + (1 - \theta_2 \xi^{\alpha-\alpha_1})^{-1}\right)$. Неважко перевірити, що систему (2.151), (2.152) можно записати у "однорідному"вигляді, а саме:

$$\widetilde{U}_j(s) := U_j(s) - \bar{b} \leqslant \bar{\theta}\widetilde{U}_{j-1}(s) + \max\left\{k_j^{(1)}(-\widetilde{U}_j'(s))^{1+\mu_1}, k_j^{(2)}(-\widetilde{U}_j'(s))^{1+\mu_2}\right\},$$
$$\widetilde{U}_j(\tilde{s}) \leqslant K_j := G_2\omega_0\Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)}, \quad \bar{b} = 2\overline{C}_1(1-\bar{\theta})^{-1}\overline{H}_0(0),\ j = 1,2,...,j_0(\tilde{s}), \tag{2.153}$$

де $k_j^{(1)} = \overline{C}_6\Delta_j^{\mu_1(\alpha+\beta-\alpha_1)}$, $k_j^{(2)} = \overline{C}_7\Delta_j^{\mu_2(\alpha+\beta-\alpha_1)}$, $\overline{C}_6 = 2C_6\gamma^{-(\nu_1+\mu_1)}$, $\overline{C}_7 = 2C_7\gamma^{-\frac{1}{q}}$. До системи (2.153) можна застосувати лему 2.4. В силу цієї леми отримаємо рівномірну оцінку:

$$\widetilde{U}_j(s) \leqslant \omega_0^{\gamma_1}\max\{G_3\psi(s-\tilde{s}), G_4\} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}),$$
$$\gamma_1 := \frac{\alpha+\beta-\alpha_1}{\beta}, \quad j = 1,2,...,j_0,$$

де $\psi(s) := s^{-\frac{(1+\mu_1)(\alpha-\alpha_1)}{\mu_1\beta}}$,
$G_3 = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta-\alpha_1}\right)^{\frac{1+\mu_1}{\mu_1}}\left(\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha+\beta-\alpha_1}\right)^{\frac{(1+\mu_1)(\alpha-\alpha_1)}{\mu_1\beta}}\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2^{\frac{(\alpha+\beta-\alpha_1)}{\beta}}\left(\frac{\overline{C}_6}{1-\bar{\theta}}\right)^{\frac{\alpha-\alpha_1}{\mu_1\beta}}G_2^{\frac{\alpha+\beta-\alpha_1}{\beta}}$,
$G_4 = \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2(1-\bar{\theta})^{\frac{\alpha-\alpha_1}{\beta}}\overline{C}_6^{-\frac{(1+\mu_2)(\alpha-\alpha_1)}{(\mu_2-\mu_1)\beta}}\overline{C}_7^{\frac{(1+\mu_1)(\alpha-\alpha_1)}{(\mu_2-\mu_1)\beta}}G_2^{\frac{\alpha+\beta-\alpha_1}{\beta}}$, $\bar{\mu}_1 = \left(\frac{\mu_1}{1+\mu_1}\right)^{\frac{1+\mu_1}{\mu_1}}$,
$\bar{\mu}_2 = \left(\frac{\mu_2}{1+\mu_2}\right)^{\frac{(1+\mu_1)(1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2}}$. Відповідно для $U_j(s)$ маємо оцінку:

$$U_j(s) \leqslant \omega_0^{\gamma_1}\max\{G_3\psi(s-\tilde{s}), G_4\} + \bar{b} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}), \tag{2.154}$$

Далі визначимо значення $s_1 > \tilde{s}$ таким чином:

$$\psi(s_1 - \tilde{s}) = G_3^{-1}\max\left\{G_4, \bar{b}\,\omega_0^{-\gamma_1}\right\}.$$

Тоді з (2.154) випливає справедливість нерівності:

$$U_j(s) \leqslant 2G_3\,\omega_0^{\gamma_1}\psi(s-\tilde{s}) \quad \forall\, s : \tilde{s} < s < s_2 := \min\{s_1, \bar{s}\}, \quad \forall\, j \leqslant j_0(\tilde{s}). \tag{2.155}$$

Згадуючи означення (2.144) і (2.141), виводимо за допомогою (2.155) оцінку:

$$E_j(s) + h_j(s) \leqslant 2^{-1}\Delta_j^{-\alpha_1}U_j(s) \leqslant G_3\omega_0^{\gamma_1}\psi(s-\tilde{s})\Delta_j^{-\alpha_1} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_2),\ j \leqslant j_0. \tag{2.156}$$

Тепер оцінимо енергетичні функції $E(t,s)$ і $h(t,s)$. Для цього зафіксуємо довільне значення $i \leqslant j_0$ та просумуємо нерівності (2.156) за j від 1 до i. В силу

(2.138) і (2.140) отримуємо

$$E(t_i, s) + \sup_{0<\tau<t_i} h(\tau, s) \leqslant G_3\omega_0^{\gamma_1}\psi(s-\tilde{s})\sum_{j=1}^{i}\Delta_j^{-\alpha_1} \leqslant$$

$$\leqslant G_3\omega_0^{\gamma_1}\psi(s-\tilde{s})\Delta_i^{-\alpha_1}\sum_{j=1}^{i}(\xi^{\alpha_1})^{j-1} \leqslant$$

$$\leqslant G_3\omega_0^{\gamma_1}\psi(s-\tilde{s})\Delta_i^{-\alpha_1}(1-\xi^{\alpha_1})^{-1} =$$

$$= G_5\omega_0^{\gamma_2}\psi(s-\tilde{s})\left(E_i(\tilde{s}) + h_i(\tilde{s})\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_2),$$

$$\text{де } \gamma_2 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\alpha_1)}{\alpha\beta}, \quad G_5 = \xi^{\alpha_1}(1-\xi^{\alpha_1})^{-1}T^{-\frac{(\alpha-\alpha_1)\alpha_1}{\alpha}}G_3. \quad (2.157)$$

Наступний крок доведення — отримання оцінки типу (2.157) для довільної точки $t < T$. Для цього відмітимо, що функція $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$, що визначена в (2.134), неперервно, монотонно та взаємнооднозначно відображає будь-який відрізок $[t_{j-1}, t_j]$ на $[t_j, t_{j+1}]$ $\forall\, j \leqslant j_0 - 1$. Зафіксуємо довільну точку $\bar{t} \in [t_1, T)$. Нехай для визначеності $\bar{t} := \bar{t}_k \in (t_k, t_{k+1}]$ при деякому $k \leqslant j_0$. Тоді єдиним чином відновлюється послідовність $\{\bar{t}_i\}$, $i \leqslant k-1$ така, що:

$$\bar{t}_{i+1} = \Gamma_{\tilde{s}}(\bar{t}_i) \quad \forall\, i \leqslant k-1, \quad \bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1}], \quad \bar{t}_0 \in (0, t_1].$$

За допомогою цієї послідовності визначаються нові зсуви $\{\overline{\Delta}_i\}$:

$$\overline{\Delta}_i^{-\alpha} := (\bar{t}_i - \bar{t}_{i-1})^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\Big(E(\bar{t}_i, \tilde{s}) - E(\bar{t}_{i-1}, \tilde{s}) + \sup_{\bar{t}_{i-1}<t<\bar{t}_i} h(t, \tilde{s})\Big).$$

Аналогічно (2.140) перевіряється кваліфікована монотонність послідовності $\{\overline{\Delta}_i\} : \overline{\Delta}_{i+1} < \xi\overline{\Delta}_i$ $\forall\, i \leqslant k-1$. За зсувами $\{\overline{\Delta}_i\}$ визначимо відповідні енергетичні функції $\overline{E}_i(s)$ і $\overline{h}_i(s)$. Далі повторюємо обчислення (2.141)–(2.157). Відмінність буде лише в тому, що в якості початкової функції виступає функція $\overline{h}_0(s) := h(\bar{t}_0, s)$. Оцінимо $\overline{H}_0(s)$, враховуючи, що для енергетичних функцій виконується умова (2.7) з функцією F, що задається співвідношенням (2.130):

$$\overline{H}_0(s) = (\xi^{-1}\Delta_1)^{\alpha_1}\overline{h}_0(s) \leqslant \xi^{-\alpha_1}\omega_0\left(\frac{\bar{t}_1 - \bar{t}_0}{T - \bar{t}_0}\right)^{\alpha_1} \leqslant \xi^{-\alpha_1}\omega_0.$$

У результаті отримаємо оцінку типу (2.157):

$$E(\bar{t}, s) + \sup_{0<\tau<\bar{t}} h(\tau, s) \leqslant G_5 \omega_0^{\gamma_2} \psi(s - \tilde{s}) \left(\overline{E}_k(\tilde{s}) + \overline{h}_k(\tilde{s})\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_3), \tag{2.158}$$

де γ_2 і G_5 з (2.157), $s_3 := \min\{\bar{s}_1, \bar{s}\}$, а значення $\bar{s}_1$ визначається співвідношенням:

$$\psi(\bar{s}_1 - \tilde{s}) = G_3^{-1} \max\left\{G_4, \bar{\bar{b}}\, \omega_0^{-\gamma_1}\right\}, \quad \bar{\bar{b}} := 2\overline{C}_1(1 - \overline{\theta})^{-1} \overline{H}_0(0).$$

Тепер в силу того, що $\bar{t} = \bar{t}_k$ є довільною точкою з інтервалу $(0, T]$, отримуємо з (2.158) оцінку:

$$E(t, s) + \sup_{0<\tau<t} h(\tau, s) \leqslant G_5 \omega_0^{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\alpha_1)}{\alpha\beta}} (s - \tilde{s})^{-\frac{(1+\mu_1)(\alpha-\alpha_1)}{\mu_1\beta}} \left(E(t, \tilde{s}) + h(t, \tilde{s})\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}$$
$$\forall\, t \leqslant T, \forall\, s,\ \tilde{s} : 0 < \tilde{s} < s < s_3, \tag{2.159}$$

Таким чином встановлено функціональну нерівність структури (2.174) відносно параметричного сімейства функцій $U_t(s) := E(t, s) + h(t, s)$. В силу леми 2.7 з (2.159) випливає оцінка:

$$E(t, s) + \sup_{0<\tau<t} h(\tau, s) \leqslant 2^{\frac{(1+\mu_1)\alpha^3}{\mu_1\alpha_1\beta(\alpha-\alpha_1)}} G_5^{\frac{\alpha}{\alpha-\alpha_1}} \omega_0^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}} s^{-\frac{(1+\mu_1)\alpha}{\mu_1\beta}} \quad \forall\, t \leqslant T, \forall\, s \in (0, s_3). \tag{2.160}$$

Неважко перевірити, що оцінка (2.160) співпадає з шуканою оцінкою (2.131) при $G = 2^{\frac{(1+\mu_1)\alpha^3}{\mu_1\alpha_1\beta(\alpha-\alpha_1)}} G_5^{\frac{\alpha}{\alpha-\alpha_1}}$, $\hat{s} = s_3$. Таким чином, теорема 2.7 доведена.

Для LS–режимів існує функція

$$W(x) := \overline{\lim_{t\to T}} u(t, x) < \infty \quad \forall\, x \in \Omega,$$

яку ми назвемо фінальним профілем розв'язку і яка є тонкою характеристикою цього розв'язку. Актуальним є отримання точних залежних від $\omega(t)$ оцінок зверху та знизу для цього фінального профілю.

Наслідок 2.1. В умовах теореми 2.7 для фінального профілю $W(x)$ розв'язку

u рівняння (2.1) з класу $U_{u_0,F}$ за додаткової умови $0 < p-1 < q < 1$ виконується оцінка:

$$W(x) \leqslant C_1 \omega_0^{\frac{1}{\beta(p-q)}} d(x)^{-\mu} \quad \forall\, x \in \Omega \setminus \Omega(2\hat{s}), \tag{2.161}$$

де $C_1 < \infty$ залежить лише від відомих параметрів задачі, $\hat{s}$ з (2.131), а $\mu = \frac{n(p-q)+(p+1)(q+1)-\beta(p-q)(p+1)}{\beta(p-q)^2}$.

Доведення.

Нехай y — довільна точка з Ω і

$$d(y) = dist(y, \partial\Omega) := s > 0. \tag{2.162}$$

При $p > 1$, $q < 1$ детальний аналіз оцінок максимуму модуля узагальнених розв'язків двічі вироджених параболічних рівнянь з [25, 56, 78] приводять з урахуванням (2.162) до нерівності:

$$u(T,y) \leqslant \gamma s^{-\frac{n+p+1}{(1+\lambda)q}} \left(\int_{T-\xi}^{T} \int_{B_{\frac{s}{2}}(y)} |u(t,x)|^{p+\lambda q} dx\, dt \right)^{\frac{1}{(1+\lambda)q}} + \gamma \left(\frac{s^{p+1}}{\xi} \right)^{\frac{1}{p-q}}$$

$$\forall \lambda \in (0,1], \forall\, \xi \in (0,T), \tag{2.163}$$

де $\gamma = \gamma(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to 0$, $B_r(y) := \{x : |x-y| < r\}$. За додаткової умови $1 < p < 1+q$ можемо вважати λ вільним параметром:

$$0 < \lambda \leqslant \frac{q+1-p}{q}.$$

При цьому $p + \lambda q \leqslant q+1$ і в силу нерівності Гельдера:

$$\int_{B_{\frac{s}{2}}(y)} |u(t,x)|^{p+\lambda q} dx \leqslant c_0 s^{\frac{n(q+1-(p+\lambda q))}{q+1}} \left(\int_{B_{\frac{s}{2}}(y)} |u(t,x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+\lambda q}{q+1}}.$$

Використовуючи очевидне включення $B_{\frac{s}{2}}(y) \subset \Omega\left(\frac{s}{2}\right)$, а також оцінку (2.131), продовжимо останню нерівність та отримаємо:

$$\int_{B_{\frac{s}{2}}(y)} |u(t,x)|^{p+\lambda q} dx \leqslant c_0 s^{\nu_1} G^{\frac{p+\lambda q}{q+1}} \omega_0^{\frac{p+\lambda q}{\beta(p-q)}}, \quad \nu_1 = \frac{n(q+1-(p+\lambda q))}{q+1} - \nu\, \frac{p+\lambda q}{q+1}.$$

В силу цієї нерівності оцінка (2.163) призводить до:

$$|u(T,y)| \leqslant \gamma c_0^{\frac{1}{(1+\lambda)q}} G^{\frac{p+\lambda q}{(q+1)(1+\lambda)q}} \omega_0^{\frac{p+\lambda q}{(p-q)(1+\lambda)q\beta}} \xi^{\frac{1}{(1+\lambda)q}} s^{-\nu_2} + \gamma \xi^{-\frac{1}{p-q}} s^{\frac{p+1}{p-q}},$$
$$\nu_2 = \frac{(n+\nu)(p+\lambda q)}{(q+1)(1+\lambda)q} + \frac{p+1}{(1+\lambda)q}.$$

Оптимізуючи цю оцінку за $\xi \in (0,T)$, отримаємо:

$$\begin{aligned} |u(T,y)| \leqslant & A\omega_0^{\frac{1}{\beta(p-q)}} s^{-\nu_3} \quad \forall\, s < 2\hat{s}, \\ & \nu_3 = \frac{n(p-q)+(p+1)(q+1)-\beta(p-q)(p+1)}{\beta(p-q)^2}, \\ & A = A(\lambda) = \gamma c_0^{\frac{1}{p+\lambda q}} G^{\frac{1}{q+1}} (p-q)^{-\frac{p-q}{p+\lambda q}} (p+\lambda q)\big((1+\lambda)q\big)^{-\frac{(1+\lambda)q}{p+\lambda q}}. \end{aligned} \tag{2.164}$$

Оцінка (2.164) очевидно еквівалентна шуканій оцінці (2.161) фінального профілю розв'язку u.

2.6 Допоміжні результати

Лема 2.4.(див. Леми 9.2.1–9.2.6 з [68]) Нехай деяке сімейство невід'ємних абсолютно неперервних монотонно незростаючих функцій $\{M_j(s)\}$, $j \leqslant j_0 \leqslant \infty$, задовольняє для майже всіх $s \in (0,s_0), s_0 > 0$, системі диференціальних нерівностей:

$$M_j(s) \leqslant \lambda M_{j-1}(s) + (1-\lambda)\max\left\{k_j^{(1)}(-M_j'(s))^{1+\gamma_1}; k_j^{(2)}(-M_j'(s))^{1+\gamma_2}\right\} \quad \forall\, s > 0,$$

$$M_j(0) \leqslant K_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \quad M_0(s) := 0,$$

де $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$, $\lambda = const \in (0,1)$, $k_j^{(1)} = c_1\varepsilon_j^{\gamma_1}$, $k_j^{(2)} = c_2\varepsilon_j^{\gamma_2}$, $K_j = c_3\varepsilon_j^{-(1-\delta)}$, c_1, c_2, $c_3 > 0$ — деякі сталі, $\delta \in (0,1)$, $\{\varepsilon_j\}$ — довільна монотонно спадна послідовність додатних чисел. Тоді для $M_j(s)$ справедлива рівномірна оцінка:

$$M_j(s) \leqslant \max\left\{B_1 s^{-\frac{(1+\gamma_1)(1-\delta)}{\delta\gamma_1}}, B_2\right\} \quad \forall\, s \in (0,s_0),\ \forall\, j \leqslant j_0,$$

де B_1, B_2 — додатні сталі, що залежать від c_1, c_2, c_3, δ, γ_1, γ_2, та не залежать ні від j_0, ні від послідовності $\{\varepsilon_j\}$.

Лема 2.5.(див. Леми 9.2.7–9.2.9 з [68]) Нехай деяке сімейство невід'ємних абсолютно неперервних монотонно незростаючих функцій $\{M_j(s)\}$, $j \in \mathbb{N}$, задовольняє систему диференціальних нерівностей:

$$\begin{aligned} &M_j(s) \leqslant \lambda M_{j-1}(s) + (1-\lambda)k_j(-M_j'(s)) \quad \forall\, s \geqslant \bar{s}, \\ &M_j(\bar{s}) \leqslant \exp K_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \quad M_0(s) := 0, \end{aligned} \tag{2.165}$$

де $\lambda \in (0,1)$, а послідовності $\{k_j\}$, $\{K_j^{-1}\}$, $\{k_j K_j\}$ прямує монотонно до 0 при $j \to \infty$. Тоді для розв'язків $M_j(s)$ справедлива оцінка:

$$M_j(s) \leqslant \widetilde{N}(s),$$

де $\widetilde{N}(s)$ — обгинаюча сімейства кривих $\overline{M}_{k_i}(s) := \exp\left[K_i - (s-\bar{s})k_i^{-1}\right]$.

Лема 2.6. Нехай деяке сімейство невід'ємних абсолютно неперервних монотонно незростаючих функцій $\{M_j(s)\}$, $j \in \mathbb{N}$, задовольняє систему диференціальних нерівностей:

$$\begin{aligned} &M_j(s) \leqslant \lambda M_{j-1}(s) + (1-\lambda)k_j(-M_j'(s)) \quad \forall\, s \geqslant \bar{s}, \\ &M_j(\bar{s}) \leqslant \exp K_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \quad M_0(s) := 0, \end{aligned} \tag{2.166}$$

де $\lambda \in (0,1)$, а послідовність $\{k_j\}$ прямує монотонно до 0 при $j \to \infty$. Нехай також

$$K_j = f(k_j) = a + b\ln(k_j^{-1}). \tag{2.167}$$

Тоді для розв'язків $M_j(s)$ справедлива рівномірна апріорна оцінка:

$$M_j(s) \leqslant \overline{N}(s) := b^b e^{a-b}(s-\bar{s})^{-b} \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \forall\, s \geqslant \bar{s}.$$

Доведення. Розглянемо систему:

$$\overline{M}_j(s) = -k_j \overline{M}_j'(s) \quad \forall\, s \geqslant \bar{s}, \quad \overline{M}_j(\bar{s}) = \exp K_j, \tag{2.168}$$

де послідовність $\{k_j\}$ з (2.166), а $\{K_j\}$ така, що $\{K_j^{-1}\}$ і $\{k_jK_j\}$ монотонно прямує до 0 при $j \to \infty$. Інтегруючи (2.168), отримуємо

$$\overline{M}_j(s) = \exp\big(K_j - k_j^{-1}(s - \bar{s})\big) \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \forall\, s \geqslant \bar{s}. \tag{2.169}$$

Функції $\overline{M}_j(s)$ монотонно спадають за s, а отже можуть мати між собою не більш однієї точки перетину. Очевидно, що сусідні функції $\overline{M}_j(s)$ і $\overline{M}_{j+1}(s)$ перетинаються в точці $s_j := \bar{s} + \frac{K_j - K_{j-1}}{k_j^{-1} - k_{j-1}^{-1}} > \bar{s}\ \forall j \in \mathbb{N}$. Неважко показати, що при заданих умовах на $\{k_j\}$ і $\{K_j\}$ отримуємо, що $\{s_j\}$ монотонно прямує до $\bar{s}$ при $j \to \infty$. Введемо тепер до розгляду функцію $\widetilde{M}_j(s)$, що визначається таким чином:

$$\widetilde{M}_j(s) := \max_{i \leqslant j}\{\overline{M}_i(s)\}.$$

Знаючи структуру послідовності $\{\overline{M}_i(s)\}$, можемо стверджувати, що

$$\widetilde{M}_j(s) = \begin{cases} \overline{M}_1(s), & \text{если } s \geqslant s_1; \\ \overline{M}_2(s), & \text{если } s \in [s_2, s_1); \\ \dots & \\ \overline{M}_j(s), & \text{если } s \in [\bar{s}, s_{j-1}). \end{cases}$$

Далі перейдемо безпосередньо до аналізу розв'язків заданої системи нерівностей (2.166). Використовуючи індукцію, доведемо, що виконується оцінка:

$$M_j(s) \leqslant \widetilde{M}_j(s) \quad \forall\, j \leqslant i, \forall\, s \geqslant \bar{s}. \tag{2.170}$$

При $j = 1$ оцінка перевіряється безпосередньо інтегруванням нерівності (2.166). Покладемо, що оцінка (2.170) виконується для $j - 1$. Нехай вона не виконана для j. Тоді знайдеться такий інтервал (a, b), $a > \bar{s}$, що має місце

$$M_j(s) > \widetilde{M}_j(s) \quad \forall\, s \in (a, b) \quad \text{и} \quad M_j(a) = \widetilde{M}_j(a). \tag{2.171}$$

Нехай для визначеності $a \in [s_l, s_{l-1})$, $l < j$, тоді (2.171) можна переписати

$$M_j(s) > \overline{M}_l(s) \quad \forall\, s \in (a, \min\{s_{l-1}, b\}) \quad \text{и} \quad M_j(a) = \overline{M}_l(a).$$

Далі, в силу монотонного зростання послідовності $\{\widetilde{M}_i(s)\}$ за i і в силу справедливості оцінки (2.170) для $j-1$, маємо:

$$\widetilde{M}_j(s) \geqslant \widetilde{M}_{j-1}(s) \geqslant M_{j-1}(s),$$

а отже, в силу припущення (2.171),

$$M_{j-1}(s) \leqslant M_j(s) \quad \forall\, s \in [a,b).$$

Тоді система (2.166) для M_j перепишеться таким чином:

$$M_j(s) \leqslant -k_j M_j'(s) \quad \forall\, s \in [a, \min\{s_{l-1}, b\}), \quad M_j(a) = \overline{M}_l(a).$$

Розв'язуючи систему, отримуємо:

$$M_j(s) \leqslant \overline{M}_l(s) \quad \forall\, s \in [a, \min\{s_{l-1}, b\}),$$

що суперечить припущенню (2.171) і доводить оцінку (2.170).

Розглянемо тепер більш широке, ніж (2.169) сімейство функцій $\{\overline{N}_\tau(s)\}$, що залежить від неперервного параметру $\tau > 0$, таке, що $\overline{N}_{k_j}(s) = \overline{M}_j(s)$. Відмітимо, що задана в (2.167) послідовність $\{K_j\}$ задовольняє умовам з (2.168). А отже функції $\overline{N}_\tau(s)$ мають вигляд:

$$\overline{N}_\tau(s) = e^a \tau^{-b} \exp\left(-\tau^{-1}(s-\bar{s})\right).$$

Знайдемо тепер обгинаючу функцію $\overline{N}(s)$ для цього сімейства.

$$\frac{\partial \overline{N}_\tau(s)}{\partial \tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\tau}(s) = \frac{s-\bar{s}}{b} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \overline{N}(s) = \overline{N}_{\bar{\tau}(s)}(s) = b^b e^{a-b}(s-\bar{s})^{-b}$$

Враховуючи, що $\bar{\tau}$ є точкою максимуму, можемо стверджувати, що

$$\forall\, s \geqslant \bar{s} \quad \exists\, \bar{\tau}(s): \quad \overline{N}(s) := \overline{N}_{\bar{\tau}(s)}(s) \geqslant \overline{N}_\tau(s) \quad \forall\, \tau > 0,$$

а отже знайдена функція $\overline{N}(s)$ задовольняє нерівність:

$$\overline{N}(s) \geqslant \overline{N}_\tau(s) \quad \forall\, \tau > 0, \forall\, s \geqslant \bar{s}. \tag{2.172}$$

Враховуючи означення функцій $\overline{N}_\tau(s)$ і (2.172), отримаємо оцінку:

$$\widetilde{M}_j(s) = \max_{i\leqslant j}\{\overline{M}_i(s)\} \leqslant \max_{i\in\mathbb{N}}\{\overline{M}_i(s)\} \leqslant \max_{\tau>0}\{\overline{N}_\tau(s)\} \leqslant \overline{N}(s) \qquad (2.173)$$

Тоді з (2.170) і (2.173) випливає твердження леми.

Лема 2.7. (Stampacchia lemma [79])

Нехай деяка неперервна невід'ємна незростаюча функція $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^1$ задовольняє співвідношення:

$$f(s+\delta) \leqslant a\delta^{-\rho} f(s)^\lambda \quad \forall\, s>0,\, \delta>0, \qquad (2.174)$$

де числа $a>0$, $\rho>0$, $\lambda>0$. Тоді для фінкції f справедлива універсальна апріорна оцінка:

1) якщо $\lambda<1$, то $f(s) \leqslant 2^{\frac{\rho}{\lambda(1-\lambda)^2}} a^{\frac{1}{1-\lambda}} s^{-\frac{\rho}{1-\lambda}} \quad \forall\, s>0$;

2) якщо $\lambda=1$, то $f(s) \leqslant f(0)\exp\Big(1-(ae)^{-\frac{1}{\rho}}s\Big) \quad \forall\, s>0$;

3) якщо $\lambda>1$, то $f(s_0)=0, \quad s_0 = 2^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}\left(af(0)^{\lambda-1}\right)^{\frac{1}{\rho}}$.

Висновки до розділу 2

Дослідження, представлені у розділі 2, присвячені вивченню поведінки слабких розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь з сингулярними граничними умовами. У першому підрозділі сформульовано задачу та представлено означення слабких розв'язків. Другий підрозділ містить опис деяких допоміжних конструкцій та леми, які є важливими при доведенні основних результатів дослідження. У третьому, четвертому та п'ятому підрозділі представлено основні результати розділу, що містять оцінки профілю розв'язку задачі, що вивчається. Шостий підрозділ містить деякі допоміжні твердження, які використовуються під час отримання основних оцінок.

Оскільки розглядаться рівняння з двома нелінійностями, то дуже важливим аспектом задачі є відношення між параметрами нелінійностей. Тож, основні результати було отримано для різних випадків. Для усіх розглянутих випадків відомі умови локалізації граничних режимів, тобто, відомо поведінку граничного режиму, за якої розв'язок буде приймати нескінчені значення лише у фіксованій області біля межі. У розділі розглядаються трохи сильніші умови на характер загострення граничного режиму та вивчається поведінка слабких розв'язків за таких умов. З'ясовано, що навіть при дуже малому збуренні граничних умов розв'язок залишається нескінченим лише на межі області, сингулярність не проникає всередину. Тож, окрім точних умов на слабкі розв'язки задачі, досліджено також залежність поведінки розв'язку від параметру збурення. Отримані оцінки показують, що при зменшенні параметра збурення значення розв'язку біля межі стрімко зростає та "вибухаєколи параметр дорівнює 0.

До основних результатів цього розділу належать:

– Теорема 2.5, в якій отримано оцінку профілю слабких розв'язків рівняння нейтральної дифузії за умови експоненціального характеру загострення граничного режиму. Ці умови є близькими до критичних умов локалізації, тому отримана оцінка дозволяє відслідкувати фазу переходу від LS- до S-режиму.

– Лема 2.2, що містить деякий допоміжний результат, що є необхідним при доведенні теореми 2.5. Цей результат описує поведінку енергетичних функцій на часових шарах в рамках методу енергетичних цінок.

– Лема 2.3, що є перехідним етапом при доведенні теореми 2.5. Основним результатом є проміжна оцінка енергетичних функцій, яка дає змогу відстежити поведінку розв'яку біля межі.

– Теорема 2.6, в якій отримано оцінку профілю слабких розв'язків рівняння нейтральної дифузії за умови степеневого характеру загострення граничного режиму. Така степенева поведінка є дуже пологою для розглянутого рівняння та гарантує локалізацію LS-типу. У будь-якому разі, отримана оцінка дає нову інформацію про поведінку розв'язків двічі нелінійних рівнянь. Більш того, цей результат буде використано у наступному розділі для розширення вже відомого результату зарубіжних вчених на нелінійний випадок.

– Теорема 2.7, в якій отримано оцінку профілю слабких розв'язків рівняння повільної дифузії за умови степеневого характеру загострення граничного режиму. Ці умови є близькими до критичних умов локалізації такої задачі, тому отримана оцінка дозволяє відслідкувати фазу переходу від LS- до S-режиму.

– Лема 2.6, що містить допоміжний результат, який дозволяє вивчати поведінку сімейства розв'язків системи диференціальних нерівностей.

Результати досліджень даного розділу наведено в публікаціях автора [20], [77], [83].

РОЗДІЛ 3

ВЕЛИКІ РОЗВ'ЯЗКИ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

3.1 Квазілінійні параболічні рівняння з потенціалом абсорбції

В цьому розділі вивчаються квазілінійні рівняння з потенціалом абсорбції, тобто рівняння типу (2.6) з ненульовою правою частиною:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p u = -b(t,x)|u|^{\lambda-1}u, \quad \lambda > p > 0,\, q > 0. \tag{3.1}$$

З фізичної точки зору права частина цього рівняння виступає у якості стоку, тобто якщо розглядати рівняння (3.1) як рівняння теплопровідності, де $u(t,x)$ — це температура середи у точці x у момент часу t, то потенціал абсорбції $b(t,x)$ буде описувати поглинання температури в області.

Рівняння такого типу застосовуються при вивченні процесів росту біологічних популяцій, де потенціал абсорбції описує такі ефекти, як природній відбір, хвороби та ін. Також рівняння (3.1) за умови $p = 1$ описує фільтрацію газів у пористому середовищі із абсорбцією, а за умови $q = 1$, $\lambda = 1$ може бути застосовано для вивчення нестаціонарних процесів у неньютонівській рідині.

Існування розв'язків рівняння (3.1) з довільними скінченими початковими та граничними умовами вивчалося у класичних роботах 1980-1990-х років такими авторами, як H.W. Alt та S. Luckhaus [46], А.В. Іванов, П.З. Мкртичян, W. Jäger [25], [26].

Розглянемо тепер нескінчені початково-крайові умови для рівняння (3.1), а саме:

$$u = \infty \text{ на } \{0\} \times \Omega, \text{ тобто } \lim_{t\to 0} u(t,x) = \infty \text{ рівномірно } \forall\, x \in \Omega, \tag{3.2}$$

$$u = \infty \text{ на } (0,T) \times \partial\Omega, \text{ тобто } \lim_{d(x,\partial\Omega)\to 0} u(t,x) = \infty \text{ рівномірно } \forall\, t \in (0,T), \tag{3.3}$$

Розв'язки задачі (3.1), (3.12), (3.13) називаються великими розв'язками.

Питання існування та поведінки великих розв'язків вивчається багатьма відомими вченими зі всього світу, а саме L. Veron, W. Al Sayed, M. Marcus, А.Є. Шишков, C. Bandle, G. Diaz, J.I. Diaz, Y. Du, R. Peng, P. Polaĉik та інші (див. [73], [74], [51], [81], [58] та посилання в них). В цих роботах розглядаються лінійні ($p = q = 1$) або напівлінійні ($q = 1$) рівняння (3.1). Для загального випадку рівняння з двома нелінійностями ($p \neq 1$ та $q \neq 1$) існування великих розв'язків досі не доведено.

Розглянемо тепер основні результати, що були отримані в останні роки та є важливими для викладок, описаних у цьому розділі.

У 2012 році у роботі [58] було розглянуто лінійне рівняння вигляду:

$$u_t - \Delta u = -b(t,x)|u|^{\lambda-1}u, \quad (t,x) \in Q, \quad \lambda > 1 \tag{3.4}$$

з нескінченими початково-крайовими умовами (3.12), (3.13). Потенціал абсорбції $b(t,x)$ є неперервною в області $[0,T] \times \overline{\Omega}$ функцією та задовольняє таким умовам виродження:

$$b(t,x) > 0 \quad \text{в } [0,T) \times \overline{\Omega}, \quad b(t,x) = 0 \quad \text{на } \{T\} \times \Omega. \tag{3.5}$$

Також на потенціал абсорбції накладаються додаткові умови на характер виродження, а саме:

$$a_1(t)d(x)^\beta \leqslant b(t,x) \leqslant a_2(t)d(x)^\beta \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \Omega, \ \beta > -2, \tag{3.6}$$

де a_1, a_2 є додатними неперервними функціями на проміжку $[0,T)$, $d(x) := dist\{x, \partial\Omega\}$. За умови (3.6) доведено існування максимального $\overline{u}$ та мінімального $\underline{u}$ додатних розв'язків задачі. Більш того, у роботі [58] показано, що за додаткової умови на виродження функції a_1 біля $t = T$:

$$a_1(t) \geqslant \kappa (T-t)^{\mu} \quad \text{в } [0,T), \ \kappa = const > 0, \ \mu = const > 0 \tag{3.7}$$

для всіх $t_0 \in (0,T)$, існує стала $C = C(t_0) < \infty$ така, що:

$$\overline{u}(t,x) \leqslant C \, \min\left\{(T-t)^{-\frac{\mu}{\lambda-1}}, d(x)^{-\frac{2\mu}{\lambda-1}}\right\} d(x)^{-\frac{2+\beta}{\lambda-1}} \ \ \forall (t,x) \in [t_0,T) \times \Omega.$$

Тож, показано, що за умови (3.7) усі великі розв'язки є обмеженими всередині області Ω при $t \to T$. Залишалось відкритим питання, чи є умова (3.7) точною умовою обмеженості розв'язку u.

Відповідь на це питання була знайдена у роботі [75] у 2016 році. В цій роботі було розглянуто таку ж задачу (3.4), (3.12), (3.13) з умовами (3.5). На характер виродження потенціалу абсорбції b накладено подібні, але більш загальні, ніж (3.6) умови:

$$a_1(t) g_1(d(x)) \leqslant b(t,x) \leqslant a_2(t) g_2(d(x)) \qquad \forall \, (t,x) \in [0,T) \times \Omega,$$

де $g_1(s) \leqslant g_2(s)$ — довільні неспадні додатні для всіх $s > 0$ функції. Доведено, що за цих умов та додаткової умови на міноранту $a_1(t)$:

$$a_1(t) \geqslant \kappa \exp\left(-\frac{\omega_0}{(T-t)}\right) \quad \text{в } [0,T), \ \kappa = const > 0, \ \omega_0 = const > 0. \tag{3.8}$$

існує стала $k > 0$, що не залежить від ω_0 така, що виконується така умова:

$$\limsup_{t \to T} u(t,x) \leqslant C < \infty \quad \forall x \in \Omega_0 := \{x \in \Omega : d(x) > k\omega_0^{\frac{1}{2}}\}.$$

Легко бачити, що цей результат доводить, що умова (3.7) не є точною. Тож тепер основним кандидатом на цю позицію є умова (3.8).

У роботі [75] також розглянуто більш загальне рівняння (3.1) з умовами (3.5) у випадку, коли $\lambda > p > q > 0$. Для цієї задачі отримано точну умову обмеженості розв'язку u. А саме, доведено, що за умови на характер виродження потенціалу абсорбції:

$$a_1(t) \geqslant \kappa^{-1}(T-t)^{\frac{\lambda-p}{p-q}} \qquad \forall\, t < T, \quad \omega_0 = const > 0.$$

довільний слабкий розв'язок (навіть *великий розв'язок*, якщо такий існує) u залишається обмеженим при $t \to T$ для довільних $x \in \Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : d(x) > \varepsilon\}$, де $\varepsilon = \varepsilon(\kappa) \to 0$ при $\kappa \to 0$.

Важливо підкреслити, що дослідження у роботі [75] проводились методом енергетичних оцінок, що детально описаний у підрозділі 1.3.

3.2 Постановка задачі

Розглянемо квазілінійне параболічне рівняння із виродженим потенціалом абсорбції:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \sum_{i=1}^{n}(a_i(t,x,u,\nabla u))_{x_i} = -b(t,x)|u|^{\lambda-1}u \quad \text{в } Q,\ \lambda > p \geqslant q > 0, \tag{3.9}$$

де циліндрична область $Q = (0,T) \times \Omega$, $0 < T < \infty$, область $\Omega \subset R^n$ ($n \geqslant 1$) — обмежена область з C^2–гладкою межею $\partial\Omega$. Функції $a_i(t,x,s,\xi)$ ($i = 1,2,...,n$) — неперервні функції, що задовольняють умовам коерцитивності та росту (2.3), (2.4). Тож модельним представником (3.9) є рівняння (3.1).

Функція b (потенціал абсорбції) є неперервною в області $[0,T] \times \overline{\Omega}$ та задовольняє умовам виродження:

$$b(t,x) > 0 \quad \text{в } [0,T) \times \overline{\Omega}, \quad b(t,x) = 0 \quad \text{на } \{T\} \times \Omega. \tag{3.10}$$

У цьому розділі досліджуються слабкі розв'язки рівняння (3.9).

Визначення 3.8. Функція $u(t,x) \in C_{loc}((0,T); L^{q+1}_{loc}(\Omega))$ називається **слабким розв'язком** рівняння (3.9), якщо:

i) $u(t,x) \in L^{p+1}_{loc}\Big((0,T); W^{1,p+1}_{loc}(\Omega)\Big) \cap L^{\lambda+1}_{loc}\left((0,T) \times \Omega\right)$;

ii) $(|u|^{q-1}u)_t \in L_{loc}^{\frac{p+1}{p}}\left((0,T);(W_c^{1,p+1}(\Omega))^*\right) + L_{loc}^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\left((0,T);(L_c^{\lambda+1}(\Omega))^*\right);$

iii) виконується інтегральна тотожність:

$$\int_a^b \langle (|u|^{q-1}u)_t, \eta\rangle dt +$$
$$+ \int_a^b \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla u)\eta_{x_i} + b(t,x)|u|^{\lambda-1}u\eta \right] dxdt = 0 \quad (3.11)$$

для довільних $0 < a < b < T$ та довільної функції

$$\eta \in L_{loc}^{p+1}\left((0,T);W_c^{1,p+1}(\Omega)\right) \cap L_{loc}^{\lambda+1}\left((0,T);L_c^{\lambda+1}(\Omega)\right),$$

де $W_c^{1,p+1}(\Omega)$, $L_c^{\lambda+1}(\Omega)$ є підпросторами $W^{1,p+1}(\Omega)$, $L^{\lambda+1}(\Omega)$ функцій з компактним носієм в Ω, а знаком $<,>$ позначається операція парування елементів з просторів $W_c^{1,p+1}(\Omega) \cap L_c^{\lambda+1}(\Omega)$ і $\left(W_c^{1,p+1}(\Omega) \cap L_c^{\lambda+1}(\Omega)\right)^*$.

Частковим випадком слабких розв'язків є, так звані, "великі" розв'язки, які представляють найбільший інтерес для вивчення.

Визначення 3.9. Функція $u(t,x)$ називається **великим розв'язком** рівняння (3.9), якщо вона є слабким розв'язком рівняння (3.9) та задовольняє таким нескінченим початковим та крайовим умовам:

$$u = \infty \text{ на } \{0\} \times \Omega, \text{ тобто } \lim_{t\to 0} u(t,x) = \infty \quad \forall\, x \in \Omega, \quad (3.12)$$

$$u = \infty \text{ на } (0,T) \times \partial\Omega, \text{ тобто } \lim_{d(x,\partial\Omega)\to 0} u(t,x) = \infty \quad \forall\, t \in (0,T), \quad (3.13)$$

Будемо розглядати такі умови на характер виродження потенціалу абсорбції:

$$a_1(t)g_1(d(x)) \le b(t,x) \le a_2(t)g_2(d(x)) \qquad \forall\,(t,x) \in [0,T) \times \Omega, \quad (3.14)$$

де $g_1(s) \le g_2(s)$ — довільні неспадні додатні функції, визначені для всіх $s > 0$.

Як і в розділі 2, при дослідженні рівняння (3.9) важливо враховувати відношенн між параметрами нелінійності p та q.

Застосовуючи результати, отримані в розділі 2, за допомогою методу енергетичних оцінок, можна отримати оцінки слабких розв'язків задачі (3.9), (3.10), (3.14). Суттєву роль при цьому відіграє поведінка міноранти a_1 з (3.14). Важливо відзначити, що будуть досліджені усі слабкі розв'язки відповідної задачі, незалежно від початкових та граничних умов. Тож за умови існування великих розв'язків, отримані результати справедливі і для них.

3.3 Експоненціальне виродження потенціалу абсорбції для квазіоднорідного рівняння теплопровідності

У цьому підрозділі розглядається рівняння (3.9) за умови $p = q$:

$$(|u|^{p-1}u)_t - \Delta_p(u) = -b(t,x)|u|^{\lambda-1}u \quad \text{в } Q,\ \lambda > p > 0, \tag{3.15}$$

Спираючись на результат підрозділу 2.3 можна отримати оцінку поведінки слабких розв'язків рівняння (3.15) з потенціалом абсорбції.

Теорема 3.8. Нехай u — довільний слабкий розв'язок (див. означення 3.8) рівняння (3.15) і нехай потенціал абсорбції b задовольняє умовам (3.10), (3.14). Покладемо, що характер виродження потенціалу абсорбції описується такою умовою на функцію a_1:

$$a_1(t) \geqslant c_0 \exp\left(-\omega(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall\, t < T,\ c_0 > 0,\ \omega = const > 0,\ \mu = const > 0, \tag{3.16}$$

Тоді для всіх $\frac{T}{2} < t < T$ справедлива енергетична оцінка:

$$h(t,s) + E(t,s) := \int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{p+1}dx + \int_{\frac{T}{2}}^{t}\int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1}dxd\tau \leqslant$$
$$\leqslant K_1 \min_{0<\bar{s}<s}\left\{\exp\left(K_2\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}(s-\bar{s})^{-\frac{p+1}{\mu}}\right)\cdot\left(\int_0^{\bar{s}} g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}dh\right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}}\right\}$$
$$\forall\, s \in (0, s_0'), \tag{3.17}$$

де сталі $K_1 < \infty$, $K_2 < \infty$ залежать тільки від відомих параметрів задачі, значення $s_0' > 0$ залежить від c_0.

Для доведення теореми введемо допоміжну конструкцію.

Нехай $\Omega(s)$ — сімейство підобластей з (2.9). Введемо до розгляду додаткове сімейство циліндричних підобластей області Q:

$$Q_\tau(s) := (s^r, \tau) \times \Omega(s) \quad \forall s \in (0, s_\Omega),\ \forall \tau < T,\ 1 < r < 1 + \frac{p\,(\lambda+1)}{p+1}. \quad (3.18)$$

Тепер визначимо енергетичні функції для розв'язку u рівняння (3.9) з урахуванням потенціалу абсорбції b та умов (3.14) для нього:

$$\begin{aligned} &\overline{h}_\tau(s) = \overline{h}_\tau^{(u)}(s) := \int_{\Omega(s)} |u(\tau, x)|^{p+1} dx, \quad 0 < \tau < T,\, 0 < s < s_\Omega, \\ &\overline{E}_\tau(s) = \overline{E}_\tau^{(u)}(s) := \int_{s^r}^{\tau} \int_{\Omega(s)} (|\nabla_x u|^{p+1} + a_1(t) g_1(d(x)) |u|^{\lambda+1}) dx dt. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Лема 3.8. Нехай u — довільний слабкий розв'язок (див. означення 3.8) рівняння (3.15) і нехай потенціал абсорбції b задовольняє умовам (3.10), (3.14). Тоді енергетичні функції (3.19) задовольняють співвідношення:

$$\begin{aligned} &B_\tau(s) := \overline{h}_\tau(s) + \overline{E}_\tau(s) \leqslant \widehat{C}\, \Phi(\tau) G_1(s) \quad \forall\, s \in (0, \hat{s}), \\ &\Phi(\tau) = \int_0^\tau a_1(t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dt, \quad G_1(s) = \left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh \right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

де $\widehat{C} = const > 0$, $\hat{s} \in (0, s_\Omega)$ залежать лише від відомих параметрів задачі.

Доведення. Зафіксуємо $s > 0$, $\delta > 0$ та введемо до розгляду Ліпшицеву зрізаючу функцію $\xi_{s,\delta}(h) : \xi_{s,\delta}(h) = 0$ для $h \leqslant s$, $\xi_{s,\delta}(h) = 1$ для $h > s + \delta$, $\xi_{s,\delta}(h) = \frac{h-s}{\delta}$ для $h : s < h < s+\delta$. Тепер побудуємо тестову функцію $\eta(t, x) = u(t, x)\xi_{s,\delta}(d(x))$ для інтегральної тотожності (3.11) з означення 3.8. Тепер, користуючись формулою інтегрування частинами (див. [46]), отримаємо:

$$\begin{aligned} &\frac{p}{p+1} \int_{\Omega(s)} |u(b, x)|^{p+1} \xi_{s,\delta}(d(x)) dx + \\ &\quad + \int_a^b \int_{\Omega(s)} \Big(\sum_{i=1}^n a_i(..., \nabla_x u) u_{x_i} + b(t, x)|u|^{\lambda+1} \Big) \xi_{s,\delta}(d(x)) dx dt = \\ &\qquad = \frac{p}{p+1} \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{p+1} \xi_{s,\delta}(d(x)) dx - \\ &\qquad\quad - \int_a^b \int_{\Omega(s)\setminus\Omega(s+\delta)} \sum_{i=1}^n a_i(..., \nabla_x u) u \xi_{s,\delta}(d(x))_{x_i} dx dt. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Далі у (3.21) візьмемо $b = \tau < T$, $a = s^r$. Тоді, спрямовуючи до нуля $\delta \to 0$ та користуючись умовами (2.3), (2.4), отримаємо нерівність:

$$\overline{h}_\tau(s) + \overline{E}_\tau(s) \leqslant c_1 \int_{s^r}^{\tau} \int_{\partial\Omega(s)} |\nabla_x u|^p |u| \, d\sigma dt + c_2 \overline{h}_{s^r}(s) \quad \forall\, s \in (0, s_\Omega), \quad (3.22)$$

де $c_1 < \infty$, $c_2 < \infty$ залежить тільки від відомих параметрів задачі. Оцінимо член у правій частині співвідношення (3.22). Застосовуючи нерівність Гельдера, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega(s)} |\nabla_x u|^p |u| d\sigma = \\
&\qquad = \int_{\partial\Omega(s)} |u| g_1(s)^{\frac{1}{\lambda+1}} a_1(t)^{\frac{1}{\lambda+1}} |\nabla_x u|^p a_1(t)^{-\frac{1}{\lambda+1}} g_1(s)^{-\frac{1}{\lambda+1}} d\sigma \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant c_3 \biggl(\int_{\partial\Omega(s)} |u|^{\lambda+1} a_1(t) g_1(s) d\sigma \biggr)^{\frac{1}{\lambda+1}} \times \\
&\qquad\qquad\qquad \times \biggl(\int_{\partial\Omega(s)} |\nabla_x u|^{p+1} d\sigma \biggr)^{\frac{p}{p+1}} a_1(t)^{-\frac{1}{\lambda+1}} g_1(s)^{-\frac{1}{\lambda+1}},
\end{aligned}$$

де $c_3 = (\mathrm{meas}\ \partial\Omega)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}$. Інтегруючи останню нерівність по t та застосовуючи нерівності Гельдера та Юнга, отримаємо:

$$\begin{aligned}
\int_{s^r}^{\tau} \int_{\partial\Omega(s)} |\nabla_x u|^p |u| d\sigma dt \leqslant c_4 g_1(s)^{-\frac{1}{\lambda+1}} \biggl(\int_{s^r}^{\tau} a_1(t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dt \biggr)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}} \times \\
\times \biggl(\int_{s^r}^{\tau} \int_{\partial\Omega(s)} \bigl(|\nabla_x u|^{p+1} + a_1(t) g_1(s) |u|^{\lambda+1} \bigr) d\sigma dt \biggr)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{(\lambda+1)(p+1)}}. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Оцінимо другий член правої частини (3.22), користуючись монотонністю функції $g_1(\cdot)$ та нерівністю Гельдера:

$$\begin{aligned}
&\overline{h}_{s^r}(s) = \\
&\quad = \int_{\Omega(s)} |u(s^r, x)|^{p+1} a_1(s^r)^{\frac{p+1}{\lambda+1}} g_1(d(x))^{\frac{p+1}{\lambda+1}} a_1(s^r)^{-\frac{p+1}{\lambda+1}} g_1(d(x))^{-\frac{p+1}{\lambda+1}} dx \leqslant \\
&\quad \leqslant c_5 \biggl(\int_{\Omega(s)} |u(s^r, x)|^{\lambda+1} a_1(s^r) g_1(d(x)) dx \biggr)^{\frac{p+1}{\lambda+1}} a_1(s^r)^{-\frac{p+1}{\lambda+1}} g_1(s)^{-\frac{p+1}{\lambda+1}}, \\
&\qquad\qquad c_5 = (\mathrm{meas}\ \Omega)^{\frac{\lambda-p}{\lambda+1}}. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Легко перевірити, що виконується нерівність:

$$-\frac{d}{ds}\overline{E}_\tau(s) \geqslant \int_{s^r}^{\tau}\int_{\partial\Omega(s)}\big(|\nabla_x u|^{p+1} + a_1(t)g_1(s)|u|^{\lambda+1}\big)d\sigma dt +$$
$$+ rs^{r-1}\int_{\Omega(s)}\big(|\nabla_x u(s^r,x)|^{p+1} + a_1(s^r)g_1(d(x))|u(s^r,x)|^{\lambda+1}\big)dx \quad (3.25)$$

для майже всіх $s : 0 < s < s_\Omega$. Застосовуючи оцінки (3.23), (3.24) та співвідношення (3.25), отримаємо з (3.22) нерівність:

$$B_\tau(s) := \overline{h}_\tau(s) + \overline{E}_\tau(s) \leqslant$$
$$\leqslant C_1 g_1(s)^{-\frac{1}{\lambda+1}}\Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}\Big(-\frac{d}{ds}\overline{E}_\tau(s)\Big)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{(\lambda+1)(p+1)}} +$$
$$+ C_2 g_1(s)^{-\frac{p+1}{\lambda+1}}\Big(-\frac{d}{ds}\overline{E}_\tau(s)\Big)^{\frac{p+1}{\lambda+1}} s^{-\frac{(r-1)(p+1)}{\lambda+1}} \quad \text{для м.в. } s \in (0, s_\Omega),$$
$$\Phi(\tau) = \int_0^\tau a_1(t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}dt. \quad (3.26)$$

де $C_2 = c_2 c_5\big(\min_{0\leqslant s\leqslant s_0} a_1(s^r)\big)^{-\frac{p+1}{\lambda+1}}$, $C_1 = c_1 c_4$. Тепер користуючись монотонним спаданням функції $\overline{h}_\tau(s)$, отримаємо шляхом нескладних розрахунків з (3.26) нерівність:

$$-\frac{d}{ds}B_\tau(s) \geqslant H(s, B_\tau(s)) := \min\Big\{H_\tau^{(1)}(s, B_\tau(s)), H_\tau^{(2)}(s, B_\tau(s))\Big\}$$
$$\text{для м.в. } s \in (0, s_\Omega),\ \forall \tau < T, \quad (3.27)$$

$$H_\tau^{(1)}(s, B_\tau(s)) := \left(\frac{g_1(s)^{\frac{1}{\lambda+1}}B_\tau(s)}{2C_1\Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}}\right)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}},$$
$$H_\tau^{(2)}(s, B_\tau(s)) := \left(\frac{g_1(s)^{\frac{p+1}{\lambda+1}}B_\tau(s)}{2C_2 s^{-\frac{(r-1)(p+1)}{\lambda+1}}}\right)^{\frac{\lambda+1}{p+1}}.$$

Тепер будемо знаходити розв'язки диференціальної нерівності (3.27) та отримаємо оцінку для $B_\tau(s)$. Для цього розглянемо область $D = D_\tau \subset \mathbb{R}^2$, як множину точок $(s, B) : 0 < s < s_\Omega$, $B > 0$, де функція $H(s, B)$ з (3.27) визначається першим членом правої частини співвідношення (3.27). Це означає, що

$$D_\tau = \left\{(s,B):\left(\frac{g_1(s)^{\frac{1}{\lambda+1}}B}{2C_1\Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}}\right)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} < \left(\frac{g_1(s)^{\frac{p+1}{\lambda+1}}B}{2C_2 s^{-\frac{(r-1)(p+1)}{\lambda+1}}}\right)^{\frac{\lambda+1}{p+1}}\right\}$$

Після нескладних трансформацій можемо переписати останнє означення таким чином:

$$\begin{gathered} D_\tau = \{(s,B) : B > B_\tau^{(0)}(s)\}, \\ B_\tau^{(0)}(s) = C_3 s^{-\frac{(r-1)(p+1)(1+p(\lambda+2))}{p(\lambda+1)(\lambda-p)}} g_1(s)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \Phi(\tau)^{-\frac{p+1}{p(\lambda+1)}}, \end{gathered} \tag{3.28}$$

де $C_3 = 2C_1^{-\frac{(p+1)^2}{p(\lambda-p)}} C_2^{\frac{1+p(\lambda+2)}{p(\lambda-p)}}$. Далі розглянемо усі можливі випадки розв'язку $B_\tau(s)$ у відповідності з областю D_τ. Перший впадок:

$$(s, B_\tau(s)) \in \overline{D}_\tau \text{ for all } s \in (0, s_\Omega). \tag{3.29}$$

У цій ситуації нерівність (3.27) приймає форму:

$$-\frac{d}{ds}B_\tau(s) \geqslant H_\tau^{(1)}(s, B_\tau(s)) = \left(\frac{g_1(s)^{\frac{1}{\lambda+1}}B_\tau(s)}{2C_1\Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}}\right)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} \quad \forall \tau < T, \quad \forall\, s \in (0, s_\Omega). \tag{3.30}$$

З припущення (3.29) випливає, що $B_\tau(0) = \infty$. Розв'язуючи диференціальну нерівність (3.30) з цією початковою умовою, легко отримуємо:

$$B_\tau(s) \leqslant B_\tau^{(1)}(s) := C_4\Phi(\tau)\left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}dh\right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} \quad \forall\, s \in (0, s_\Omega), \forall\, \tau < T, \tag{3.31}$$

де $C_4 = \left(\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}\right)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} (2C_1)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{\lambda-p}}$.

Тепер перевіримо, що оцінка (3.31) не заперечує припущенню про те, що $B_\tau(s) \in \overline{D}_\tau$. Для цього маємо гарантувати нерівність:

$$B_\tau^{(1)}(s) > B_\tau^{(0)}(s) \qquad \forall\, s \in (0, s_\Omega), \tag{3.32}$$

чи, відповідно до (3.28), (3.31):

$$C_4\Phi(\tau)\left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}dh\right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} >$$
$$> C_3 s^{-\frac{(r-1)(p+1)(1+p(\lambda+2))}{p(\lambda+1)(\lambda-p)}} g_1(s)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}\times$$
$$\times\,\Phi(\tau)^{-\frac{p+1}{p(\lambda+1)}} \quad \forall\, s\in(0,s_\Omega).$$

З монотонності функції $g_1(\cdot)$ випливає, що:

$$\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}dh \leqslant s g_1(s)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}$$

і тому

$$\left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}dh\right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} \geqslant s^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} g_1(s)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \quad \forall\, s\in(0,s_\Omega). \tag{3.33}$$

Як наслідок отримуємо, що для виконання (3.32) необхідно гарантувати нерівність:

$$C_4\Phi(\tau) > C_3 s^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}-\frac{(r-1)(p+1)(1+p(\lambda+2))}{p(\lambda+1)(\lambda-p)}}\Phi(\tau)^{-\frac{p+1}{p(\lambda+1)}},$$

що еквівалентна нерівності:

$$\Phi(\tau)\geqslant \left(C_3C_4^{-1}\right)^{\frac{p(\lambda+1)}{p(\lambda+1)+p+1}} s^{\frac{(1+p(\lambda+2))(p(\lambda+1)-(r-1)(p+1))}{(\lambda-p)(p(\lambda+1)+p+1)}}$$

Враховуючи припущення (3.18) для параметра r та монотонність функції $\Phi(\tau)$, отримуємо, що нерівність (3.33) виконується для довільних $\tau\in[\frac{T}{2},T)$ та довільних s з проміжку:

$$0<s<s_0,\quad s_0:=\min\{s_\Omega,\bar{s}_0\},\quad \bar{s}_0=\overline{C}_4\Phi\left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{(\lambda-p)(p(\lambda+1)+p+1)}{(1+p(\lambda+2))(p(\lambda+1)-(r-1)(p+1))}}, \tag{3.34}$$

де $\overline{C}_4=\left(C_3^{-1}C_4\right)^{\frac{p(\lambda+1)(\lambda-p)}{(1+p(\lambda+2))(p(\lambda+1)-(r-1)(p+1))}}$. Таким чином, співвідношення (3.32) справедливе для всіх $\tau>\frac{T}{2}$ та s з (3.34). Відтак оцінка (3.31) виконується, якщо задовольняється умова (3.29).

Припустимо тепер, що оцінка (3.31) не є справедливою для деякого $s \in (0, s_0)$. Тоді існує таке значення $s_1 \in (0, s_0)$, що

$$B_\tau(s_1) > B_\tau^{(1)}(s_1) \tag{3.35}$$

Якщо припустимо, що $B_\tau(s) > B_\tau^{(1)}(s)\ \forall\, s \in (0, s_1)$, тоді має також виконуватись умова (3.29). В силу попередніх припущень оцінка (3.31) виконується для всіх $s \in (0, s_1)$, що суперечить припущенню (3.35). Таким чином, залишається лише одна можливість: існує така точка $s_2 \in (0, s_1)$що виконується таке:

$$B_\tau(s_2) = B_\tau^{(1)}(s_2), \quad B_\tau(s) > B_\tau^{(1)}(s) \quad \forall\, s \in (s_2, s_1). \tag{3.36}$$

З (3.36) витікає, що існує така точка $\bar{s}_2 \in (s_2, s_1)$, що

$$\frac{d}{ds} B_\tau(\bar{s}_2) > \frac{d}{ds} B_\tau^{(1)}(\bar{s}_2), \quad B_\tau(\bar{s}_2) > B_\tau^{(1)}(\bar{s}_2). \tag{3.37}$$

Але, з іншого боку, відповідно до (3.30), (3.31) та (3.37), маємо:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds} B_\tau(\bar{s}_2) &\geqslant \frac{g_1(\bar{s}_2)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}}{C_5 \Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{1+p(\lambda+2)}}} B_\tau(\bar{s}_2)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} > \\ &> \frac{g_1(\bar{s}_2)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}}{C_5 \Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{1+p(\lambda+2)}}} B_\tau^{(1)}(\bar{s}_2)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} = -\frac{d}{ds} B_\tau^{(1)}(\bar{s}_2), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad C_5 := (2C_1)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} \end{aligned}$$

що суперечить (3.37), а отже і (3.36). Таким чином, оцінка (3.20) справедлива з $\widehat{C} = C_4$, $\hat{s} = \min\{s_\Omega, s_0\}$ для всіх $\tau \in \left(\frac{T}{2}, T\right)$.

Доведення теореми 3.8.

В силу умови (3.16) справедлива така оцінка для функції $\Phi(\cdot)$ з (3.26):

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0(t) := c_0 T \exp\left(\frac{\omega(p+1)}{\lambda+1}(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall t < T.$$

Тепер нерівність (3.20) приводить до оцінки:

$$\begin{aligned} & h(t,s) + E(t,s) \leqslant C_3 G_1(s) \Phi_0(t) \\ & \forall t \in (t_0, T), \quad \forall s : 0 < s < s'_\Omega := \min\left(s_\Omega, t_0^{\frac{1}{r}}\right), \quad t_0 = \frac{T}{2} \end{aligned} \tag{3.38}$$

де енергетичні функції $h(t,s)$, $E(t,s)$ визначені співвідношеннями (2.10), r визначено в (3.18). Зафіксуємо деяке значення $\bar{s} \in (0, s'_\Omega)$ та отримаємо з (3.38) аналог початкової енергетичної умови:

$$h(t,\bar{s}) + E(t,\bar{s}) \leqslant C_3 G_1(\bar{s}) \Phi_0(t) \quad \forall\, t \in (t_0, T). \tag{3.39}$$

Будемо тепер розглядати $u(t,x)$ як розв'язок рівняння (3.15) в області $(t_0,T)\times \Omega(\bar{s})$, $t_0 = 2^{-1}T$. Тоді користуючись стандартними міркуваннями та умовою додатності потенціалу абсорбції $b(t,x) \geqslant 0$, легко показати, що для функцій $h(t,s)$, $E(t,s)$ справедлива лема 2.1, а отже має місце система диференціальних нерівностей (2.24), (2.25).

Тепер приймемо умову (3.39) як початкову умову для системи (2.24), (2.25). Застосовуючи теорему 2.5, отримаємо аналог оцінки (2.16):

$$\begin{aligned} & h(t,s) + E(t,s) \leqslant c_0 c_1 T C_3 G_1(\bar{s}) \exp\left(\bar{c}_2 \omega^{\frac{p+\mu}{\mu}} (s-\bar{s})^{-\frac{p+1}{\mu}}\right) \\ & \forall\, t \in (2^{-1}T, T),\ \forall\, \bar{s} \in (0, s'_0)\, \forall\, s \in (\bar{s}, s'_0),\ s'_0 \text{ з } (2.16), \end{aligned}$$

де $\bar{c}_2 = c_2 \left(\frac{p+1}{\lambda+1}\right)^{\frac{p+\mu}{\mu}}$; c_2 та c_1 з (2.16). Оптимізуючи останню оцінку за вільним параметром $\bar{s} : 0 < \bar{s} < s < s'_0$, отримуємо:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant C_4 \min_{0<\bar{s}<s} G_1(\bar{s}) \exp\left(\bar{c}_2 \omega^{\frac{p+\mu}{\mu}} (s-\bar{s})^{-\frac{p+1}{\mu}}\right), \quad C_4 = c_0 c_1 T C_3, \tag{3.40}$$

що приводить до оцінки (3.17) з $K_1 = C_4$, $K_2 = \bar{c}_2$.

Приклад 3.1. Нехай $g_1(s) = \exp(-a s^{-\nu})$, $a = const > 0$, $\nu = const > 0$. Інтегруючи частинами, легко отримаємо рівність:

$$\int_0^s \exp\left(-b h^{-\nu}\right) \left(1 + \frac{\nu+1}{b\nu} h^\nu\right) dh = \frac{s^{\nu+1}}{b\nu} \exp\left(-b s^{-\nu}\right) \quad \forall\, s > 0,\ b > 0.$$

Тоді

$$\int_0^s \exp\left(-bh^{-\nu}\right) dh \geqslant b_1 s^{\nu+1} \exp\left(-bs^{-\nu}\right) \quad \forall\, s:\ 0 < s < \tilde{s} := \left(\frac{b\nu}{\nu+1}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \tag{3.41}$$

де $b_1 = (2b\nu)^{-1}$. Тепер, в силу (3.41) з $b = \frac{a(p+1)}{1+p(\lambda+2)}$, маємо:

$$G_1(s) \leqslant G_1^{(0)}(s) := B_1 s^{-\frac{(\nu+1)(1+p(\lambda+2))}{\lambda-p}} \exp\left(\frac{a(p+1)}{\lambda-p}\, s^{-\nu}\right)$$

$$\forall\, s:\ 0 < s < \tilde{s} := \left(\frac{a\nu(p+1)}{(1+p(\lambda+2))(\nu+1)}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \quad B_1 = \left(\frac{2a\nu(p+1)}{1+p(\lambda+2)}\right)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}}.$$

Отже оцінка (3.40) виконується з $G_1^{(0)}(\cdot)$ замість $G_1(\cdot)$.

Приклад 3.2.

Нехай $g_1(s) = as^{\nu}$, $a = const > 0$, $\nu = const \geqslant 0$.
Тоді $G_1(s) = a^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}\left(1 + \frac{\nu(p+1)}{1+p(\lambda+2)}\right)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} s^{-\frac{(\nu+1)(p+1)+p(\lambda+1)}{\lambda-p}}$. Тож оцінка (3.17) приводить до:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant K_3 \exp\left(K_2(1-\rho)^{-\frac{p+1}{\mu}}\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}} s^{-\frac{p+1}{\mu}}\right)\rho^{-b} s^{-b}$$

$$\forall\, t \in \left(\frac{T}{2}, T\right),\ \forall\, s \in (0, s_0'),\ \text{де}\ \ b = \frac{(\nu+1)(p+1)+p(\lambda+1)}{\lambda-p},$$

$$K_3 = K_3(a,\nu) = K_1 a^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}\left(1 + \frac{\nu(p+1)}{1+p(\lambda+2)}\right)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}}.$$

Тут $\rho = \rho\left(\frac{\mu b s^{\frac{p+1}{\mu}}}{K_2\omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}(p+1)}\right)$, де $\rho(\tau)$ — функція, що визначається умовами оптимізації. А саме, ця функція задовольняє рівняння:

$$\rho - \tau(1-\rho)^{\frac{p+\mu+1}{\mu}} = 0, \quad \forall \tau > 0.$$

Легко бачити, що $\rho(\cdot) : (0,\infty) \to (0,1)$ монотонно зростаюча функція. Більш того, $\rho(\tau)\tau^{-1} \to 1$ при $\tau \to 0$.

3.4 Степеневе виродження потенціалу абсорбції для квазіоднорідного рівняння теплопровідності

У цьому підрозділі досліджуються слабкі розв'язки рівняння (3.15). Спираючись на результат підрозділу 2.4 можна отримати оцінку поведінки слабких розв'язків рівняння (3.15), коли характер виродження потенціалу абсорбції є степеневим. Така оцінка для лінійного рівняння ($p = 1$) була отримана у роботі [58]. Результатом розділу є розширення цієї оцінки на нелінійний випадок.

Теорема 3.9. Нехай u — довільний слабкий розв'язок рівняння (3.15) і нехай потенціал абсорбції b задовольняє умовам (3.10), (3.14). Покладемо, що характер виродження потенціалу абсорбції описується такою умовою на функцію a_1:

$$a_1(t) \geqslant \kappa^{-1}(T-t)^{\mu} \quad \forall\, t < T, \kappa > 0,\ \mu > \frac{(p+2)(\lambda-p)}{(p+1)^2}. \tag{3.42}$$

Тоді для всіх $\frac{T}{2} < t < T$ має місце оцінка:

$$\begin{aligned} h(t,s) + E(t,s) &:= \int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{p+1} dx + \int_{\frac{T}{2}}^{t} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau \leqslant \\ &\leqslant K\,\kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}} \min_{0<\bar{s}<s} \left\{ (s-\bar{s})^{-\theta} G_1(\bar{s}) \right\} \qquad \forall\, s \in (0, \tilde{s}), \\ G_1(s) &:= \left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh \right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

де $\theta = \frac{(p+1)(\mu(p+1)-(\lambda-p))}{\lambda-p}$, стала $K < \infty$ залежить тільки від відомих параметрів задачі, $\tilde{s} > 0$, область $\Omega(s)$ визначена в (2.9).

Доведення. Легко бачити, що за умов теореми 3.9 справедлива лема 3.8. Тож маємо тепер оцінку (3.20) для енергетичних функцій $\overline{h}_\tau(s)$, $\overline{E}_\tau(s)$, визначених у (3.19). Згідно умови (3.42) можна отримати таку оцінку для функції $\Phi(\cdot)$ з (3.26):

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0(t) := K_1\,\kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}} (T-t)^{-\left(\mu\frac{p+1}{\lambda-p}-1\right)} \quad \forall t < T, \quad K_1 > 0. \tag{3.44}$$

Тепер нерівність (3.20) приводить до оцінки:

$$h(t,s)+E(t,s)\leqslant \widehat{C}\Phi_0(t)G_1(s) \quad \forall t\in(t_0,T),$$
$$\forall s: 0<s<\bar{s}_\Omega:=\min\left(s_\Omega, t_0^{\frac{1}{r}}\right), \quad (3.45)$$

де r — значення з (3.18), функції $E(t,s)$, $h(t,s)$ — з (2.10). Зафіксуємо деяке значення $\bar{s}\in(0,\bar{s}_\Omega)$, тоді з оцінки (3.45) можемо отримати "початкову" енергетичну оцінку:

$$h(t,\bar{s})+E(t,\bar{s})\leqslant \widehat{C}G_1(\bar{s})\Phi_0(t) \quad \forall\, t\in(t_0,T). \quad (3.46)$$

Будемо розглядати $u(t,x)$ як розв'язок рівняння (3.15) в області $(t_0,T)\times\Omega(\bar{s})$. Використовуючи (3.46) і (3.44), отримаємо:

$$h(t,\bar{s})+E(t,\bar{s})\leqslant K_2\,\kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}}G_1(\bar{s})(T-t)^{-\beta}$$
$$\forall\, t\in(t_0,T), \quad \beta=\mu\frac{p+1}{\lambda-p}-1, \quad (3.47)$$

де $K_2=\widehat{C}K_1$, а умова на μ з оцінки (3.42) дає умову для β: $\beta>\frac{1}{p+1}$.

Як і в попередньому підрозділі, спираючись на додатність потенціалу абсорбції, можемо стверджувати справедливість леми 2.1.

Тепер маємо систему (2.24), (2.25) для функцій $E_j(s)$, $h_j(s)$ та початкову умову (3.47). Повторюючи усі кроки доведення теореми 2.6 та враховуючи умову $\beta>\frac{1}{p+1}$, отримуємо оцінку:

$$h(t,s)+E(t,s)\leqslant GK_2\kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}}(s-\bar{s})^{-\theta}G_1(\bar{s})$$
$$\forall\, t\in(t_0,T),\ \forall\, s,\ \bar{s}: 0<\bar{s}<s<\tilde{s}:=\min\{\bar{s}_\Omega,\hat{s}\},$$

де G, $\hat{s}$ — значення з (2.111), θ — з (3.43). Оптимізуючи останню оцінку за вільним параметром $\bar{s}: 0<\bar{s}<s<\tilde{s}$, отримаємо оцінку (3.43) з $K=GK_2$.

Приклад 3.3. Нехай $g_1(s) = as^\beta$, $a = const > 0$, $\beta = const \geqslant 0$. Тоді

$$G_1(s) = \left(\int_0^s \left(ah^\beta\right)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh \right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} = a^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \left(\int_0^s h^{\frac{\beta(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} dh \right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} =$$

$$= a^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \left(\left(1 + \frac{\beta(p+1)}{1+p(\lambda+2)}\right)^{-1} s^{1+\frac{\beta(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} \right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} =$$

$$= a^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \left(1 + \frac{\beta(p+1)}{1+p(\lambda+2)}\right)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} s^{-\frac{p(\lambda+1)+(p+1)(\beta+1)}{\lambda-p}}$$

У цьому випадку оцінка (3.43) приводить до:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant K_1 \kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}} \min_{0<\bar{s}<s} \left\{ (s-\bar{s})^{-\frac{(p+1)(\mu(p+1)-(\lambda-p))}{\lambda-p}} \ \bar{s}^{-\frac{p(\lambda+1)+(p+1)(\beta+1)}{\lambda-p}} \right\} \quad \forall\, s \in (0,\tilde{s}),$$

де $K_1 = K_1(a,\beta) = K\, a^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \left(1 + \frac{\beta(p+1)}{1+p(\lambda+2)}\right)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}}$, K з (3.43). Оптимізуючи отриману оцінку, приходимо до:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant \overline{K}\, \kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}} s^{-\eta} \quad \forall\, t \in \left(\frac{T}{2}, T\right),\ \forall\, s \in (0,\tilde{s}), \tag{3.48}$$

де $\eta = \frac{(p+1)(\mu(p+1)-(\lambda-p))+p(\lambda+1)+(p+1)(\beta+1)}{\lambda-p}$, $\overline{K} = K_1 \frac{\eta^\eta}{\theta^\theta(\eta-\theta)^{\eta-\theta}}$.

Приклад 3.4. Розглянемо тепер лінійне рівняння за умов на потенціал абсорбції, отриманих у роботі [58]. А саме, нехай за умов теореми 3.9 виконується: $p = 1$, $g_1(s) = s^\beta$, $\beta = const \geqslant 0$, де функція g_1 з (3.14). Тоді, спираючись на розрахунки, отримані у попередньому прикладі, матимемо оцінку для енергетичних функцій:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant \overline{K}\, \kappa^{\frac{2}{\lambda-1}} s^{-\frac{2(2\mu+\beta+2)-(\lambda-1)}{\lambda-1}} \quad \forall\, t \in \left(\frac{T}{2}, T\right),\ \forall\, s \in (0,\tilde{s}), \tag{3.49}$$

де $\overline{K}$ з (3.49).

3.5 Степеневе виродження потенціалу абсорбції у випадку повільної дифузії

У цьому підрозділі розглядається рівняння (3.9) за такої умови на відношення параметрів p та q:

$$p > q \tag{3.50}$$

Спираючись на результат підрозділу 2.5 можна отримати оцінку поведінки слабких розв'язків такого рівняння.

Теорема 3.10. Нехай u — довільний слабкий розв'язок рівняння (3.9) з умовою (3.50) і нехай потенціал абсорбції b задовольняє умовам (3.10), (3.14). Покладемо, що характер виродження потенціалу абсорбції описується такою умовою на функцію a_1:

$$a_1(t) \geqslant \kappa^{-1}(T-t)^{\mu} \qquad \forall\, t < T, \quad \kappa = const > 0, \quad \frac{\lambda - p}{p} < \mu < \frac{\lambda - p}{p-q}. \tag{3.51}$$

Тоді для всіх $\frac{T}{2} < t < T$ виконується оцінка:

$$h(t,s) + E(t,s) := \int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{q+1} dx + \int_{\frac{T}{2}}^{t} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau \leqslant$$

$$\leqslant K\, \kappa^{\frac{q+1}{\lambda - p - \mu(p-q)}} \min_{0<\bar{s}<s} \left\{ (s-\bar{s})^{-\theta} G_1(\bar{s}) \right\} \qquad \forall\, s \in (0, \tilde{s}), \tag{3.52}$$

$$G_1(s) := \left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh \right)^{-\frac{(q+1)(1+p(\lambda+2))}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}},$$

де $\theta = \frac{(n(p-q)+(q+1)(p+1))(\mu(p+1)-(\lambda-p))}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}$, стала $K < \infty$ та значення $\tilde{s} > 0$ залежать тільки від відомих параметрів задачі, область $\Omega(s)$ визначена в (2.9).

Для доведення теореми введемо допоміжну конструкцію.

Нехай $\Omega(s)$ — сімейство підобластей з (2.9). Введемо до розгляду додаткове сімейство циліндричних підобластей області Q:

$$Q_\tau(s) := (s^r, \tau) \times \Omega(s) \quad \forall s \in (0, s_\Omega), \ \forall \tau < T,$$

$$1 < r < 1 + \frac{(\lambda+1)(p(\lambda+1) - q(p+1))}{(q+1)(\lambda - p)}. \tag{3.53}$$

Тепер визначимо енергетичні функції для розв'язку u рівняння (3.9) з урахуванням потенціалу абсорбції b та умов (3.14) для нього:

$$\begin{aligned}\overline{h}_\tau(s) = \overline{h}_\tau^{(u)}(s) &:= \int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{q+1}dx, \quad 0<\tau<T,\, 0<s<s_\Omega,\\ \overline{E}_\tau(s) = \overline{E}_\tau^{(u)}(s) &:= \int_{s^r}^{\tau}\int_{\Omega(s)} (|\nabla_x u(t,x)|^{p+1} + a_1(t)g_1(d(x))|u|^{\lambda+1})dxdt \quad (3.54)\end{aligned}$$

Лема 3.9. Нехай u — довільний слабкий розв'язок рівняння (3.9) і нехай потенціал абсорбції b задовольняє умовам (3.10), (3.14). Тоді енергетичні функції (3.54) задовольняють співвідношення:

$$\begin{aligned} &B_\tau(s) := \overline{h}_\tau(s) + \overline{E}_\tau(s) \leqslant \widehat{C}\,\Phi(\tau)G_1(s) \quad \forall\, s\in(0,\hat{s}),\\ &\Phi(\tau) = \int_0^\tau a_1(t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}dt, \quad G_1(s) = \left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}dh\right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} \end{aligned} \qquad (3.55)$$

де $\widehat{C} = const > 0$, $\hat{s}\in(0,s_\Omega)$ залежать лише від відомих параметрів задачі.

Доведення. Зафіксуємо $s>0$, $\delta>0$ та введемо до розгляду Ліпшицеву зрізаючу функцію $\xi_{s,\delta}(h) : \xi_{s,\delta}(h) = 0$ для $h\leqslant s$, $\xi_{s,\delta}(h) = 1$ для $h > s+\delta$, $\xi_{s,\delta}(h) = \frac{h-s}{\delta}$ для $h : s<h<s+\delta$. Тепер побудуємо тестову функцію $\eta(t,x) = u(t,x)\xi_{s,\delta}(d(x))$ для інтегральної тотожності (3.11) з означення 3.8. Тепер, користуючись формулою інтегрування частинами (див. [46]), отримаємо:

$$\begin{aligned} &\frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(b,x)|^{q+1}\xi_{s,\delta}(d(x))dx+\\ &\qquad +\int_a^b\int_{\Omega(s)}\Big(\sum_{i=1}^n a_i(...,\nabla_x u)u_{x_i} + b(t,x)|u|^{\lambda+1}\Big)\xi_{s,\delta}(d(x))dxdt =\\ &\qquad\qquad = \frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)}|u(a,x)|^{q+1}\xi_{s,\delta}(d(x))dx-\\ &\qquad\qquad -\int_a^b\int_{\Omega(s)\setminus\Omega(s+\delta)}\sum_{i=1}^n a_i(...,\nabla_x u)u\xi_{s,\delta}(d(x))_{x_i}dxdt. \quad (3.56)\end{aligned}$$

Далі у (3.56) візьмемо $b=\tau<T$, $a=s^r$. Тоді, спрямовуючи до нуля $\delta\to0$ та користуючись умовами (2.3), (2.4), отримаємо нерівність:

$$\overline{h}_\tau(s) + \overline{E}_\tau(s) \leqslant c_1\int_{s^r}^\tau\int_{\partial\Omega(s)}|\nabla_x u|^p|u|\,d\sigma dt + c_2\overline{h}_{s^r}(s) \quad \forall\, s\in(0,s_\Omega), \quad (3.57)$$

де $c_1 < \infty$, $c_2 < \infty$ залежить тільки від відомих параметрів задачі. Оцінимо член у правій частині співвідношення (3.57). Застосовуючи нерівність Гельдера, отримаємо:

$$\int_{\partial\Omega(s)} |\nabla_x u|^p |u| d\sigma = \int_{\partial\Omega(s)} |u| g_1(s)^{\frac{1}{\lambda+1}} a_1(t)^{\frac{1}{\lambda+1}} |\nabla_x u|^p a_1(t)^{-\frac{1}{\lambda+1}} g_1(s)^{-\frac{1}{\lambda+1}} d\sigma \leqslant$$
$$\leqslant c_3 \Big(\int_{\partial\Omega(s)} |u|^{\lambda+1} a_1(t) g_1(s) d\sigma \Big)^{\frac{1}{\lambda+1}} \Big(\int_{\partial\Omega(s)} |\nabla_x u|^{p+1} d\sigma \Big)^{\frac{p}{p+1}}$$
$$a_1(t)^{-\frac{1}{\lambda+1}} g_1(s)^{-\frac{1}{\lambda+1}},$$

де $c_3 = (\text{meas } \partial\Omega)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}$. Інтегруючи останню нерівність по t та застосовуючи нерівності Гельдера та Юнга, отримаємо:

$$\int_{s^r}^{\tau} \int_{\partial\Omega(s)} |\nabla_x u|^p |u| d\sigma dt \leqslant c_4 g_1(s)^{-\frac{1}{\lambda+1}} \Big(\int_{s^r}^{\tau} a_1(t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dt \Big)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}} \times$$
$$\times \Big(\int_{s^r}^{\tau} \int_{\partial\Omega(s)} \big(|\nabla_x u|^{p+1} + a_1(t) g_1(s) |u|^{\lambda+1} \big) d\sigma dt \Big)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{(\lambda+1)(p+1)}}. \quad (3.58)$$

Оцінимо другий член правої частини (3.57), користуючись монотонністю функції $g_1(\cdot)$ та нерівністю Гельдера:

$$\overline{h}_{s^r}(s) = \int_{\Omega(s)} |u(s^r,x)|^{q+1} a_1(s^r)^{\frac{q+1}{\lambda+1}} g_1(d(x))^{\frac{q+1}{\lambda+1}} a_1(s^r)^{-\frac{q+1}{\lambda+1}} g_1(d(x))^{-\frac{q+1}{\lambda+1}} dx \leqslant$$
$$\leqslant c_5 \Big(\int_{\Omega(s)} |u(s^r,x)|^{\lambda+1} a_1(s^r) g_1(d(x)) dx \Big)^{\frac{q+1}{\lambda+1}} a_1(s^r)^{-\frac{q+1}{\lambda+1}} g_1(s)^{-\frac{q+1}{\lambda+1}},$$
$$c_5 = (\text{meas } \Omega)^{\frac{\lambda-q}{\lambda+1}}. \quad (3.59)$$

Легко перевірити, що виконується нерівність:

$$-\frac{d}{ds}\overline{E}_\tau(s) \geqslant \int_{s^r}^{\tau} \int_{\partial\Omega(s)} \big(|\nabla_x u|^{p+1} + a_1(t) g_1(s) |u|^{\lambda+1} \big) d\sigma dt +$$
$$+ r s^{r-1} \int_{\Omega(s)} \big(|\nabla_x u(s^r,x)|^{p+1} + a_1(s^r) g_1(d(x)) |u(s^r,x)|^{\lambda+1} \big) dx \quad (3.60)$$

для майже всіх $s : 0 < s < s_\Omega$. Застосовуючи оцінки (3.58), (3.59) та співвідношення (3.60), отримаємо з (3.57) нерівність:

$$B_\tau(s) := \overline{h}_\tau(s) + \overline{E}_\tau(s) \leqslant C_1 g_1(s)^{-\frac{1}{\lambda+1}} \Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}} \Big(- \frac{d}{ds} \overline{E}_\tau(s) \Big)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{(\lambda+1)(p+1)}} +$$

$$+ C_2 g_1(s)^{-\frac{q+1}{\lambda+1}} \Big(- \frac{d}{ds} \overline{E}_\tau(s) \Big)^{\frac{q+1}{\lambda+1}} s^{-\frac{(r-1)(q+1)}{\lambda+1}} \quad \text{for a.a. } s \in (0, s_\Omega), \tag{3.61}$$

$$\Phi(\tau) = \int_0^\tau a_1(t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dt.$$

де $C_2 = c_2 c_5 \big(\min_{0 \leqslant s \leqslant s_0} a_1(s^r) \big)^{-\frac{q+1}{\lambda+1}}$, $C_1 = c_1 c_4$. Тепер користуючись монотонним спаданням функції $\overline{h}_\tau(s)$, отримаємо шляхом нескладних розрахунків з (3.26) нерівність:

$$- \frac{d}{ds} B_\tau(s) \geqslant H(s, B_\tau(s)) := \min \Big\{ H_\tau^{(1)}(s, B_\tau(s)), H_\tau^{(2)}(s, B_\tau(s)) \Big\}$$

$$\text{for a.a. } s \in (0, s_\Omega),\ \forall \tau < T, \tag{3.62}$$

$$H_\tau^{(1)}(s, B_\tau(s)) := \left(\frac{g_1(s)^{\frac{1}{\lambda+1}} B_\tau(s)}{2 C_1 \Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}} \right)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}},$$

$$H_\tau^{(2)}(s, B_\tau(s)) := \left(\frac{g_1(s)^{\frac{q+1}{\lambda+1}} B_\tau(s)}{2 C_2 s^{-\frac{(r-1)(q+1)}{\lambda+1}}} \right)^{\frac{\lambda+1}{q+1}}.$$

Тепер будемо знаходити розв'язки диференціальної нерівності (3.62) та отримаємо оцінку для $B_\tau(s)$. Для цього розглянемо область $D = D_\tau \subset \mathbb{R}^2$, як множину точок $(s, B) : 0 < s < s_\Omega$, $B > 0$, де функція $H(s, B)$ з (3.62) визначається першим членом правої частини співвідношення (3.62). Це означає, що

$$D_\tau = \left\{ (s, B) : \left(\frac{g_1(s)^{\frac{1}{\lambda+1}} B}{2 C_1 \Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}} \right)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} < \left(\frac{g_1(s)^{\frac{q+1}{\lambda+1}} B}{2 C_2 s^{-\frac{(r-1)(q+1)}{\lambda+1}}} \right)^{\frac{\lambda+1}{q+1}} \right\}$$

Після нескладних трансформацій можемо переписати останнє означення таким чином:

$$D_\tau = \{ (s, B) : B > B_\tau^{(0)}(s) \}, \tag{3.63}$$

$$B_\tau^{(0)}(s) = C_3 s^{-\frac{(r-1)(q+1)(1+p(\lambda+2))}{(\lambda+1)(p(\lambda+1)-q(p+1))}} g_1(s)^{-\frac{p(q+1)}{p(\lambda+1)-q(p+1)}} \Phi(\tau)^{-\frac{(\lambda-p)(q+1)}{(\lambda+1)(p(\lambda+1)-q(p+1))}},$$

де $C_3 = 2C_1^{-\frac{(p+1)(q+1)}{p(\lambda+1)-q(p+1)}} C_2^{\frac{1+p(\lambda+2)}{p(\lambda+1)-q(p+1)}}$. Далі розглянемо усі можливі випадки розв'язку $B_\tau(s)$ у відповідності з областю D_τ. Перший впадок:

$$(s, B_\tau(s)) \in \overline{D}_\tau \text{ for all } s \in (0, s_\Omega). \tag{3.64}$$

У цій ситуації нерівність (3.62) приймає форму:

$$-\frac{d}{ds}B_\tau(s) \geqslant H_\tau^{(1)}(s, B_\tau(s)) = \left(\frac{g_1(s)^{\frac{1}{\lambda+1}} B_\tau(s)}{2C_1 \Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}} \right)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}}$$
$$\forall \tau < T, \quad \forall s \in (0, s_\Omega). \tag{3.65}$$

З припущення (3.64) випливає, що $B_\tau(0) = \infty$. Розв'язуючи диференціальну нерівність (3.65) з цією початковою умовою, легко отримуємо:

$$B_\tau(s) \leqslant B_\tau^{(1)}(s) := C_4 \Phi(\tau) \left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh \right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}}$$
$$\forall s \in (0, s_\Omega), \forall \tau < T, \tag{3.66}$$

де $C_4 = \left(\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}\right)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} (2C_1)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{\lambda-p}}$.

Тепер перевіримо, що оцінка (3.66) не заперечує припущенню про те, що $B_\tau(s) \in \overline{D}_\tau$. Для цього маємо гарантувати нерівність:

$$B_\tau^{(1)}(s) > B_\tau^{(0)}(s) \qquad \forall s \in (0, s_\Omega), \tag{3.67}$$

чи, відповідно до (3.63), (3.66):

$$C_4 \Phi(\tau) \left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh \right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} >$$
$$> C_3 s^{-\frac{(r-1)(q+1)(1+p(\lambda+2))}{(\lambda+1)(p(\lambda+1)-q(p+1))}} g_1(s)^{-\frac{p(q+1)}{p(\lambda+1)-q(p+1)}} \times$$
$$\times \Phi(\tau)^{-\frac{(\lambda-p)(q+1)}{(\lambda+1)(p(\lambda+1)-q(p+1))}} \quad \forall s \in (0, s_\Omega).$$

З монотонності функції $g_1(\cdot)$ випливає, що:

$$\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh \leqslant s g_1(s)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}$$

і тому

$$\left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh\right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} \geqslant s^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} g_1(s)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \quad \forall\, s \in (0, s_\Omega). \tag{3.68}$$

Як наслідок отримуємо, що для виконання (3.67) необхідно гарантувати нерівність:

$$C_4\Phi(\tau) > C_3 s^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p} - \frac{(r-1)(q+1)(1+p(\lambda+2))}{(\lambda+1)(p(\lambda+1)-q(p+1))}} \times \\ \times\, g_1(s)^{\frac{(p-q)(1+p(\lambda+2))}{(\lambda-p)(p(\lambda+1)-q(p+1))}} \Phi(\tau)^{-\frac{(\lambda-p)(q+1)}{(\lambda+1)(p(\lambda+1)-q(p+1))}},$$

що еквівалентна нерівності:

$$\overline{\Phi}(\tau) \geqslant C_3 C_4^{-1} \overline{g}_1(s), \quad \overline{\Phi}(\tau) := \Phi(\tau)^{1+\frac{(\lambda-p)(q+1)}{(\lambda+1)(p(\lambda+1)-q(p+1))}}, \\ \overline{g}_1(s) := s^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p} - \frac{(r-1)(q+1)(1+p(\lambda+2))}{(\lambda+1)(p(\lambda+1)-q(p+1))}} g_1(s)^{\frac{(p-q)(1+p(\lambda+2))}{(\lambda-p)(p(\lambda+1)-q(p+1))}}$$

Оскільки параметр r задовольняє припущенню (3.53), то функція $\overline{g}_1(s)$ є монотонно зростаючою. Використовуючи монотонність функції $\overline{g}_1(s)$ та $\Phi(\tau)$ отримуємо, що нерівність (3.68) виконується для довільного $\tau \in [\frac{T}{2}, T)$ та довільного s, що задовольняють умові:

$$0 < s < s_0, \quad s_0 := \min\{s_\Omega, \bar{s}_0\}, \quad \bar{s}_0 : \overline{g}_1(\bar{s}_0) = C_3^{-1} C_4 \overline{\Phi}\left(\frac{T}{2}\right). \tag{3.69}$$

Таким чином, співвідношення (3.67) справедливе для всіх $\tau > \frac{T}{2}$ та s з (3.69). Відтак оцінка (3.66) виконується, якщо задовольняється умова (3.64).

Припустимо тепер, що оцінка (3.66) не є справедливою для деякого $s \in (0, s_0)$. Тоді існує таке значення $s_1 \in (0, s_0)$, що

$$B_\tau(s_1) > B_\tau^{(1)}(s_1) \tag{3.70}$$

Якщо припустимо, що $B_\tau(s) > B_\tau^{(1)}(s)\ \forall\, s \in (0, s_1)$, тоді має також виконуватись умова (3.64). В силу попередніх припущень оцінка (3.66) виконується для всіх $s \in (0, s_1)$, що суперечить припущенню (3.70). Таким чином, залишається лише одна можливість: існує така точка $s_2 \in (0, s_1)$що виконується таке:

$$B_\tau(s_2) = B_\tau^{(1)}(s_2), \quad B_\tau(s) > B_\tau^{(1)}(s) \quad \forall\, s \in (s_2, s_1). \tag{3.71}$$

З (3.71) витікає, що існує така точка $\bar{s}_2 \in (s_2, s_1)$, що

$$\frac{d}{ds} B_\tau(\bar{s}_2) > \frac{d}{ds} B_\tau^{(1)}(\bar{s}_2), \quad B_\tau(\bar{s}_2) > B_\tau^{(1)}(\bar{s}_2). \tag{3.72}$$

Але, з іншого боку, відповідно до (3.65), (3.66) та (3.72), маємо:

$$- \frac{d}{ds} B_\tau(\bar{s}_2) \geqslant \frac{g_1(\bar{s}_2)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}}{C_5 \Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{1+p(\lambda+2)}}} B_\tau(\bar{s}_2)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} >$$

$$> \frac{g_1(\bar{s}_2)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}}{C_5 \Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{1+p(\lambda+2)}}} B_\tau^{(1)}(\bar{s}_2)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} = - \frac{d}{ds} B_\tau^{(1)}(\bar{s}_2),$$

$$C_5 := (2C_1)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}}$$

що суперечить (3.72), а отже і (3.71). Таким чином, оцінка (3.55) справедлива з $\widehat{C} = C_4$, $\hat{s} = \min\{s_\Omega, s_0\}$ для всіх $\tau \in \left(\frac{T}{2}, T\right)$.

Доведення теореми 3.10.

В силу умови (3.51) можемо отримати таку оцінку для функції $\Phi(\cdot)$ з (3.61):

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0(t) := K_1\, \kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}} (T-t)^{-\left(\mu \frac{p+1}{\lambda-p} - 1\right)} \quad \forall t < T. \tag{3.73}$$

Тепер нерівність (3.55) приводить до оцінки:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant \widehat{C} \Phi(t) G_1(s) \quad \forall t \in (t_0, T), \tag{3.74}$$

$$t_0 = \frac{T}{2}, \forall s : 0 < s < \bar{s}_\Omega := \min\left(s_\Omega, t_0^{\frac{1}{r}} \right),$$

де r — значення з (3.53), функції $E(t,s)$, $h(t,s)$ — з (2.10). Зафіксуємо деяке значення $\bar{s} \in (0, \bar{s}_\Omega)$, тоді з оцінки (3.74) можемо отримати "початкову" енергетичну оцінку:

$$h(t,\bar{s}) + E(t,\bar{s}) \leqslant \widehat{C} G_1(\bar{s}) \Phi(t) \quad \forall\, t \in (t_0, T). \tag{3.75}$$

Будемо розглядати $u(t,x)$ як розв'язок рівняння (3.9) в області $(t_0, T) \times \Omega(\bar{s})$.

Використовуючи (3.75) і (3.73), отримаємо:

$$h(t,\bar{s}) + E(t,\bar{s}) \leqslant K_2\,\kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}} G_1(\bar{s})(T-t)^{-\beta} \quad \forall\, t \in (t_0,T), \quad \beta = \mu\frac{p+1}{\lambda-p} - 1, \tag{3.76}$$

де $K_2 = \widehat{C} K_1$, а умова на μ з оцінки (3.51) дає умову для $\beta : \frac{1}{p} < \beta < \frac{q+1}{p-q}$.

Спираючись на додатність потенціалу абсорбції, можемо стверджувати справедливість леми 2.1.

Тепер маємо систему (2.12), (2.13) для функцій $E_j(s)$, $h_j(s)$ та початкову умову (3.76). Повторюючи усі кроки доведення теореми 2.7 та враховуючи умову $\beta : \frac{1}{p} < \beta < \frac{q+1}{p-q}$, отримуємо оцінку:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant G K_2^{\frac{(q+1)(\lambda-p)}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}} \kappa^{\frac{q+1}{\lambda-p-\mu(p-q)}} (s-\bar{s})^{-\theta} G_1(\bar{s})^{\frac{(q+1)(\lambda-p)}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}}$$
$$\forall\, t \in (t_0,T),\ \forall\, s,\ \bar{s} : 0 < \bar{s} < s < \tilde{s} := \min\{\bar{s}_\Omega, \hat{s}_0\},$$

де G, $\hat{s}$ — значення з (2.161), θ — з (3.52). Оптимізуючи останню оцінку за вільним параметром $\bar{s} : 0 < \bar{s} < s < \tilde{s}$, отримаємо оцінку (3.52) з $K = G K_2^{\frac{(q+1)(\lambda-p)}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}}$.

Приклад 3.5. Нехай $g_1(s) = a s^{\varrho}$, $a = const > 0$, $\varrho = const \geqslant 0$. Тоді

$$G_1(s) = a^{-\frac{q+1}{\lambda-p-\mu(p-q)}} \left(1 + \frac{\varrho(p+1)}{\lambda p + 2p + 1)}\right)^{\frac{(q+1)(1+p(\lambda+2))}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}} s^{-\eta}, \tag{3.77}$$

де $\eta = \eta(\varrho) = \frac{(q+1)((\varrho+1)(p+1)+p(\lambda+1))}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}$. У цьому випадку оцінка (3.52) приводить до:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant \overline{K}\,\kappa^{\frac{q+1}{\lambda-p-\mu(p-q)}} s^{-(\theta+\eta)} \quad \forall\, t \in \left(\frac{T}{2}, T\right),\ \forall\, s \in (0,\tilde{s}),$$

де $\overline{K} = \overline{K}(a,\varrho) = K_1 a^{-\frac{q+1}{\lambda-p-\mu(p-q)}} \left(1 + \frac{\varrho(p+1)}{\lambda p+2p+1)}\right)^{\frac{(q+1)(1+p(\lambda+2))}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}} \frac{(\theta+\eta)^{\theta+\eta}}{\theta^\theta \eta^\eta}$, K_1, θ з (3.52), η з (3.77).

3.6 Про точність отриманих оцінок

Розглянемо рівняння (3.1) з умовою $1 = p > q$ в одномірному випадку. Більш зальний варіант цього випадку розглянуто у підрозділі 3.5. Будемо роглядати граничний випадок характеру виродження потенціалу асорбції, а саме:

$$(u^q)_t - u_{xx} = -b(t,x)(t)u^\lambda, \quad (t,x) \in (0,T) \times (0,\infty) \quad \lambda > 1 > q > 0, \tag{3.78}$$

де $u(t,x) \geqslant 0 \ \forall (t,x) \in (0,T) \times (0,\infty)$, а характер виродження потенціалу $b(t,x)$ задається формулою:

$$b(t,x) = a_1(t) = \kappa^{-1}(T-t)^{\frac{\lambda-1}{1-q}}. \tag{3.79}$$

Основним результатом цього підрозділу є пропозиція 3.1. Він показує, що такий потенціал абсорбції $a_1(t)$ є граничним, тобто область сингулярності за таких умов розповсюджується на деяку скінчену відстань всередину області задачі. Це доводить точність умов локалізації, отриманих А.Є. Шишковим у роботі [75].

Оцінка (3.52) для рівняння (3.78) за умови, що

$$b(t,x) = \overline{a}_1(t) = \kappa^{-1}(T-t)^\mu, \quad \lambda - 1 < \mu < \frac{\lambda-1}{1-q},$$

матиме вигляд:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant \overline{K}\, \kappa^{\frac{q+1}{\lambda-1-\mu(1-q)}} s^{-\bar{\theta}} \quad \forall\, t \in \left(\frac{T}{2}, T\right), \forall\, s \in (0, \tilde{s}),$$
$$\bar{\theta} = \frac{(q+1)(\lambda+3) + (n(1-q) + 2(q+1))(2\mu - \lambda + 1)}{2(\lambda - 1 - \mu(1-q))}$$

де $\overline{K} > 0$ залежить від K_1 з (3.52) та $\bar{\theta}$.

Легко бачити, що $\bar{\theta} \to \infty$ при $\mu \to \frac{\lambda-1}{1-q}$. Це вказує на те, що при наближенні до граничного випадку потенціалу абсорбції $a_1(t)$ область сингулярності виходить за межу області визначення і розовсюджується всередину області. А отже, отримана оцінка (3.52) є точною.

Пропозиція 3.1. Нехай $u(t,x)$ — довільний слабкий розв'язок рівняння (3.78) з потенціалом абсорбції вигляду (3.79) з такою умовою на параметр κ:

$$\kappa \geqslant \frac{1-q}{q(\gamma-\gamma^q)}$$

де q та λ — параметри рівняння (3.78), $\gamma > 1$ — довільна стала. Тоді розв'язок $u(t,x)$ задовольняє оцінку:

$$u(t,x) \geqslant \gamma(T-t)^{-\frac{1}{1-q}} \left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{1-q}} \quad \forall (t,x) \in (0,T)\times(0,a),$$

$a = \left(\frac{2(1+q)}{1-q}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Доведення. Розглянемо початково-крайову задачу для одномірного рівняння пористого середовища:

$$u_t - (u^m)_{xx} = 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times(0,\infty) \quad m > 1, \tag{3.80}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_0^m \in C^1(0,\infty)$$

$$u(t,0) = (T-t)^{-\frac{1}{m-1}}.$$

Відомо (див. [27], [41]), що для такого рівняння існує розв'язок Калашнікова типу "waiting time":

$$U(t,x) = (T-t)^{-\frac{1}{m-1}} \left(\left(1-\frac{x}{a}\right)_+\right)^{\frac{2}{m-1}}, \qquad a = \left(\frac{2m(m+1)}{m-1}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.81}$$

Рівняння (3.80) приводиться до вигляду (3.78) заміною $v = u^m$:

$$(v^q)_t - v_{xx} = 0, \qquad q = \frac{1}{m} < 1.$$

Для цього рівняння розв'зок (3.81) перепишеться таким чином:

$$V(t,x) = (T-t)^{-\frac{1}{1-q}}\psi_a(x), \qquad \psi_a(x) = \left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{1-q}}, \tag{3.82}$$

Розглянемо розв'язок $\overline{V} = \gamma V$, γ — деяка додатна стала, що буде визначена пізніше. Покажемо, що $\overline{V}$ є суброзв'язком рівняння (3.80), тобто покажемо, що будь-який розв'язок v рівняння (3.80) задовольняє умові:

$$v(t,x) \geqslant \overline{V}(t,x) \quad \forall (t,x) \in (0,T) \times (0,\infty).$$

Для цього достатньо показати, що існує таке значення $\gamma > 0$, при якому виконується нерівність:

$$(\overline{V}^q)_t - \overline{V}_{xx} \leqslant 0 \quad \forall (t,x) \in (0,T) \times (0,\infty).$$

Виконаємо деякі перетворення лівої частини цієї нерівності:

$$(\overline{V}^q)_t - \overline{V}_{xx} = \gamma^q (V^q)_t - \gamma V_{xx} = (\gamma^q - \gamma)(V^q)_t + \gamma\left((V^q)_t - V_{xx}\right) = (\gamma^q - \gamma)(V^q)_t.$$

В силу (3.82) $(V^q)_t > 0$. Очевидно, що при $\gamma > 1$ та в силу того, що $q < 1$, вираз $(\gamma^q - \gamma) \leqslant 0$. Тож, можемо стверджувати, що при $\gamma > 1$ розв'язок $\overline{V}$ є суброзв'язком рівняння (3.80).

Тепер покажемо, що функція $\overline{V}$ є суброзв'язком рівняння з абсорбцією (3.78).

$$(\overline{V}^q)_t - \overline{V}_{xx} + a_1(t)\overline{V}^\lambda = (\gamma^q - \gamma)(V^q)_t + \gamma^\lambda a_1(t) V^\lambda. \tag{3.83}$$

Оцінимо члени з правої частини останньої рівності.

$$(V^q)_t = \frac{q}{1-q}(T-t)^{-\frac{1}{1-q}} \left(\psi_a(x)\right)^q,$$
$$a_1(t)V^\lambda = \kappa^{-1}(T-t)^{-\frac{1}{1-q}} \left(\psi_a(x)\right)^\lambda.$$

Тепер рівність (3.83) перепишеться:

$$(\gamma^q - \gamma)(V^q)_t + \gamma^\lambda a_1(t)V^\lambda = (T-t)^{-\frac{1}{1-q}} \left(\psi_a(x)\right)^q \times$$
$$\times \left(\frac{q}{1-q}(\gamma^q - \gamma) + \kappa^{-1}\left(\psi_a(x)\right)^{\lambda - q}\right) \leqslant$$
$$\leqslant (T-t)^{-\frac{1}{1-q}} \left(\psi_a(x)\right)^q \left(\frac{q}{1-q}(\gamma^q - \gamma) + \kappa^{-1}\right).$$

Легко бачити, що при $\gamma > 1$ знайдеться таке $\kappa = \kappa(\gamma, q, \lambda) > 0$, що виконується нерівність:

$$\frac{q}{1-q}(\gamma^q - \gamma) + \kappa^{-1} \leqslant 0.$$

Тобто за умови на κ:

$$\kappa \geqslant \frac{1-q}{q(\gamma - \gamma^q)}$$

твердження теореми виконується.

Висновки до розділу 3

Розділ 3 присвячено вивченню поведінки слабких розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь з виродженим потенціалом абсорбції. У першому підрозділі представлено невеликий огляд літератури за тематикою. У другому підрозділі сформульовано задачу та представлено означення слабких та великих розв'язків. У третьому, четвертому та п'ятому підрозділі представлено основні результати розділу, що містять оцінки профілю довільних слабких розв'язків рівняння, що вивчається. Шостий підрозділ містить обгрунтування точності отриманих оцінок.

Усі основні результати цього розділу базуються на оцінках, отриманих у розділі 2. Тому роглянуто аналогічні випадки відношення між параметрами нелінійностей. Слід зауважити, що результати отримані для довільних слабких розв'язків рівняння, не залежно від початкових та граничних даних задачі. Безумовно, найбільший інтерес ці оцінки представляють для великих розв'язків, що приймають нескінчені значення у початковий момент часу та на межі. У цьому розділі не розглядється питання існування великих розв'язків задачі. Тим не менш, існування великих розв'язків для лінійного випадку було доведено, що дає змогу порівняти отримані результати у лінійному випадку.

До основних результатів цього розділу належать:

– Теорема 3.8, в якій отримано оцінку профілю слабких розв'язків рівняння нейтральної дифузії за умови експоненціального характеру виродження потенціалу абсорбції. Ці умови є близькими до критичних, тому отримана оцінка дозволяє відслідкувати фазу переходу області локалізації від межі всередину області.

– Лема 3.8, що містить деякий допоміжний результат, необхідний при доведенні теорем 3.8 та 3.9. Цей результат оцінює дифузію тепла в області.

– Приклади 3.1, 3.2, які ілюструють результат теореми 3.8 для часткових випадків виродження потенціалу абсорбції та дозволяють краще зрозуміти структуру отриманої оцінки.

– Теорема 3.9, в якій отримано оцінку профілю слабких розв'язків рівняння нейтральної дифузії за умови степеневого характеру виродження потенціалу абсорбції. Така степенева поведінка є дуже пологою для розглянутого рівняння та гарантує локалізацію. Цей результат є розширенням на нелінійний випадок іншого результату, отриманого зарубіжними вченими.

– Приклади 3.3, 3.4, що ілюструють результат теореми 3.9 для часткового випадку виродження потенціалу абсорбції та для лінійного випадку рівняння. Це дозволяє порівняти результати автора та попередні результати, отримані зарубіжними науковцями.

– Теорема 3.10, в якій отримано оцінку профілю слабких розв'язків рівняння повільної дифузії за умови степеневого характеру загострення граничного режиму.

– Лема 3.9, що містить деякий допоміжний результат, необхідний при доведенні теореми 3.10. Цей результат оцінює дифузію тепла в області.

– Приклад 3.5, що ілюструє результат теореми 3.10 для часткового випадку виродження потенціалу абсорбції.

– Теорема 3.1, що дозволяє стверджувати точність отриманих оцінок.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [19], [77], [84].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розвиненню метода енергетичних оцінок для дослідження поведінки розв'язків біля області сингулярності, який був запропонований та розроблений у роботах [45, 61–64, 68]. За допомогою цього методу отримано точні оцінки розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь для різних класів граничних режимів, досліджено залежність поведінки розв'язку від характеру загострення на межі. При цьому, цікавим та дуже важливим наслідком отриманих оцінок стала можливість дослідження рівнянь з потенціалом абсорбції та великих розв'язків таких рівнянь, тобто таких, що приймають нескінчені значення на всій параболічній області задачі. У цьому напрямку було досліджено поведінку усіх слабких (у тому числі і великих) розв'язків двічі нелінійних рівнянь з виродженим потенціалом абсорбції та отримано точні оцінок для них в залежності від характеру виродження потенціалу абсорбції. Такі результати є безумовно актуальними, оскільки вони розширюють існуючі результати на більш широкий клас рівнянь. Дуже важливим результатом дослідження є удосконалення нового методу енергетичних оцінок, що дозволяє розглядати дуже широкий клас рівнянь з сингулярними та нескінченими граничними даними.

У дисертації отримано такі нові результати:

– розвинуто метод енергетичних оцінок для дослідження поведінки слабких розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь;

– знайдено точну оцінку профілю слабких розв'язків початково-крайової задачі квазілінійного параболічного рівняння з локалізованими сингулярними граничними даними;

– досліджено залежність знайдених оцінок від характеру загострення граничного режиму;

– знайдено точну оцінку профілю слабких розв'язків квазілінійного параболічного рівняння з виродженим потенціалом абсорбції з довільними граничними та початковими даними;

– досліджено залежність знайдених оцінок від характеру виродження потенціалу абсорбції;

– досліджено різні випадки співвідношень між параметрами нелінійностей двічі нелінійного параболічного рівняння;

– проведено порівняльний аналіз отриманих оцінок з існуючими оцінками розв'язків лінійних та напівлінійних рівнянь.

Робота має теоретичний характер та все ж отримані результати можуть бути застосовані при вивченні сильно нестаціонарних фізичних процесів, для яких характерне явище локалізації тепла, магнітного поля та інших величин на визначених ділянках середи. Також важливим аспектом є метод, за допомогою якого проведено дослідження. Метод енергетичних оцінок може застосовуватись при вивченні нелінійних рівнянь у частинних похідних другого та високих порядків у багатомірних областях з сингулярними граничними даними, а також при вивченні великих розв'язків параболічних рівнянь з абсорбцією та логістичних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акулов В.Ф., Шишков А.Е. Об асимптотических свойствах решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях. *Матем. сб.* 1991. Т. 182, № 8. С. 1200–1210.

2. Антонцев С.Н. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений. *Докл. АН СССР.* 1981. Т. 260, № 6. С. 1289–1293.

3. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва: Недра, 1984. 211 с.

4. Баренблатт Г.И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. *Прикл. мат. мех.* 1952. Т. 16, № 2. С. 67—78.

5. Самарский А.А., Михайлов А.П., Курдюмов С.П., Галактионов В.А. Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1979. Т 19, № 6. С. 1451–1461.

6. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. О сравнении решений параболических уравнений. *Докл. АН СССР.* 1979. Т. 248, № 3. С. 586–589.

7. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Асимптотическая стадия режимов с обострением и эффективная локализация тепла в задачах нелинейной теплопроводности. *Дифференц. уравнения.* 1980. Т. 16, № 7. С. 1196–1204.

8. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация тепла в нелинейных средах. *Дифференц. уравнения.* 1981. Т. 17, № 10. С. 1826—1841.

9. Галактионов В.А., Самарский А.А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I. *Матем. сб.* 1982. Т. 118(160), № 3(7). С. 292—322.

10. Галактионов В.А., Самарский А.А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. II. *Матем. сб.* 1982. Т. 118(160), № 4(8). С. 435—455.

11. Галактионов В.А., Самарский А.А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. III. *Матем. сб.* 1983. Т. 120(162), № 1. С. 3–21.

12. Галактионов В.А., Самарский А.А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. IV. *Матем. сб.* 1983. Т. 121(163), № 2(6). С. 131–155.

13. Галактионов В.А. Об одной краевой задаче для нелинейного параболического уравнения $u_t = \Delta u^{\sigma+1} + u^{\beta}$. *Дифференц. уравнения.* 1981. Т. 17, № 5. С. 836–842.

14. Галактионов В.А. Об условиях отсутствия глобальных решений одного класса квазилинейных параболических уравнений. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1982. Т. 22, № 2. С. 322–338.

15. Галактионов В.А. О несуществовании и существовании глобальных решений краевых задач для квазилинейных параболических уравнений. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1982. Т. 22, № 6. С. 1369–1385.

16. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t = \nabla(u^{\sigma}\nabla u) + u^{\beta}$. *Докл. АН СССР.* 1980. Т. 252, № 6. С. 1362–1364.

17. Гладков А.Л. О задаче Коши в классах функций с произвольным ростом для некоторых нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка. *Дифференциальные уравнения и их приложения.* М.: Изд-во МГУ. 1984. С. 70—-75.

18. Дубинский Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.* М.: Изд-во ВИНИТИ. 1976. Т. 9. С. 5—-130.

19. Євгеньєва Є.О. Квазілінійні параболічні рівняння з виродженим потенціалом абсорбції. *Український математичний вісник.* 2018. Т. 15, № 4. С. 576–591.

20. Євгеньєва Є.О., Шишков А.Є. Метод енергетичних оцінок для дослідження поведінки слабких розв'язків рівняння повільної дифузії із сингулярними граничними даними. *Український математичний вісник.* 2019. Т. 16, № 2. С. 277–288.

21. Євгеньєва Є.О. Великі розв'язки квазілінійних параболічних рівнянь. *Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV* : матеріали Міжнародної конференції, присвяченої 100-річчю з дня народження В.К. Дзядика, 20–26 червня 2019 р., с. Світязь, Волинь, 2019. С. 76.

22. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью. *Письма в ЖЭТФ.* 1977. Т. 26, № 9. С. 620–624.

23. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Теория режимов с обострением в сжимаемых средах. *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.* 1986. Т. 28. С. 3–94.

24. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П. N- и S-режимы автомодельного сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением. *Прикладная механика и техническая физика.* 1977. № 1. С. 3–23.

25. Иванов А.В., Мкртычян П.З., Яегер В. Существование и единственность регулярного решения первой начально-краевой задачи для некоторого класса дважды нелинейных параболических уравнений. *Зап. научн. сем. ПОМИ.* 1994. Т. 213. С. 48–65.

26. Иванов А.В., Мкртычян П.З. О существовании непрерывных по Гёльдеру обобщенных решений первой краевой задачи для квазилинейных параболических уравнений, допускающих двойное вырождение. *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* 1990. Т. 182. С. 5–28.

27. Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка. *УМН.* 1987. Т. 42, № 2(254). С. 135–176.

28. Калашников А.С. О возникновении особенностей у решений уравнения нестационарной фильтрации. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1967. Т. 7, № 2, С. 440–444.

29. Калашников А.С. Задача Коши в классе растущих функций для уравнений типа нестационарной фильтрации. *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.* 1963. № 6. С. 17–27.

30. Калашников А.С. О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1976. Т. 16, № 3. С. 689–696.

31. Калашников А.С. О задаче Коши для вырождающихся параболических уравнений второго порядка с нестепенными нелинейностями. *Труды семинара им. И. Г. Петровского.* 1981. Вып. 6. С. 83—-96.

32. Калашников А.С. О характере распространения тепла в нелинейных средах с существенно нестационарными свойствами. *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математикаs механика.* 1985. № 4. С. 34–38.

33. Кружков С.Н. Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными. *Труды семинара им. И. Г. Петровского.* 1979. Вып. 5. С. 217—-272.

34. Ладыженская О.А., Солонников В.А.,Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Наука, 1967. 736 с.

35. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. Москва: Наука, 1981. 208 с.

36. Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1958. Т. 22, № 5. С. 667–704.

37. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений параболических граничных задач в неограниченных областях. *УМН.* 1976. Т. 31, № 6. С. 142—166.

38. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений. *УМН.* 1978. Т. 33, № 5. С. 7—76.

39. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами. *Докл. АН СССР.* 1979. Т. 247, № 2. С. 349—353.

40. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. *Докл. АН СССР.* 1975. Т. 223, № 6. С. 1344—1347.

41. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987. 480 с.

42. Самарский А.А., Соболь И.М. Примеры численного расчета температурных волн. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1963. Т. 3, № 4. С. 702–719.

43. Шишков А.Е. Классы единственности обобщенных решений краевых задач для параболических уравнений в неограниченных нецилиндрических областях. *Дифференциальные уравнения.* 1990. Т. 26, № 9. С. 1627—1633.

44. Шишков А.Е. Эволюция носителей решений с неограниченной энергией квазилинейных вырождающихся параболических уравнений произвольного порядка. *Матем. сб.* 1995. Т. 186, № 12. С. 151—172.

45. Шишков А.Е., Щелков А.Г. Граничные режимы с обострением для общих квазилинейных параболических уравнений в многомерных областях. *Матем. сб.* 1999. Т. 190, № 3. С. 447–479.

46. Alt H.W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations, *Math. Z.*. 1983. Vol. 183, № 3. P. 311–341.

47. Arai T. On the existence of solutions for doubly nonlinear parabolic equations. *Res. Repts Inst. Inform. Sci. Technol.* 1980. № 6. P. 47—57.

48. Aronson D.G., Caffarelli L.A. The initial trace of a solution of the porous media equation. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1983. Vol. 280, № 1. P. 351—-366.

49. Aronson D.G., Peletier L.A. Large time behaviour of solutions of the porous medium equation in bounded domains. *J. Diff. Equat.* 1981. Vol. 39, № 3. P. 378—-412.

50. Bamberger A. Etude d'une equation doublement non lineaire. *J. Funct. Anal.* 1977. Vol. 24, № 2. P. 148—-155.

51. Bandle C., Diaz G., Diaz J.I. Solutions d'equations de reaction-diffusion non lineaires explosant au bord parabolique. *C. R. Acad. Sci. Paris S'er. I Math.* 1994. Vol. 318, P. 455–460.

52. Basov N.G., Krohin O.N. Conditions of plasma heating by optic generators radiation *J. Exper. Tech. Phys.* 1964. Vol. 46, № 1. P. 171–180.

53. Benilan P., Grandall M.G., Pierre M. Solutions of the porous medium equation in RN under optimal conditions on initial values. *Indiana Univ. Math. J.* 1984. Vol. 33, № 1. P. 51—-87.

54. Brezis H., Friedman A. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions. *J. Math. Pures Appl.* 1983. Vol. 62, № 1. P. 73—-97.

55. Cortazar C., Elgueta M. Localization and boundedness of the solutions of the Neumann problem for a filtration equation. *Nonlinear Anal.* 1989. Vol. 13, No 1. P. 33—41.

56. Di Benedetto E. Degenerate parabolic equations. New York: Springer-Verlag, 1993. 387 p.

57. Diaz J.I., Veron L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1985. Vol. 290, № 2. P. 787—814.

58. Du Y., Peng R., Polaĉik P. The parabolic logistic equation with blow-up initial and boundary values. *Journal D'Analyse Mathematique.* 2012. Vol. 118. P. 297–316.

59. Esteban J.R., Vazquez J.L. On the equation of turbulent filtration in one-dimensional porous media. *Nonlinear Analysis-theory Methods and Applications.* 1986. Vol. 10, № 11. P. 1303–1325.

60. Evgenieva E. Boundary LS-Regimes for Quasilinear Parabolic Equations. *Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPHA)* : матеріали Міжнародної наукової конференції, 17–19 жовтня 2017 р., Черкаси, 2017. С. 60–61.

61. Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Saint-Venant's principle in blow-up for higher order quasilinear parabolic equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A.* 2003. Vol. 133 , № 5. P. 1075–1119.

62. Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations. *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci.* 2004. Vol. 460. P. 3299–3325.

63. Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Self-similar boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* 2005. Vol. 135A. P. 1195–1227.

64. Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Higher-order quasilinear parabolic equations with singular initial data. *Communications in Contemp. Math.* 2006. Vol. 8, № 3. P. 331–354.

65. Gilding B.H., Herrero M.A. Localization and blow-up of thermal waves in nonlinear heat conduction with peaking. *Math. Ann.* 1988. Vol. 282, № 2. P. 223—242.

66. Herrero M.A., Pierre M. The Cauchy problem for $u_t = \Delta u^m$ when $0 < m < 1$. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1985. Vol. 291, № 1. P. 145—-158.

67. Knowles J.K. On the spatial decay of solutions of the heat equation. *Z. Angew. Math. Phys.* 1971. Vol. 22. P. 1050—1056.

68. Kovalevsky A.A., Skrypnik I.I., Shishkov A.E. Singular Solutions in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations. *De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 24, De Gruyter, Basel*, 2016. 435 p.

69. Kurdyumov S.P. Nonlinear processes in dense plasma. *Proc. 2nd International Conference on Plasma Theory (Kiev 1974).* Kiev: Naukova Dumka. 1976. P. 278-287.

70. Marcus M., Shishkov A.E. Propagation of strong singularities in semilinear parabolic equations with degenerate absorption. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* 2016. Vol. XVI, № 5, P. 1019–1047.

71. Nuckolls I., Wood L., Thiessen A., Zimmerman G. Laser compression of matter to super-high densities. *VIII Intern. Quant. Electr. Conf. Montreal, May 1972, Nature.* 1972. Vol. 239, № 5368. P. 139–142.

72. Pattle R.E. Diffusion from an instantaneous point source with a concentration-dependent coefficient. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1959. Vol. 12. P. 407—409.

73. Al Sayed W., Veron L. On uniqueness of large solutions of nonlinear parabolic equations in nonsmooth domains. *Adv. Nonlinear Stud.* 2009. Vol. 9. P. 149–164.

74. Al Sayed W., Veron L. Solutions of some nonlinear parabolic equations with initial blow-up. *On the Notions of Solution to Nonlinear Elliptic Problems:*

Results and Development, Department of Mathematics, Seconda Universit'a di Napoli, Caserta. 2008. P. 1–23.

75. Shishkov A. Large solutions of parabolic logistic equation with spatial and temporal degeneracies. *DCDS, ser.S.* 2017. Vol. 10, № 10. P. 895–907.

76. Shishkov A.E., Veron L. Admissible initial growth for diffusion equations with weakly superlinear absorption. *Communications in Contemporary Mathematics.* 2016. Vol. 18, № 5. 1550089.

77. Shishkov A.E., Yevgenieva Ye.A. Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations. *Mathematische Nachrichten.* 2019. Vol. 292, № 6. P. 1349–1374.

78. Skrypnik I.I., Buryachenko K.O. Riesz potentials and pointwise estimates of solutions to anisotropic porous medium equation. *Nonlinear Analysis: Theory and Applications.* 2019. Vol. 178. P. 50–85.

79. Stampacchia G. Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Séminaire de Mathématiques Supérieures, (Été, 1965).* Montreal: Les Press. Univ. Montreal, 1965. № 16.

80. Toupin R.A. Saint-Venant's principle. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1965. Vol. 18. P. 83—96.

81. Veron L. A note on maximal solutions of nonlinear parabolic equations with bsorption. *Asymptot. Anal.* 2011, Vol. 72. P. 189–200.

82. Waid M.C. Second order nonlinear degenerate parabolic equations with nonlinear boundary conditions. *SIAM J. Math. Anal.* 1976. Vol. 7, № 3. P. 373—-383.

83. Yevgenieva Ye.A. Limiting profile of solutions of quasilinear parabolic equations with flat peaking. *Journal of Mathematical Sciences.* 2018. Vol. 234, № 1. P. 106–116.

84. Yevgenieva Ye.A. Propagation of singularities for large solutions of quasilinear parabolic equations. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.* 2019. Vol. 15, № 1. P. 131–144.

85. Yevgenieva Ye. Boundary regimes with singular peaking for quasilinear parabolic equations. *International Conference on Differential Equations* : materials of the International Conference Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20–24, 2016, Lviv, 2016. P. 120.

86. Yevgenieva Ye. Boundary regimes with singular peaking for quasilinear parabolic equations. *5th International conference for young scientists on Differential equations and Applications, dedicated to Yaroslav Lopatynsky* : materials of the 5th International conference for young scientists, dedicated to Yaroslav Lopatynsky, November 9–11, 2016, Kyiv, 2016. P. 151–152.

87. Yevgenieva Ye. Weak solutions of quasilinear parabolic equations with blow-up boundary regime. *Міжнародна літня математична школа пам'яті В.А. Плотнікова* : матеріали конференції, 11–16 червня 2018 р., м. Одеса. 2018. С. 36.

88. Yevgenieva Ye. Large solutions of quasilinear parabolic equations with absorption potential. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях* : матеріали Міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17—19 вересня 2018 р.,Чернівці, 2018. С. 41.

89. Yevgenieva Ye. Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations. *Нелінійні проблеми аналізу* : тези доповідей VI Всеукраїнської математичної конференції імені Б.В. Василишина, 26–28 вересня 2018 р., Івано-Франківськ – Микуличин, 2018. С. 89.

90. Yevgenieva Ye. Large solutions of quasilinear parabolic equations of diffusion - nonlinear degenerate absorption type. *Contemporary Analysis and Nonlinear Boundary Problems* : materials of the workshop dedicated to the 80th anniversary of B.V. Bazaliy and to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, October 17–18, 2018, Sloviansk, 2018. P. 14.

91. Yevgenieva Ye.A. Limiting profile of solutions for quasilinear parabolic equations with singular boundary data. *International Conference of Young Mathematicians* : Book of Abstracts, June 6—8, 2019, Kyiv, 2019. P. 45.

92. Yevgenieva Ye.A. Propagation of singularities for solutions of quasilinear parabolic equations with absorption term. *Geometry, Differential Equations and Analysis* : Book of Abstracts of International Conference dedicated to the 100th anniversary of A.V. Pogorelov, June 17–21, 2019, Kharkiv, 2019. P. 57–58.

93. Yevgenieva Ye.A. Boundary values with singular peaking for quasilinear heat equations. *6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications* : Book of Abstracts, June 18–20, 2019, Vinnytsia, 2019. P. 80–81.

Додаток А

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Євгеньєва Є.О. Квазілінійні параболічні рівняння з виродженим потенціалом абсорбції. *Український математичний вісник.* 2018. Т. 15, № 4. С. 576–591.

2. Yevgenieva Ye.A. Propagation of singularities for large solutions of quasilinear parabolic equations. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.* 2019. Vol. 15, № 1. P. 131–144.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar, Impact Factor: 0.531)

3. Євгеньєва Є.О., Шишков А.Є. Метод енергетичних оцінок для дослідження поведінки слабких розв'язків рівняння повільної дифузії із сингулярними граничними даними. *Український математичний вісник.* 2019. Т. 16, № 2. С. 277–288.

   Особистий внесок здобувача. Автору належать Теорема 1.1, Наслідок 2.1.

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

4. Yevgenieva Ye.A. Limiting profile of solutions of quasilinear parabolic equations with flat peaking. *Journal of Mathematical Sciences.* 2018. Vol. 234, № 1. P. 106–116.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar)

5. Shishkov A.E., Yevgenieva Ye.A. Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations. *Mathematische Nachrichten.* 2019. Vol. 292, № 6. P. 1349–1374.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar, Science Citation Index Expanded, Impact Factor: 0.847)

   Особистий внесок здобувача. Автору належать Theorem 1.2, Theorem 1.3, Corollary 1.4, Lemma 2.3, Lemma 5.2, Example 5.3, Example 5.4.

Наукові праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Yevgenieva Ye. Boundary regimes with singular peaking for quasilinear parabolic equations. *International Conference on Differential Equations* : materials of the International Conference Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20–24, 2016, Lviv, 2016. P. 120.

7. Yevgenieva Ye. Boundary regimes with singular peaking for quasilinear parabolic equations. *5th International conference for young scientists on Differential equations and Applications, dedicated to Yaroslav Lopatynsky* : materials of the 5th International conference for young scientists, dedicated to Yaroslav Lopatynsky, November 9–11, 2016, Kyiv, 2016. P. 151–152.

8. Evgenieva E. Boundary LS-Regimes for Quasilinear Parabolic Equations. *Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPHA)* : матеріали Міжнародної наукової конференції, 17–19 жовтня 2017 р., Черкаси, 2017. С. 60–61.

9. Yevgenieva Ye. Weak solutions of quasilinear parabolic equations with blow-up boundary regime. *Міжнародна літня математична школа пам'яті В.А. Плотнікова* : матеріали конференції, 11–16 червня 2018 р., м. Одеса. 2018. С. 36.

10. Yevgenieva Ye. Large solutions of quasilinear parabolic equations with absorption potential. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях* : матеріали Міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17—19 вересня 2018 р.,Чернівці, 2018. С. 41.

11. Yevgenieva Ye. Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations. *Нелінійні проблеми аналізу* : тези доповідей VI Всеукраїнської математичної конференції імені Б.В. Василишина, 26–28 вересня 2018 р., Івано-Франківськ – Микуличин, 2018. С. 89.

12. Yevgenieva Ye. Large solutions of quasilinear parabolic equations of diffusion - nonlinear degenerate absorption type. *Contemporary Analysis and Nonlinear Boundary Problems* : materials of the workshop dedicated to the 80th anniversary of B.V. Bazaliy and to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, October 17–18, 2018, Sloviansk, 2018. P. 14.

13. Yevgenieva Ye.A. Limiting profile of solutions for quasilinear parabolic equations with singular boundary data. *International Conference of Young Mathematicians* : Book of Abstracts, June 6—8, 2019, Kyiv, 2019. P. 45.

14. Yevgenieva Ye.A. Propagation of singularities for solutions of quasilinear parabolic equations with absorption term. *Geometry, Differential Equations and Analysis* : Book of Abstracts of International Conference dedicated to the 100th anniversary of A.V. Pogorelov, June 17–21, 2019, Kharkiv, 2019. P. 57–58.

15. Yevgenieva Ye.A. Boundary values with singular peaking for quasilinear heat equations. *6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Di-*

fferential Equations and Applications : Book of Abstracts, June 18–20, 2019, Vinnytsia, 2019. P. 80–81.

16. Євгеньєва Є.О. Великі розв'язки квазілінійних параболічних рівнянь. *Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV* : матеріали Міжнародної конференції, присвяченої 100-річчю з дня народження В.К. Дзядика, 20–26 червня 2019 р., с. Світязь, Волинь, 2019. С. 76.