Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»
Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Дзюба Марина Володимирівна

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНІ МАТРИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

Спеціальність 01.01.02 – «Диференціальні рівняння»
(Фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

________________ М.В. Дзюба

Науковий керівник Чуйко Сергій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Дзюба М. В. Диференціально-алгебраїчні матричні крайові задачі. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння (Фізико-математичні науки). — Державний вищий навчальний заклад «Донбаський державний педагогічний університет» Міністерства освіти і науки України; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2019.

Дисертація присвячена дослідженню проблеми знаходження конструктивних умов існування та побудові розв'язків

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} := \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad t \neq \tau_i, \ i = 1, \ 2, \ \dots \ , \ p,$$

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

Тут

$$\mathcal{A}Z'(t): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \quad \tau_0 := a$$

— матричний диференціально-алгебраїчний оператор, який за визначенням для будь-яких скалярних функцій $\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$ та сталих матриць $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ забезпечує рівність

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Аналогічно матричний оператор

$$\mathcal{B}Z(t): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$$

будемо далі називати алгебраїчним, якщо для будь-яких

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \quad \Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

має місце рівність

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Тут також $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}$ — неперервна для $t \neq \tau_i$ матриця та $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \sum_{i=0}^{p} \mathcal{L}_i Z(\cdot): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p,$$

де

$$\mathcal{L}_i Z(\cdot): \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_i, \tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad i = 0,\ \dots\ ,\ p-1,$$
$$\mathcal{L}_p Z(\cdot): \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_p, b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$$

— лінійні обмежені матричні функціонали. Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ — довільні натуральні числа.

Традиційне вивчення періодичних і нетерових крайових задач у критичних випадках було пов'язано з припущенням, що невідома являє собою вектор-функцію. У той же час дослідження різноманітних крайових задач, пов'язаних з численними застосуваннями в електроніці, механіці, теорії стійкості руху, біології та радіотехніці, теорії нелінійних коливань, передбачає, необхідність дослідження саме матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Таким чином, основною відмінністю даної дисертації є знаходження конструктивних умов існування та побудова розв'язків диференціально-алгебраїчних крайових задач у припущенні, що невідома являє собою матричну функцію. Матричний запис невідомої узагальнює вигляд, як матричного диференціально-алгебраїчного рівняння, так і крайової умови.

При дослідженні диференціально-алгебраїчних крайових задач суттєвою перешкодою для використання традиційних методів вивчення періодичних і нетерових крайових задач є той факт, що навіть задача Коші для диференціально-алгебраїчних систем, досліджена С. Кемпбелом, А.М. Самойленком, М.О. Перестюком, Ю.Е. Бояринцевим, В.Ф. Чистяковим та О.А. Бойчуком, взагалі кажучи, не розв'язна для довільних початкових значень. За допомогою апарату псевдообернених матриць в дисертації вдосконалено схему дослідження задач про існування та побудову розв'язків матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач.

Для матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$$

знайдені умови існування, а також конструкція найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{C}^1[a;b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}.$$

Тут

$$\mathcal{A}Z'(t): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

— матричний диференціально-алгебраїчний оператор, який, за визначенням, для будь-яких скалярних функцій

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$$

та сталих матриць $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ забезпечує рівність

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Аналогічно матричний оператор

$$\mathcal{B}Z(t): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

будемо далі називати алгебраїчним, якщо для будь-яких

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad \Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

має місце рівність

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Тут також $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$ — неперервна матриця та $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot)\mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

Взагалі кажучи, припускаємо

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \delta, \ \mu, \ \nu \in \mathbb{N}$$

— довільні натуральні числа.

На прикладі матричного рівняння Сильвестра

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i \ C \ R_i = B, \quad Q_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad R_i \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}, \quad B \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$$

продемонстровано ефективність отриманих умов розв'язності та схеми побудови розв'язків. Побудовано схему регуляризації матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра, яка суттєво відрізняється від класичного методу регуляризації Тихонова. На прикладі матричних періодичних та багатоточкових задач для диференціально-алгебраїчних рівнянь продемонстровано ефективність отриманих умов розв'язності та схеми побудови розв'язків.

Дисертаційна робота складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел і списку публікацій.

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету дослідження, подано короткий аналіз сучасного стану проблем, які досліджуються в дисертації, а також наведено загальний опис отриманих результатів.

Перший розділ присвячено огляду наукових праць із теорії лінійних матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач у критичних випадках, а також наведено необхідні відомості з теорії матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра. Проаналізовано сучасний стан і встановлено перспективність дослідження матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Встановлено, що умови існування та формули для побудови розв'язків матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра можуть бути застосовані при побудові схем регуляризації цих рівнянь, які суттєво відрізнятимуться від класичного методу регуляризації Тихонова. Встановлено, що умови існування та формули для побудови розв'язків матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра можуть бути застосовані при дослідженні матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач, а також отримані достатніх умов регуляризації за рахунок, як виродженого, так і невиродженого імпульсного збурення, нетерових крайових задач.

У *другому розділі*:

1. Для матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра отримані достатні умови та побудовано схему регуляризації, яка узагальнює та суттєво відрізняється від класичного методу регуляризації Тихонова.

2. Для лінійних нетерових крайових задач отримані достатні умови регуляризації за рахунок, як виродженого, так і невиродженого ім-

пульсного збурення, а також за допомогою імпульсного впливу типу "interface conditions".

3. Для лінійних матричних крайових задач отримані достатні умови регуляризації за допомогою збурення крайової умови. Побудовано узагальнений оператор Гріна та знайдено вигляд збуреної крайової умови матричної крайової задачі.

У *третьому розділі*:

1. Знайдені умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом, які узагальнюють традиційні результати, як для матричних диференціальних рівнянь, так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь.

2. У випадку нерозв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.14), (1.15), знайдені умови існування, а також конструкція найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

3. У випадку розв'язності матричної диференціально алгебраїчної крайової задачі (1.14), (1.15) для відповідного вибору матриці $\psi(t)$ знайдені умови існування, а також конструкція найкращого (у сенсі найменших квадратів) розв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

Ключові слова: диференціально-алгебраїчні крайові задачі, матричні рівняння, диференціально-алгебраїчні рівняння, псевдообернені матриці, узагальнений оператор Гріна.

ABSTRACT

Maryna V. Dziuba. Differential-algebraic matrix boundary value problems. — Qualification scientific paper, manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physics and Mathematics: Speciality — 01.01.02 Differential Equations (Physical and Mathematical Sciences). — State High Educational Institution «Donbass State Pedagogical University», the Ministry of Education and Science of Ukraine; V. N. Karazin Kharkiv National University, the Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The thesis research is devoted to the study of the problem of finding constructive conditions for the existence and construction of solutions

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} := \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

of matrix differential-algebraic boundary value problems

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad t \neq \tau_i,\ i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p,$$

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu},$$

where

$$\mathcal{A}Z'(t):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \quad \tau_0 := a$$

is linear matrix operator. By definition, for any scalar functions $\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$ and any constant matrices $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ this operator guarantees the equality

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Similarly, the matrix operator

$$\mathcal{B}Z(t):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$$

is called algebraic if, for any scalar functions

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\},$$

and any constant matrices $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ the following equality is true:

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Here,

$$F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$$

is a matrix continuous for $t \neq \tau_i$ and $\mathcal{L}Z(\cdot)$ is a bounded linear matrix functional such that:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \sum_{i=0}^{p} \mathcal{L}_i Z(\cdot): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ p,$$

where

$$\mathcal{L}_i Z(\cdot) : \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_i, \tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad i = 0,\ \ldots\ ,\ p-1,$$

$$\mathcal{L}_p Z(\cdot) : \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_p, b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$$

is a bounded linear matrix functionals and, moreover, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ are arbitrary positive integers.

The traditional study of periodic and Noetherian boundary-value problems in critical cases was associated with the assumption that the unknown is a vector-function. At the same time, the study of various boundary problems associated with numerous applications in electronics, mechanics, theory of motion stability, biology and radio engineering, the theory of nonlinear oscillations, implies the need to study the matrix of differential algebraic boundary problems. Thus, the main difference between this dissertation is the finding of constructive conditions of existence and construction of solutions of differential-algebraic boundary value problems in the assumption that the unknown is a matrix function. The matrix record of an unknown generalizes the form of a matrix differential-algebraic equation, as well as a boundary condition.

In the study of differential algebraic boundary value problems, the fact that even the Cauchy problem for differential algebraic systems is a significant obstacle for the use of traditional methods of studying periodic and Noetherian boundary value problems is investigated by S. Campbell, A. M. Samoilenko, M. O. Perestyuk, Yu. E. Boyarintsev, V. F. Chistyakov and O. A. Boichuk, in general, does not solve for arbitrary initial values. With the help of the device of pseudo-inverse matrices in the dissertation, the scheme of investigations of the problem of the existence and construction of solutions of matrix differential-algebraic boundary value problems was improved.

We use the scheme of the classical least-squares method for the construction of approximate pseudosolutions

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{C}^1[a;b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

of a linear matrix boundary-value problem for a system of differential-algebraic equations

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

Here,

$$\mathcal{A}Z'(t): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

is a matrix differential-algebraic operator guaranteeing (by definition), for any scalar functions

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$$

and constant matrices $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ the validity of the equality

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Similarly, a matrix operator

$$\mathcal{B}Z(t): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

is called algebraic if, for any

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad \Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

the equality

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t)$$

is true. Here, $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$ is a continuous matrix and $\mathcal{L}Z(\cdot)$ is the linear bounded matrix functional:

$$\mathcal{L}Z(\cdot): \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

Generally speaking, we can assume that

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \delta, \ \mu, \ \nu \in \mathbb{N}$$

are arbitrary natural numbers.

An example of the Sylvester matrix equations

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i \ C \ R_i = B, \quad Q_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad R_i \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}, \quad B \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$$

demonstrates the efficiency of the solvability conditions and the solutions for the construction of solutions. The scheme of regularization of the Lyapunov and Sylvester matrix equations is constructed, which differs significantly from the classical Tikhonov regularization method. On the example of matrix periodic and multipoint problems for differential algebraic equations, the efficiency of the obtained solvability conditions and the scheme of construction of solutions are demonstrated.

In *an introduction* it is justified a theme relevance, the research objective is formulated, the short analysis of a current state of problems which are investigated in a thesis is presented, and also the general exposition of the received outcomes is reduced.

The first section is devoted the review of scientific works from the theory of linear matrix is differential-algebraic boundary value problems in critical cases, and also necessary informations from the theory of the matrix equations of Lyapunov and Silvestra are reduced. The current state is analysed and perspectivity of research matrix differentially - algebraic boundary value problems is established. It is established that living conditions and formulas can be applied to construction of solutions of the matrix equations of Lyapunov and Sylvester at construction of schemes of a regularisation of these equations which will essentially differ from a classical method of a regularisation of Tikhonov. It is established that existence conditions and formulas can be applied to construction of solutions of the matrix equations of Lyapunov and Sylvester at research of matrix differentially-algebraic boundary value problems, and also the regularisations received sufficient conditions for the account, both singular and nonsingular impulse perturbation, Noether boundary value problems.

In *the second section*:

1. For Lyapunov's and Sylvester's matrix equations the received sufficient conditions the scheme of a regularisation which generalises also is constructed and essentially differs from a classical method of a regularisation of Tikhonov.

2. For linear Noether boundary value problems the received sufficient conditions of a regularisation for the account, both impulse perturbation, and also by means of impulse perturbation of type "interface conditions".

3. For linear matrix boundary value problems the received sufficient conditions of a regularisation by means of perturbation of a boundary condition. It is constructed Green's generalised operator and the aspect of a perturbed boundary condition of a matrix boundary value problem is discovered.

In *the third section*:

1. The discovered conditions of resolvability, and also design of the generalised operator of Green matrix it is differentialan algebraic boundary value problem with impulse perturbation which generalise traditional outcomes, both for matrix differential equations, and for differential - the algebraic equations.

2. In case of unsolvability matrix it is differential - an algebraic boundary value problem (1.14), (1.15), the discovered living conditions, and also a design of the best (in sense of least squares) pseudo-solutions of matrix differentially-algebraic boundary value problem.

3. In case of resolvability of matrix differentially algebraic boundary value problem (1.14), (1.15) for a corresponding choice of a matrix $\psi(t)$ the discovered living conditions, and also a design of the best (in sense of least squares) solutions of matrix differentially-algebraic boundary value problem.

Keywords: differential-algebraic boundary value problems, matrix equations, differential-algebraic equations, pseudo-inverse matrices, generalized Green operator.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у фахових виданнях України і виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз

1. Чуйко С. М. Про наближене розв'язання матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач методом найменших квадратів / С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова, М. В. Дзюба // Нелінійні коливання. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 423—436.

   (Входить до міжнародної наукометричної бази MathSciNet.)

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження умов існування, а також конструкції найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

2. Чуйко С. М. Метод найменших квадратів у теорії матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач / С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова, М. В. Дзюба // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 2. — С. 280—292.

   Переклад:
   Chuiko S. M. Least-squares method in the theory of matrix differential-algebraic boundary-value problems / S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova, M. V. Dzyuba // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — V. 70, N 2. — P. 319—333.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Zentralblatt MATH.)

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження умов існування і конструкції найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

3. Чуйко С. М. Матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача с импульсным воздействием / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Нелінійні коливання. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 564—573.

Переклад:

Chuiko S. M. Matrix differential-algebraic boundary-value problem with pulsed action / S. M. Chuiko, M. V. Dzyuba // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — V. 238, N 3. — P. 333—343.

(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH.)

4. Дзюба М. В. Про наближене розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті методом найменших квадратів / М. В. Дзюба // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. — 2017. — Т. 31. — С. 46—53.

5. Чуйко С. М. Регуляризація матричної крайової задачі за допомогою збурення крайової умови / С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, М. В. Дзюба // Буковинський математичний журнал. — 2016. — Т. 4, № 1—2. — С. 145—151.

   (Входить до міжнародної наукометричної бази Zentralblatt MATH.)

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження конструктивних умов регуляризації матричної крайової задачі за допомогою збурення крайової умови.

6. Чуйко С. М. Регуляризация линейной нетеровой краевой задачи при помощи импульсного воздействия типа "interface conditions"/ С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, М. В. Дзюба // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2016. — Т. 30. — С. 143—154.

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження для лінійних нетерових крайових задач достатніх умов регуляризації за допомогою імпульсного впливу типу "interface conditions".

7. Чуйко С. М. Про регуляризацію матричного рівняння Сильвестра / С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, М. В. Дзюба // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2015. — Т. 29. — С. 147—156.

Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження для матричного рівняння Сильвестра достатніх умов та схеми регуляризації.

Наукові праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

8. Chuiko S. About an approximate solution of matrix differential-algebraic boundary-value problems with a least-squares method / S. Chuiko, O. Nesmelova, M. Dzuba // Differential equations and control theory, 25–27 September 2018 : Book of Abstracts. — Kharkiv, 2018. — P. 18.

9. Чуйко С. Матрична імпульсна диференціально-алгебраїчна крайова задача / С. Чуйко, М. Дзюба // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях, 17–19 вересня 2018 р. : матеріали міжнар. наук. конф. — Чернівці, 2018. — С. 113.

10. Чуйко С. М. Матричная импульсная дифференциально-алгебраическая краевая задача / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова, 11–16 июня 2018 г. : тезисы докл. — Одесса, 2018. — С. 84.

11. Чуйко С. М. Матрична імпульсна диференціально-алгебраїчна крайова задача / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, 7–10 червня 2017 р. : тези доп. — Київ, 2017. — С. 109.

12. Чуйко С. М. Матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсним впливом / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Теорія наближення функцій та її застосування, 28 травня–3 червня 2017 р. : тези доп. міжнар. конф. — Слов'янськ, 2017. — С. 95.

13. Chuiko S. M. On a regularization method for solving matrix Sylvester equation / S. M. Chuiko, M. V. Dzuba // Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation, 24–26 May 2017 : Abstracts of XVIII Intern. Conf. Reports. — Kyiv, 2017. — P. 24.

14. Чуйко О. Про регуляризацію матричної крайової задачі збуренням крайової умови / О. Чуйко, М. Дзюба // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування, 28–30 вересня 2016 р. : матеріали міжнар. конф. — Чернівці, 2016. — С. 99.

15. Chuiko S. M. On regularization method for solving linear matrix Sylvester equation / S. M. Chuiko, M. V. Dzuba // International Conference on Differential Equations, dedicated to the 110-th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, 20–24 September 2016 : Book of Abstracts. — Lviv, 2016. — P. 39.

16. Чуйко С. М. Регуляризация матричного уравнения Сильвестра / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // XI Міжнародна математична літня школа «Алгебра, топологія, аналіз», 1–14 серпня 2016 р. : тези доп. — Одеса, 2016. — С. 142.

Особистий внесок здобувача. У спільних роботах із науковим керівником С. М. Чуйком, а також з О. В. Чуйко, О. С. Чуйком та О. В. Нєсмєловою автору дисертації належать результати, які полягають у знаходженні необхідних і достатніх умов існування розв'язків та регуляризації матричних крайових задач для диференціально-алгебраїчних рівнянь. Співавторам належить участь у постановці задач, консультації з вибору методології дослідження, обговорення отриманих результатів та висновків.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$	простір дійсних, неперервних матриць	с. 42
$\mathbb{C}^1_{m\times n}[a,b]$	простір неперервно диференційовних матриць	с. 41
$\left[E_n^m\right]_j$	матриця $\left[E_n^m\right]_j := \left[E_1^m\right]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n\times m\cdot n}$	с. 37
$\left[E_1^m\right]_j$	матриця $\left[E_1^m\right]_j := \left\{\delta_{ij}\right\}_{i=1}^m \in \mathbb{R}^{1\times m}$	с. 37
$K\left[f(s)\right](t)$	оператор Гріна задачі Коші	с. 62
$K\left[f(s);S\right](t)$	узагальнений оператор Гріна задачі Коші	с. 62
$G\left[f(s);\alpha\right](t)$	узагальнений оператор Гріна	с. 63
$\mathcal{M}[A]$	оператор : $\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$	с. 37
$\mathcal{M}^{-1}[A]$	оператор : $\mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$	с. 37
P_Q	ортопроектор матриці Q	с. 28
Q^+	псевдообернена за Муром-Пенроузом матриця	с. 27
$X_0(t)$	нормальна фундаментальна матриця	с. 61
$\Gamma\left(\varphi(\cdot)\right)$	матриця Грама системи векторів $\Phi(t)$	с. 120
δ_{ij}	символ Кронеккера	с. 37
Υ_m	вектор $\Upsilon_m := \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ ...\ 1\ 0\ 0\ ...\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* \in \mathbb{R}^{m^2\times 1}$	с. 37
$\Xi^{(j)}$	природний базис простору	с. 36

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Систематичному вивченню диференціально-алгебраїчних крайових задач присвячені роботи С. Кемпбелла, В. Ф. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка, В. П. Яковця, О. А. Бойчука та І. М. Черевка [17, 56, 62, 63, 112, 113, 114, 148, 149]. В той же час дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач започатковане значно раніше у роботах К. Вейєрштрасса, М. М. Лузіна та Ф. Р. Гантмахера [23, 46, 160]. Вивчення матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач пов'язане з численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху [56, 63, 112, 113, 114, 134, 135, 136, 142, 148, 149].

В останні роки значна увага приділяється дослідженню крайових задач, лінійна частина яких не є оборотним оператором, і, зокрема, тому випадку, коли число крайових умов не збігається з розмірністю розв'язку. Зауважимо, що у науковій літературі цей клас крайових задач дістав назву нетерових. Дослідженню різних аспектів теорії лінійних і слабконелінійних нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, систем із запізненням аргументу, з імпульсною дією, інтегро-диференціальних систем, матричних диференціальних рівнянь з допомогою апарату узагальнено-обернених операторів присвячені роботи А. М. Самойленка, О. А. Бойчука, В. П. Журавльова, С. М. Чуйка, С. А. Кривошеї, Л. І. Каранджулова та інших авторів [7, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 107, 109, 110, 133].

Лінійні та нелінійні матричні алгебраїчні рівняння [30] широко використовуються при розв'язанні диференціальних рівнянь Ріккаті та Бернуллі, в теорії стійкості руху, у теорії оптимального керування, варіаційному численні [33], а також у задачах на відновлення та покращення зображень [154, 155].

Отже, актуальною проблемою є перенесення результатів, отриманих у статтях та монографіях А. М. Самойленка, О. А. Бойчука та С. А. Кривошеї [11, 107, 109, 110], на лінійні крайові задачі для диференціально-алгебраїчних рівнянь, а також, на лінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, зокрема, знаходження необхідних та достатніх умов існування шуканих розв'язків, а також, конструкції оператора Гріна задачі Коші та узагальненого оператора Гріна.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є визначення конструктивних умов існування та побудова алгоритмів знаходження розв'язків матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач, для яких відповідний оператор не має оберненого.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є необхідні і достатні умови існування розв'язків матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач у критичних випадках.

Завданнями дослідження є:

– для матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра побудувати схему регуляризації;

– для наближеного розв'язання матричного рівняння Ріккаті побудувати ітераційну схему за класичною схемою методу найменших квадратів, а також знайти умови її збіжності до шуканого розв'язку;

– знайти умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом;

– для лінійних нетерових крайових задач отримати достатні умови регуляризації за рахунок, як виродженого, так і невиродженого імпульсного збурення, а також за допомогою імпульсного впливу типу «interface conditions»;

– у випадку нерозв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі знайти умови існування, а також конструкцію найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

Методи дослідження. У роботі суттєво використовується апарат псевдообернення (за Муром-Пенроузом) матриць [2, 11, 12, 23, 41, 65, 110, 146, 155], конструкції узагальнених операторів Гріна, побудовані в роботах А. М. Самойленка та О. А. Бойчука [10, 11, 16] та метод найменших квадратів, розвинений для лінійних крайових задач у роботах М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, М. П. Кравчука [22, 37, 40, 77]. При розв'язанні проблем регуляризації некоректно поставлених лінійних матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач суттєво використовується метод узагальнених операторів Гріна, побудований у роботах А. М. Самойленка та О. А. Бойчука [10, 11, 16, 110], а також техніка регуляризації некоректно поставлених крайових задач, розвинута у роботах С. Г. Крейна [38], А. М. Тихонова, В. Я. Арсеніна [61] та школою професора М. В. Азбелева [1]. Різним аспектам теорії крайових задач присвячені роботи А. М. Самойленка, М. О. Перестюка, Є. О. Гребенікова, Ю. О. Рябова, О. А. Бойчука, М. Й. Ронто та багатьох інших вчених [12, 26, 36, 45, 48, 49, 64]. Серед іноземних вчених теорії крайових задач присвячені роботи таких науковців як G. D. Birkhoff, G. A. Bliss, D. Bainov, R. Conti, J. Hale, W. T. Reid, O. Veivoda, S. Schwabik, T. Vogel, D. Wexler та ін. [131, 137, 138, 139, 140, 152, 156, 157, 158, 159], зокрема, теорії крайових задач для диференціально-алгебраїчних рівнянь: S. L. Campbell, Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова [17, 63, 108, 113, 115, 116].

Ці методи застосовуються при аналізі крайових задач для різних класів систем: крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, матричних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, для операторних рівнянь у функціональних просторах [52].

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист, наступні.

1) Для матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра побудовано схему регуляризації, яка суттєво відрізняється від класичного методу регуляризації Тихонова. Для наближеного розв'язання матричного рівняння Ріккаті побудовано ітераційну схему за класичною схемою методу найменших квадратів, а також знайдені умови її збіжності до шуканого розв'язку.

2) Знайдені умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом, які узагальнюють традиційні результати, як

для матричних диференціальних рівнянь, так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь. Для лінійних нетерових крайових задач отримані достатні умови регуляризації за рахунок, як виродженого, так і невиродженого імпульсного збурення, а також за допомогою імпульсного впливу типу "interface conditions".

3) У випадку нерозв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі знайдені умови існування, а також конструкція найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі, які узагальнюють традиційні результати, як для матричних диференціальних рівнянь, так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи здобувач отримала самостійно. З 16 наукових публікацій за темою дисертації роботу [31] підготовлено без співавторів. У спільних роботах із науковим керівником С.М. Чуйком автору дисертації належать основні результати, які полягають у знаходженні необхідних і достатніх умов існування розв'язків та регуляризації матричних крайових задач для диференціально-алгебраїчних рівнянь. У спільних роботах із О. В. Чуйко [93, 97] співавтору належить участь у постановці задач, консультації з вибору методології дослідження. У спільній роботі із О. С. Чуйком [94] співавтору належить участь у постановці задач. У спільних роботах із О.В. Нєсмєловою [103, 104] співавтору належить участь у постановці задач, обговорення отриманих результатів та висновків.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях і семінарах:

1. Міжнародній математичній літній школі «Алгебра, топологія, аналіз» (м. Одеса, 1—14 серпня 2016 р.);

2. International conference on Differential Equations, dedicated to the 110-th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Lviv, Ukraine, 20—24 September, 2016);

3. Міжнародній науковій конференції «Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування» (м. Чернівці, 28—30 вересня 2016 р.);

4. Спільних засіданнях семінару ІПММ НАН України та кафедри математики та інформатики ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» (4 травня 2017 р., 10 серпня 2017 р., 1 грудня 2017 р., 5 березня 2018 р. та 4 січня 2019 р.);

5. Міжнародній науковій конференції «Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation» (м. Київ, 24—26 травня 2017 р.);

6. Міжнародній науковій конференції «Теорія наближення функцій та її застосування» (м. Слов'янськ, 28 травня—3 червня 2017 р.);

7. Міжнародній науковій конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (м. Київ 7—10 червня 2017 р.);

8. Міжнародній науковій конференції пам'яті В.А. Плотнікова (м. Одеса, 11—16 червня 2018 р.);

9. The Seventh International Workshop «Constructive methods for nonlinear boundary value problems» (Miskolc, Hungary, 5—8 July, 2018);

10. Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках й інформаційних технологіях» (Чернівці, 17—19 вересня 2018 р.);

11. 3-rd International Scientific Conference «Differential equations and control theory» (Kharkiv, 25—27 September, 2018);

12. Засіданні семінару відділу диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України 8 квітня 2019 р. (керівник семінару академік НАН України А. М. Самойленко);

13. Засіданні семінару кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна 12 червня 2019 р. (керівник семінару доктор фіз.-мат. наук, професор В. І. Коробов).

Результати дисертації опубліковано в статтях та тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях та семінарах [69, 95, 98, 99, 101, 102, 122, 123, 130].

Публікації. Всі основні результати роботи в повній мірі опубліковані у фахових виданнях, пройшли апробацію на наукових конференціях та семінарах. За темою дисертації у наукових фахових виданнях України опубліковано 7 статей [31, 93, 94, 97, 100, 103, 104], дві з яких [100, 103] перевидано англійською мовою у виданнях, що реферуються в наукометричних базах Scopus, Web of Science, MathSciNet, Zentralblatt MATH, і 9 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 160 найменувань, та двох додатків. Повний обсяг роботи – 166 сторінок. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 23 сторінки.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях у якісній теорії диференціальних рівнянь, електроніці, механіці та теорії стійкості руху. Результати роботи успішно використовуються в навчальному процесі в ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет».

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота здійснювалась згідно з планом наукової роботи ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», планом досліджень спільної із ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» міжвідомчої лабораторії «Крайові задачі теорії диференціальних рівнянь» Інституту математики НАН України та пов'язана з тематичним планом фундаментальної наукової роботи «Конструктивні методи аналізу матричних крайових задач для систем диференціальних, функціонально-диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь і теорії наближень» (реєстраційний №0118U003390), яка фінансується з коштів державного бюджету й виконується в ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет».

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику — доктору фіз.-мат. наук, професору С.М. Чуйку за постійну увагу до роботи та обговорення одержаних результатів, а також вдячна академіку НАН України, доктору фіз.-мат. наук, професору А.М. Самойленку і члену-кореспонденту НАН України, доктору фіз.-мат. наук, професору О.А. Бойчуку за увагу до роботи.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ З ТЕОРІЇ ЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

1.1 Огляд літератури з теорії лінійних матричних рівнянь

Лінійні та нелінійні матричні алгебраїчні рівняння [30] широко використовуються при розв'язанні диференціальних рівнянь Ріккаті та Бернуллі [42, 107, 147], в теорії стійкості руху [24, 60, 132], у теорії оптимального керування, варіаційному численні [33], а також у задачах на відновлення та покращення зображень [154, 155]. Позначимо x, y дійсні n-вимірні вектори. Як відомо, множина Ω_n усіх дійсних n-вимірних векторів утворює лінійний простір [19].

Означення 1.1.1. *Нормою вектора $x \in \Omega_n$ називають дійсне число, яке задовольняє наступним аксіомам:*

1° $||x|| \geq 0$; $||x|| = 0$, *тоді і тільки тоді, коли* $x = 0$;

2° $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ *(аксіома однорідності);*

3° $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(нерівність трикутника).*

Норму вектора у просторі Ω_n можна визначити, як

$$||x||_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Означення 1.1.2. *Норму $||x||_p$ для $p \geq 1$ називають нормою Гельдера, зокрема, для $p = 2$ — евклидовою нормою:*

$$||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Означення 1.1.3. *Лінійний простір Ω_n усіх дійсних n-вимірних векторів із визначеною на ньому нормою називають нормованим простором $\mathbb{R}^n$.*

Означення 1.1.4. *Лінійний простір дійсних n-вимірних векторів із нормою $||x||_2$ називають евклідовим простором $\mathbb{E}^n$.*

Означення 1.1.5. *Норму $||x||_p$ для $p \to \infty$ називатимемо максимальною нормою:*

$$||x||_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Означення 1.1.6. *Норму $||x||_2$ називають сферичною, а норму $||x||_\infty$ — кубічною.*

Позначимо A та B дійсні $(\alpha \times \beta)$-вимирні матриці. Множину $\Omega_{\alpha\times\beta}$ усіх дійсних $(\alpha \times \beta)$-вимірних матриць утворює лінійний простір [19].

Означення 1.1.7. *Нормою матриць $A \in \Omega_{\alpha\times\beta}$ та $B \in \Omega_{\alpha\times\beta}$ називатимемо дійсне число, яке задовольняє аксіомам:*

1° $||A|| \ge 0$; $||A|| = 0$, *тоді і тільки тоді, коли* $A = 0$;

2° $||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$ *(аксіома однорідності);*

3° $||A + B|| \le ||A|| + ||B||$ *(нерівність трикутника).*

Означення 1.1.8. *За умови $||AB|| \le ||A|| \cdot ||B||$ норму матриць $A \in \Omega_{\alpha\times\beta}$ та $B \in \Omega_{\beta\times\gamma}$ назвемо мультиплікативною. У випадку $||Ax|| \le ||A|| \cdot ||x||$ норми матриці $A \in \Omega_{\alpha\times\beta}$ та вектора $x \in \Omega_\beta$ назвемо узгодженими.*

Норму матриці $A := (a_{ij})$ у просторі $\Omega_{\alpha\times\beta}$ можна визначити, як [19]

$$||x||_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{\alpha,\beta} |a_{ij}|^2}.$$

Означення 1.1.9. *Норму $||x||_F$ матриці $A \in \Omega_{\alpha\times\beta}$ називатимемо евклідовою, а також нормою Фробеніуса.*

Означення 1.1.10. *Норму $||x||$ матриці $A \in \Omega_{\alpha\times\beta}$ за умови*

$$||A|| := \max_{||x||=1} ||Ax||$$

називають підпорядковані нормі вектора $x \in \Omega_\beta$.

Лема 1.1.1. *Норма Фробеніуса узгоджена з евклидовою нормою, але не підпорядкована їй.*

Лема 1.1.2. *Спектральна норма*

$$||A||_2 := \sqrt{\lambda^*}, \quad \lambda^* := \max_{1\le j\le k} \lambda_j, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \ \lambda_k \in \sigma(A^*A)$$

підпорядкована евклидовій нормі.

Лема 1.1.3. *Норма*

$$||A||_1 := \max_{1\le j\le \beta} \sum_{i=1}^{\alpha} |a_{ij}|$$

матриці $A \in \Omega_{\alpha\times\beta}$ *підпорядкована нормі* $||x||_1$.

Лема 1.1.4. *Норма*

$$||A||_\infty := \max_{1\le i\le \alpha} \sum_{j=1}^{\beta} |a_{ij}|$$

матриці $A \in \Omega_{\alpha\times\beta}$ *підпорядкована нормі* $||x||_\infty$.

И, нарешті, нам стануть в нагоді позначення [35, с. 160]

$$||x(t)||_{\mathbb{C}[a,b]} := \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|,$$

крім того

$$||x(t)||_{\mathbb{C}^1[a,b]} := \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |x'(t)|,$$

$$||x(t)||_{\mathbb{C}^2[a,b]} := \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |x''(t)|.$$

Наведемо необхідні відомості з лінійної алгебри.

Означення 1.1.11. *Для матриці* $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *матрицю* $Q^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *за умов*

$$QQ^+Q = Q, \quad Q^+QQ^+ = Q^+,$$

$$(QQ^+)^* = QQ^+, \quad (Q^+Q)^* = Q^+Q$$

називатимемо псевдооберненою за Муром – Пенроузом.

Оскільки псевдообернена за Муром – Пенроузом матриця може бути однозначно знайдена з наведених рівностей, їх називають рівняннями Мура – Пенроуза [23].

Означення 1.1.12. *Кістковим розвиненням матриці Q називають добуток $Q = R \cdot S$, де матриця $R \in \mathbb{R}^{m\times n_1}$ та матриця $S \in \mathbb{R}^{n_1\times n}$ — повного рангу:*

$$\operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} R = \operatorname{rank} S = n_1.$$

Для знаходження псевдооберненої матриці стане у нагоді формула

$$Q^+ = S^+R^+ = S^*(SS^*)^{-1}(R^*R)^{-1}R^*,$$

де $Q = RS$ — кісткове розвинення матриці Q. Псевдообернена матриця існує для будь – якої матриці, крім того, вона єдина [21, 23].

Означення 1.1.13. *Ортопроектором $P_Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ для матриці $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ називатимемо матрицю [10, 110]*

$$QP_Q = 0, \quad [P_Q]^* = P_Q, \quad [P_Q]^2 = P_Q.$$

Ортопроектори P_Q та P_{Q^*} можна знайти за допомогою формули

$$P_{Q^*} = I_m - QQ^+, \;\; P_Q = I_n - Q^+Q.$$

Означення 1.1.14. *Нуль-простором $\mathbb{N}(Q)$ матриці $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ називають множину векторів $c \in \mathbb{R}^n$, для яких $Qc = 0$.*

Аналогічно визначимо нуль-простір $\mathbb{N}(Q^*)$:

$$\mathbb{N}(Q^*) = \Big\{c \in \mathbb{R}^m : \; Q^*c = 0\Big\}.$$

Теорема 1.1.1. *Алгебраїчна система*

$$Qc = b, \quad b \in \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

з матрицею $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ розв'язна тоді й тільки тоді, коли

$$P_{Q^*}b = 0. \tag{1.2}$$

За умови (1.2), розв'язок системи (1.1) має зображення

$$c = Q^+b + P_Q\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Позначимо $Q = R \cdot S$ — кісткове розвинення матриці Q; тут $(m \times r)-$ матриця R та $(r \times n)-$ матриця $S-$ повного рангу:

$$\text{rank } Q = \text{rank } R = \text{rank } S = r.$$

Як відомо [4], будь-яка $(m \times n)-$ вимірна матриця Q у певному базисі може бути зображена у вигляді

$$Q = \Phi \cdot J_r \cdot \Psi, \quad \text{rank } Q := r; \tag{1.4}$$

тут $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ та $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невироджені матриці,

$$J_r := \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = V_r \cdot W_r, \quad V_r := \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, \quad W_r := \begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}.$$

Розвинення (1.4) у подальшому будемо називати стандартним розвиненням матриці Q. Стандартне розвинення суттєво відрізняється від сингулярного розвинення [113]. Для одержання стандартного розвинення стане в нагоді наступне твердження [121].

Лема 1.1.5. *Будь-яка матриця $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ може бути зображена у вигляді (1.4); тут $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ та $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невироджені матриці:*

$$\Phi := \begin{pmatrix} R & P_{R^*_{m-r}} C_{m-r} \end{pmatrix}, \quad \Psi := \begin{pmatrix} S \\ C_{n-r} P_{S_{n-r}} \end{pmatrix};$$

матриця $P_{R^*_{m-r}} \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)}$ утворена з $m-r$ лінійно незалежних стовпців ортопроектора $P_{R^*} : \mathbb{R}^{m \times m} \to \mathbb{N}(R^*)$, матриця

$$P_{S_{n-r}} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$$

утворена з $n-r$ лінійно незалежних рядків ортопроектора

$$P_S : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{N}(S),$$

крім того $C_{m-r} \in \mathbb{R}^{(m-r) \times (m-r)}$ та $C_{n-r} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ — довільні невироджені матриці.

Припустимо, що матриці $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ та $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ невідомі; їх визначають рівняння

$$\Phi V_r = R, \quad W_r \Psi = S; \tag{1.5}$$

тут $(m \times r)-$ матриця R та $(r \times n)-$ матриця $S-$ повного рангу, які визначають кісткове розвинення матриці Q. Перше з рівнянь (1.5) рівнозначне наступному: $V_r^* \Phi^* = R^*$. Обидва рівняння (1.5) розв'язні внаслідок повноти рангу матриць V_r та W_r і визначають сім'ю матриць

$$\Phi = RV_r^* + C_v P_{V_r^*}, \quad \Psi = W_r^* S + P_{W_r} C_w;$$

тут $P_{V_r^*}$ та P_{W_r} — ортопроектори:

$$P_{V_r^*}: \ \mathbb{R}^{r \times r} \to \mathbb{N}(V_r^*), \quad P_{W_r}: \ \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{N}(W_r),$$

$C_v^{(1)} \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)}$ та $C_w^{(1)} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ — довільні матриці. Зазначимо, що матриці $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ та $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ квадратні:

$$\Phi = \begin{pmatrix} R & C_v^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} S \\ C_w^{(1)} \end{pmatrix},$$

причому $(m \times r)-$ матриця R та $(r \times n)-$ матриця S — повного рангу, тому за умови повноти рангу матриць $C_v^{(1)}$, $C_w^{(1)}$ та у випадку лінійної незалежності стовпців матриці R від стовпців матриці $C_v^{(1)}$, а також у випадку лінійної незалежності рядів матриці S від рядків матриці $C_w^{(1)}$, — невироджені. Очевидно, що стовпці матриці R ортогональні до стовпців матриці-ортопроектора P_{R^*}, а отже, лінійно незалежні, тому якщо $C_{m-r} \in \mathbb{R}^{(m-r) \times (m-r)}$ — довільна невироджена матриця, то добуток $P_{R^*_{m-r}} C_{m-r}$ — матриця повного рангу, при цьому стовпці матриці R ортогональні до стовпців матриці $P_{R^*_{m-r}} C_{m-r}$, а отже, лінійно незалежні. Таким чином отримуємо невироджену матрицю Φ. Аналогічно, рядки матриці S ортогональні до стовпців матриці-ортопроектора P_S, а отже, лінійно незалежні, тому якщо $C_{n-r} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ — довільна невироджена матриця, то добуток $C_{n-r} P_{S_{n-r}}$ — матриця повного рангу, при цьому рядки матриці S ортогональні до стовпців матриці $C_{n-r} P_{S_{n-r}}$, а отже, лінійно незалежні. Таким чином отримуємо невироджені матриці Φ та Ψ, які утворюють розвинення (1.4). Таким чином, лему доведено.

Стандартне розвинення (1.4) можна застосувати для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (1.1). Дійсно, згідно лемі 1.1.5, матриця $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ у певному базисі може бути зображена у вигляді (1.4):

$$Q = \Phi \cdot J \cdot \Psi, \quad \operatorname{rank} Q := \rho \leq \min(m, n);$$

тут $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ та $\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невироджені матриці,

$$J := \begin{pmatrix} I_\rho & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Система алгебраїчних рівнянь (1.1) равнозначна наступній

$$Jx = \beta, \quad \beta := \Phi^{-1}b, \quad x := \Psi c.$$

Позначимо вектори

$$x_\rho := \begin{pmatrix} I_\rho & O \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}^\rho, \quad x_d := \begin{pmatrix} O & I_d \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}^d, \quad d := m - \rho$$

та

$$\beta_\rho := \begin{pmatrix} I_\rho & O \end{pmatrix} \beta \in \mathbb{R}^\rho, \quad \beta_d := \begin{pmatrix} O & I_d \end{pmatrix} \beta \in \mathbb{R}^d.$$

У нових позначеннях рівняння (1.1) розв'язне за умови $\beta_d = 0$ для довільного $x_d \in \mathbb{R}^d$ у вигляді $x_\rho = \beta_\rho$. У вихідних позначеннях рівняння (1.1) розв'язне за умови

$$\mathcal{P}_{Q^*}\, b = 0, \quad \mathcal{P}_{Q^*} := \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_d \end{pmatrix} \Phi^{-1}.$$

Позначивши матрицю

$$\mathcal{P}_{Q_d^*} := \begin{pmatrix} O & I_d \end{pmatrix} \Phi^{-1} \in \mathbb{R}^{d\times m},$$

отримуємо необхідну і достатню умову розв'язності рівняння (1.1):

$$\mathcal{P}_{Q_d^*}\, b = 0; \tag{1.6}$$

при цьому

$$x = J^*\Phi^{-1}b + \begin{pmatrix} O & I_r \end{pmatrix}^* c_r,$$

отже

$$c = \Psi^{-1}J^*\Phi^{-1}b + \Psi^{-1}\begin{pmatrix} O & I_r \end{pmatrix}^* c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Позначимо матриці

$$Q^\dagger := \Psi^{-1}J^*\Phi^{-1}, \quad \mathcal{P}_{Q_r} := \Psi^{-1}\begin{pmatrix} O & I_r \end{pmatrix}^*.$$

Умови розв'язності та структуру загального розв'язку системи (1.1) визначає наступне твердження.

Теорема 1.1.2. *Задача про знаходження розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду (1.1) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова (1.6), при цьому загальний розв'язок системи (1.1) має зображення*

$$c = Q^{\dagger} b + \mathcal{P}_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут

$$Q = \Phi \cdot J \cdot \Psi, \quad \operatorname{rank} Q := \rho$$

— стандартне розвинення матриці $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ та $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ й $\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невироджені матриці.

Зазначимо, що традиційна умови розв'язності системи (1.1) рівнозначна до теореми 1.1.2, оскільки матриці

$$\mathcal{P}_{Q^*} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad \mathcal{P}_Q := \Psi^{-1} \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

визначають ортопроектори

$$P_{Q^*}: \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*), \quad P_Q: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q),$$

причому, взагалі кажучи,

$$\mathcal{P}_{Q^*} \neq P_{Q^*}, \quad \mathcal{P}_Q \neq P_Q.$$

Лема 1.1.6. *Ортопроектор P_Q пов'язаний з проектором $\mathcal{P}_Q$ наступним чином*

$$P_Q = \mathcal{P}_Q\, S, \quad S := \begin{pmatrix} O_{\rho\times\rho} & O_{\rho\times r} \\ S_{r\times\rho} & S_{r\times r} \end{pmatrix}, \quad S_{r\times\rho} \in \mathbb{R}^{r\times\rho}, \quad S_{r\times r} \in \mathbb{R}^{r\times r};$$

матриці $S_{r\times\rho}$ та $S_{r\times r}$ визначають співвідношення

$$P_Q^2 = P_Q, \quad P_Q^* = P_Q.$$

Дійсно,

$$Q\mathcal{P}_Q := \Phi \cdot J \cdot \Psi \cdot \Psi^{-1} \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_r \end{pmatrix} = \Phi \cdot \begin{pmatrix} I_\rho & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_r \end{pmatrix} = 0,$$

отже, матриця $\mathcal{P}_Q$ являє собою проектор $\mathcal{P}_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$. Невідому матрицю $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ шукатимемо у вигляді

$$S := \begin{pmatrix} S_{\rho\times\rho} & S_{\rho\times r} \\ S_{r\times\rho} & S_{r\times r} \end{pmatrix}.$$

Оскільки добуток $\mathcal{P}_Q\, S$ не залежить від блоків $S_{\rho\times\rho}$ та $S_{\rho\times r}$, має сенс покласти $S_{\rho\times\rho} = 0$ та $S_{\rho\times r} = 0$. Таким чином, ортопроектор P_Q являє собою лінійну комбінацію стовпців проектора $\mathcal{P}_Q$.

Лема 1.1.7. *Ортопроектор P_{Q^*} пов'язаний з матрицею $\mathcal{P}_{Q^*}$ наступним чином*

$$P_{Q^*} = R\,\mathcal{P}_{Q^*}, \quad R := \left(\Phi^{-1}\right)^* \begin{pmatrix} O_{\rho\times\rho} & O_{\rho\times d} \\ U_{d\times\rho} & U_{d\times d} \end{pmatrix};$$

матриці

$$U_{r\times\rho} \in \mathbb{R}^{r\times\rho}, \quad U_{r\times r} \in \mathbb{R}^{r\times r}$$

визначають співвідношення

$$P_{Q^*}^2 = P_{Q^*}, \quad P_{Q^*}^* = P_{Q^*}.$$

Невідому матрицю R визначає рівність

$$Q^* R\,\mathcal{P}_{Q^*} = \Psi^* J^* \Phi^* R \begin{pmatrix} O_{\rho\times\rho} & O_{\rho\times d} \\ O_{d\times\rho} & I_d \end{pmatrix} \Phi^{-1}.$$

Позначимо матрицю $U := \Phi^* R$; тут

$$U := \begin{pmatrix} U_{\rho\times\rho} & U_{\rho\times d} \\ U_{d\times\rho} & U_d \end{pmatrix} \Phi^{-1}.$$

Добуток $Q^* P_{Q^*} = 0$ матиме місце за умови $U_{\rho\times\rho} = 0$ та $U_{\rho\times d} = 0$; матриці $U_{d\times\rho}$ та $U_{d\times d}$ визначають співвідношення

$$P_{Q^*}^2 = P_{Q^*}, \quad P_{Q^*}^* = P_{Q^*}.$$

Таким чином, ортопроектор P_{Q^*} являє собою лінійну комбінацію рядків матриці $\mathcal{P}_{Q^*}$.

Зазначимо, що матриця $Q^\dagger$, взагалі кажучи, не співпадає з псевдооберненою за Муром-Пенроузом. Це випливає з нерівностей

$$\left(QQ^\dagger\right)^* \neq QQ^\dagger, \quad \left(Q^\dagger Q\right)^* \neq Q^\dagger Q;$$

тут

$$QQ^\dagger = \Phi \begin{pmatrix} I_\rho & O \\ O & O \end{pmatrix} \Phi^{-1}, \quad Q^\dagger Q = \Psi^{-1} \begin{pmatrix} I_\rho & O \\ O & O \end{pmatrix} \Psi.$$

В той же час, матриця $Q^\dagger$ — одна з напівобернених до вихідної матриці Q. Дійсно, з попередніх рівностей випливає наступна

$$QQ^\dagger Q = Q,$$

отже, матриця $Q^\dagger$ — напівобернена до матриці Q. Більш того, матриця $Q^\dagger$ — інверсно-напівобернена, оскільки [17, с. 20]

$$Q^\dagger QQ^\dagger = Q^\dagger.$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Лема 1.1.8. *Матриця*

$$Q^\dagger := \Psi^{-1} J^* \Phi^{-1}$$

— інверсно напівобернена до матриці Q.

Поставимо наступну задачу: чи можна у критичному випадку малим збуренням привести алгебраїчну систему (1.1) з $(m \times n)-$ матрицею Q до некритичного випадку? Таким чином поставлена задача відноситься до задач про регуляризацію [1, 10, 38, 61]. Припустимо задачу про знаходження розв'язків системи (1.1) некоректно поставленою, а саме: припустимо, що система (1.1) не має розв'язків для довільної неоднорідності $b \in \mathbb{R}^m$, інакше кажучи, припустимо, що має місце нерівність $P_{Q^*} \neq 0$. При дослідженні задачі про регуляризацію можна скористатися стандартним розвиненням (1.4); збурення матриці Q будемо шукати у вигляді $\mathcal{Q} := Q + \varepsilon \mathcal{R}$. Система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\mathcal{Q}c = b, \quad \mathcal{Q} := Q + \varepsilon \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{1.7}$$

буде приведена до некритичного випадку за умови $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$. Позначимо матрицю

$$\Pi_J := \begin{pmatrix} O & O \\ O & C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \text{rank } C := m - r.$$

Позначимо P_{m-r} матрицю, утворену з лінійно-незалежних рядків ортопроектора P_{W_r}. Блок C, який визначає матрицю Π_J може бути зображено у вигляді

$$C = C_{(m-r)\times(m-r)} P_{m-r};$$

тут $C_{(m-r)\times(m-r)}$ — довільна $(m-r)\times(m-r)$ – вимірна матриця. Зазначимо, що у критичному випадку $(P_{Q^*} \neq 0)$ задача про регуляризацію рівняння (1.1) шляхом збурення матриці Q розв'язна лише для визначеної $(m = n)$, або ж недовизначеної $(m < n)$ системи (1.1). Дійсно, припустимо систему (1.1) перевизначеною $(m > n)$, у такому разі

$$\text{rank } \mathcal{Q}\cdot\mathcal{Q}^+ \le \text{rank } \mathcal{Q} = \text{rank } \mathcal{Q}^+ \le n < m,$$

що суперечить рівності рангів лівої та правої частини рівняння

$$\mathcal{Q}\cdot\mathcal{Q}^+ = I_m,$$

рівнозначного рівнянню $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$. Таким чином, умови регуляризації лінійних алгебраїчних рівнянь визначає наступна теорема [81, 129].

Теорема 1.1.3. *У критичному випадку* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *задача про регуляризацію рівняння (1.1) шляхом збурення матриці* Q :

$$\mathcal{Q} := Q + \varepsilon\mathcal{R}$$

розв'язна лише для визначеної $(m = n)$, *або ж недовизначеної* $(m < n)$ *системи (1.1). Задача про регуляризацію системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.1) за умови* $m \le n$ *має сім'ю розв'язків (1.7), де*

$$\mathcal{R} := \Phi\cdot\Pi_J\cdot\Psi.$$

Тут $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *и* $\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — *невироджені матриці,* $Q = \Phi\cdot J_r\cdot\Psi$ — *стандартне розвинення* $(m\times n)-$ *матриці* Q.

Приклад 1.1.1. *Згідно із теоремою 1.1.3, задача про регуляризацію системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.1) з матрицею* Q, *наведеною у прикладі А.1, має розв'язок*

$$\mathcal{Q} := Q + \varepsilon\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \Phi\cdot\Pi_J\cdot\Psi, \quad \Pi_J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричні рівняння Ляпунова та Сильвестра

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i \ C \ R_i = B \tag{1.8}$$

докладно вивчені у статтях [107, 150] та монографії [28]. Тут

$$Q_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad R_i \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}, \quad B \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$$

— задані матриці, $C \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ — невідома матриця. У частинному випадку $\beta = \gamma$ рівняння Сильвестра (1.8) вивчено у монографії [43, с. 239]. Як відомо, загальний розв'язок рівняння (1.8) являє собою суму

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B]$$

загального розв'язку $\Phi[Q_i, R_i]$ однорідного рівняння

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i \ C \ R_i = 0 \tag{1.9}$$

та довільного часткового розв'язку $\Psi[B]$ рівняння (1.8). Позначимо

$$\left\{ \Theta_j \right\}_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$$

природний базис [21] простору $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. Під природним базисом $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ будемо розуміти сукупність матриць Θ_j, для яких вектори $\mathcal{M}\Theta_j$ утворюють природний базис простору $\mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma}$. Загальний розв'язок рівняння (1.8) шукаємо у вигляді суми

$$C = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1.$$

Таким чином, приводимо рівняння (1.8) до вигляду

$$\sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \left[\sum_{i=1}^{k} Q_i \Theta_j R_i \right] c_j = B.$$

Позначимо матриці

$$\Xi_j := \sum_{i=1}^{k} Q_i \Theta_j R_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}, \quad j = 1, 2, \ \dots \ , \ \beta\cdot\gamma.$$

Таким чином, рівняння (1.8) рівнозначне наступному

$$\sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Xi_j c_j = B.$$

Визначимо оператор $\mathcal{M}[A]: \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, як оператор, який ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, утворений з n стовпців матриці A, а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big]: \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицю $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Зазначимо, що оператор $\mathcal{M}[A]$, як і обернений оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$, можуть бути зображені явно [84, 87]. Позначимо матриці

$$\Upsilon_1 := (\ 1\ ) \in \mathbb{R}^{1\times 1}, \quad \Upsilon_2 := (\ 1\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{4\times 1},$$

$$\Upsilon_3 := (\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{9\times 1},$$

$$\Upsilon_4 := (\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{16\times 1}, \ \dots .$$

Вектор Υ_m складений з $m-1$ векторів вигляду

$$(\ 1\ 0\ 0\ \dots\ 0\ )^* \in \mathbb{R}^{(m-1)\times 1}$$

та закінчується одиницею:

$$\Upsilon_m := \Big(\ 1\ 0\ 0\ \dots\ 0 \quad 1\ 0\ 0\ \dots\ 0 \quad \dots \quad 1\ 0\ 0\ \dots\ 0 \quad 1\ \Big)^* \in \mathbb{R}^{m^2\times 1}.$$

У нових позначеннях оператор $\mathcal{M}[A]$ зображується явно:

$$\mathcal{M}[A] = \ \Big(I_n \otimes A\Big) \cdot \Upsilon_n \in \mathbb{R}^{m\cdot n}.$$

Визначимо також матриці

$$\Big[E_n^m\Big]_j := \Big[E_1^m\Big]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n\times m\cdot n}, \ \Big[E_1^m\Big]_j := \Big\{\delta_{ij}\Big\}_{i=1}^{m} \in \mathbb{R}^{1\times m};$$

тут δ_{ij} — символ Кронеккера:

$$\delta_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i \end{array} \right. , \qquad i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ m.$$

$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$ зображується явно:

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}] = \sum_{k=1}^{n} \Big[E_m^n\Big]_k \cdot \mathcal{B} \cdot \Big[E_1^n\Big]_k,$$

а рівняння (1.8) рівнозначне рівнянню

$$\mathcal{Q}\ c = \mathcal{M}[B] \tag{1.10}$$

відносно вектора $c \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma}$; тут

$$\mathcal{Q} := \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \left\{ \Big[E_1^{\alpha\beta}\Big]_j \otimes \mathcal{M}[\Xi_j] \right\} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\beta\cdot\gamma}.$$

В англомовній літературі оператор $\mathcal{M}[A]$ називають оператором векторизації [144, 145]:

$$\mathcal{M}[A] := \mathrm{vec(A)}.$$

У частинному випадку $\beta = \gamma$ в інший спосіб рівняння Сильвестра (1.8) приведено до вигляду (1.10) у монографії [43]. За умови

$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] = 0$$

і тільки у цьому випадку рівняння (1.10) розв'язне

$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B] + P_{\mathcal{Q}_r}c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

при цьому рівняння (1.8) має r – параметричну сім'ю розв'язків

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r],$$

де

$$\Phi[Q_i, R_i] := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B]\Big\}, \quad \Psi[B, c_r] := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big].$$

Тут

$$P_{\mathcal{Q}} :\ \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\beta\cdot\gamma} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}), \quad P_{\mathcal{Q}^*} :\ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\alpha\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$$

— ортопроектори матриць $\mathcal{Q}$ та $\mathcal{Q}^*$. Матриця $P_{\mathcal{Q}_r}$ складена з r лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$. Таким чином, доведена наступна теорема [84, 87, 144].

Теорема 1.1.4. *Матричне рівняння Сильвестра (1.8) розв'язне тоді й тільки тоді, коли*

$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] = 0. \tag{1.11}$$

За умови (1.11) рівняння (1.8) має r-параметричну сім'ю розв'язків

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r],$$

де

$$\Phi[Q_i, R_i] := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B]\Big\}, \quad \Psi[B, c_r] := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big].$$

За умови $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будемо казати, що для матричного рівняння Сильвестра (1.8) має місце критичний випадок, при цьому рівняння Сильвестра (1.8) розв'язне тоді й тільки тоді, коли виконується умова (1.11). За умови $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будемо казати, що для матричного рівняння Сильвестра (1.8) має місце некритичний випадок, при цьому рівняння Сильвестра (1.8) розв'язне для будь-якої неоднорідності B.

Наслідок 1.1.1. *Матричне рівняння Сильвестра (1.8) у некритичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) розв'язне для будь-якої неоднорідності $B \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$. В цьому випадку рівняння (1.8) має r-параметричну сім'ю розв'язків*

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r].$$

Частинним випадком матричного рівняння Сильвестра при $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$, $k = 2$, $Q_1 := A \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$, $R_1 := I_\gamma$ та $R_2 := B \in \mathbb{R}^{\gamma\times\gamma}$ є матричне рівняння Ляпунова [84, 85, 86, 109]:

$$AC + CB = D, \quad D \in \mathbb{R}^{\alpha\times\gamma}; \tag{1.12}$$

тут $C \in \mathbb{R}^{\alpha\times\gamma}$ — невідома матриця. Позначимо

$$\Big\{\Theta_j\Big\}_{j=1}^{\alpha\cdot\gamma} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\gamma}$$

базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\gamma}$. Загальний розв'язок матричного рівняння (1.12) шукаємо у вигляді суми

$$C = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\gamma} \Theta_j c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1.$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{Q} := \sum_{j=1}^{\alpha^2} \Big\{\Big[E_1^{\alpha^2}\Big]_j \otimes \mathcal{M}[\Xi_j]\Big\} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\gamma\times\alpha\cdot\gamma}.$$

де

$$\Xi_j := A\Theta_j + \Theta_j B \in \mathbb{R}^{\alpha\times\gamma}, \quad j = 1, 2, \ ... \ \beta\cdot\gamma.$$

Умови існування розв'язку матричного рівняння Ляпунова (1.12) визначає наступний наслідок [84, 85, 86] до теореми 1.1.4.

Наслідок 1.1.2. *Матричне рівняння Ляпунова (1.12) розв'язне тоді та тільки тоді, коли виконано умову*

$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[D] = 0; \tag{1.13}$$

в цьому випадку рівняння (1.12) має r-параметричну сім'ю розв'язків

$$C = \Phi[c_r] + \Psi[D],$$

де

$$\Psi[D] := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[D]\Big\}, \quad \Phi[c_r] := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big].$$

За умови $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будемо казати, що для матричного рівняння Ляпунова (1.12) має місце критичний випадок, при цьому рівняння Ляпунова (1.12) розв'язне тоді й тільки тоді, коли виконується умова (1.13). За умови $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будемо казати, що для матричного рівняння Ляпунова (1.12) має місце некритичний випадок, при цьому рівняння Ляпунова (1.12) розв'язне для будь-якої неоднорідності D. Умови існування розв'язку матричного рівняння Ляпунова (1.12) у некритичному випадку визначає наступний наслідок [84, 85, 86] до теореми 1.1.4.

Наслідок 1.1.3. *У некритичному випадку матричне рівняння Ляпунова (1.12) розв'язне для будь-якої неоднорідності D. За умови $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ рівняння (1.12) має r-параметричну сім'ю розв'язків*

$$C = \Phi[c_r] + \Psi[D],$$

де

$$\Psi[D] := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[D]\Big\}, \quad \Phi[c_r] := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big].$$

Зазначимо, що наведені у теоремі 1.1.4 та наслідках 1.1.2 та 1.1.3 умови існування та формули для побудови розв'язків матричних рівняннь Ляпунова та Сильвестра можуть бути застосовані при дослідженні матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач, а також отримані достатніх умов регуляризації за рахунок, як виродженого, так і невиродженого імпульсного збурення, нетерових крайових задач.

1.2 Оператор Гріна задачі Коші диференціально-алгебраїчної крайової задачі

Розглянемо задачу про побудову розв'язків [18, 30, 107]

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{C}^1[a;b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \tag{1.14}$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{1.15}$$

Тут [116, 128]

$$\mathcal{A}Z'(t):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

— матричний диференціально-алгебраїчний оператор, який за визначенням для будь-яких скалярних функцій

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$$

та сталих матриць $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ забезпечує рівність

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Аналогічно матричний оператор

$$\mathcal{B}Z(t):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

будемо далі називати алгебраїчним, якщо для будь-яких

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad \Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

має місце рівність

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Тут також $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$ — неперервна матриця та $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

Взагалі кажучи, припускаємо

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \mu,\ \nu \in \mathbb{N}$$

— довільні натуральні числа. Тут і надалі $\mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ — лінійний нормований простір дійсних $(m \times n)$ – вимірних матриць $B(t)$, неперервних на відрізку $[a,b]$ з нормою

$$||B(t)||_{\mathbb{C}_{m\times n}} := \max_{[a;b]} ||B(t)||_{\mathbb{R}^{m\times n}}, \quad B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b],$$

а також простір $\mathbb{C}^1_{m\times n}[a,b]$ — лінійний нормований простір дійсних матриць $B(t)$, неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ з нормою

$$||B(t)||_{\mathbb{C}^1_{m\times n}} := \max_{[a;b]} \sum_{k=0}^{1} ||B^{(k)}(t)||_{\mathbb{R}^{m\times n}}, \quad B(t) \in \mathbb{C}^1_{m\times n}[a,b].$$

Матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1.14) узагальнює традиційні постановки задач, як для матричних диференціальних рівнянь [18, 30, 107], так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь [17, 66, 67, 112]. З іншого боку, матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (1.14), (1.15) узагальнює нетерові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь [9, 73, 110].

Позначимо

$$\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ j = 1, 2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta$$

— природний базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при цьому задача про побудову розв'язків узагальненого диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (1.14) приводить до задачі про побудову вектора $z(t)$, компоненти якого $z_j(t)$ визначають розвинення матриці

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} z_j(t), \quad z_j(t) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad j = 1, 2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta.$$

Лінійний диференціально-алгебраїчний матричний оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ за визначенням зображується у вигляді

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t) z'_j(t).$$

При цьому

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}Z'(t)\Big] = \Omega(t)\cdot z'(t), \quad \Omega(t) := \Big[\Omega_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}^1_{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}[a,b],$$

де

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2,\ \dots,\ \alpha\cdot\beta.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{B}Z(t)\Big] = \Theta(t)\cdot z(t), \quad \Theta(t) := \Big[\Theta_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}^1_{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}[a,b],$$

де

$$\Theta_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2,\ \dots,\ \alpha\cdot\beta.$$

Таким чином, задачу про побудову розв'язків диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (1.14) приведено до задачі про знаходження розв'язків

$$z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a,b]$$

традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [17, 66, 67, 112]

$$\Omega(t)\cdot z'(t) = \Theta(t)\cdot z(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}[F(t)]. \tag{1.16}$$

За умови [73, 128]

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0,\ P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0,\ \Omega^+(t)\Theta(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}[a,b], \tag{1.17}$$

у випадку

$$\Omega^+(t)\mathcal{F}(t),\ P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a,b] \tag{1.18}$$

система (1.16) розв'язна відносно похідної

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t,\varphi(t)),$$

де

$$\mathfrak{F}(t,\varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t).$$

Тут $P_{\Omega^*}(t)$ — $(\gamma\cdot\delta\times\gamma\cdot\delta)$– матриця-ортопроектор:

$$P_{\Omega^*}(t) : \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\Omega^*(t)),$$

$P_{\Omega_\varrho}(t)$ — $(\alpha\cdot\beta\times\varrho)$– матриця, утворена з ϱ лінійно-незалежних стовпців $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)$– матриці-ортопроектора

$$P_{\Omega}(t) : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\Omega(t)).$$

Позначимо $X(t)$ нормальну фундаментальну матрицю [110]

$$\frac{dX(t)}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)X(t), \quad X_0(a) = I_{\alpha\beta}$$

одержаної традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь. За умови (1.17), (1.18) система (1.16) має розв'язок вигляду

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

$$K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\mathfrak{F}(s,\varphi(s))ds,$$

який визначає розв'язок матричного диференціально алгебраїчного рівняння (1.14)

$$Z(t,c) = W(t,c) + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t), \;\; W(t,c) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X_0(t)c\Big]. \quad (1.19)$$

Тут

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t)\Big\}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.14). Таким чином, доведено наступну достатню умову розв'язності задачі Коші для системи (1.14).

Лема 1.2.1. *За умов (1.17) та (1.18) матрична задача Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.14) однозначно розв'язна для будь-якого початкового значення $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. За умов (1.17) та (1.18) загальний розв'язок (1.19) задачі Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.14) визначає узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.14) та загальний розв'язок $W(t,c)$ задачі Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для однорідної частини рівняння (1.14).*

Доведена лема 1.2.1 узагальнює відповідні результати, як для матричних диференціальних рівнянь [18, 30, 107], так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь [17, 66, 67, 112, 128]. З іншого боку, доведена лема узагальнює відповідні результати, отримані для нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь [9, 73, 110].

1.3 Оператор Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

Підставляючи розв'язок матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1.14) у крайову умову (1.15), приходимо до задачі про знаходження розв'язків

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} c_j \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta$$

матричного рівняння [83, 85]

$$\mathcal{L}W(\cdot, c) + \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{1.20}$$

У критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) за умов (1.17), (1.18) та

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{1.21}$$

розв'язок матричного рівняння (1.20) визначає вектор [85, 86, 87]

$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} + P_{\mathcal{Q}_r}c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}^*}-$ $(\mu\cdot\nu \times \mu\cdot\nu)-$ матриця-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$, де

$$\mathcal{Q} := \Big[\mathcal{Q}_i\Big]_{i=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu\times\alpha\cdot\beta}, \ \mathcal{Q}_i := \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\Big[X(\cdot)\Xi^{(i)}\Big]\Big\}, \ i = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta;$$

матриця $P_{\mathcal{Q}_r}$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців $(\alpha\cdot\beta \times \alpha\cdot\beta)-$ матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to N(\mathcal{Q})$. Матриця $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. Таким чином, у критичному випадку, за умови (1.17), (1.18) та (1.21), розв'язок матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1.14), який задовольняє крайову умову (1.15) має зображення

$$Z(t, c_r) = \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big] + \mathcal{M}^{-1}\Big\{X(t)\mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A}-$$

$$-\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot)\Big\}\Big\} + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Таким чином, доведено наступну достатню умову [116] розв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.14), (1.15).

Теорема 1.3.1. *У критичному випадку* ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) *за умов (1.17), (1.18) та (1.21), розв'язок*

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r \tag{1.22}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1.14), який задовольняє крайову умову (1.15) визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{X(t)\mathcal{Q}^{+}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A}-$$

$$-\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot)\Big\}\Big\} + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t)$$

матричної диференціально-алгебраїчної задачі (1.14), (1.15) та загальний розв'язок однорідної частини матричної диференціально-алгебраїчної задачі (1.14), (1.15)

$$W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big], \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Зазначимо, що другий доданок, який утворює узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.14)

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[Q^{+}(s)\mathcal{F}(s)\Big](t)\Big\} + \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[P_{Q_\rho}(s)\varphi(s)\Big](t)\Big\}$$

за умов (1.17), (1.18) та $\rho \neq 0$ залежить від довільної функції

$$\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\varrho\times 1}[a; b].$$

У критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) за умов (1.17), (1.18) та $\rho \neq 0$ узагальнений оператор Гріна $G[\,\mathfrak{F}(s, \varphi(s));\, \mathfrak{A}\,](t)$ матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.14), (1.15) також залежить від довільної функції $\varphi(t)$.

Висновки до розділу 1

1. Проаналізовано сучасний стан і встановлено перспективність дослідження матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач.

2. Встановлено, що умови існування та формули для побудови розв'язків матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра можуть бути застосовані при побудові схем регуляризації цих рівнянь, які суттєво відрізнятимуться від класичного методу регуляризації Тихонова.

3. Встановлено, що умови існування та формули для побудови розв'язків матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра можуть бути застосовані при дослідженні матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач, а також отримані достатні умови регуляризації за рахунок, як виродженого, так і невиродженого імпульсного збурення, нетерових крайових задач.

РОЗДІЛ 2
РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕТЕРОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

2.1 Регуляризація матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра

У випадку некоректно поставленої задачі [38, 71, 96, 127] матричне рівняння Сильвестра (1.8) може бути регуляризоване. Дійсно, припустимо, що умова розв'язності (1.11) матричного рівняння Сильвестра (1.8) не виконується для довільної неоднорідності:

$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] \neq 0.$$

Інакше кажучи, припустимо, що для матричного рівняння Сильвестра (1.8) має місце критичний випадок ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$). Поставимо наступну задачу: чи існують матриці $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ та $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$, для яких збурення матричного рівняння Сильвестра

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i\ C\ R_i + \varepsilon\,\mathcal{E}C\mathcal{F} = B \tag{2.1}$$

розв'язне для довільної неоднорідності? Припустимо матрицю $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ невідомою, а матрицю $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$ — фіксованою. Розв'язок збуреного матричного рівняння Сильвестра (2.1) шукатимемо у вигляді суми

$$C = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j, \quad x_j \in \mathbb{R}^1;$$

тут

$$\Big\{\Theta_j\Big\}_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$$

— базис простору $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. Згідно до теореми 1.1.3, збурення матричного алгебраїчного рівняння Сильвестра (2.1) можна регуляризувати лише за умови $\alpha\delta \leq \beta\gamma$ [93, 96, 97, 121]. Позначимо

$$P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)^*}:\ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\alpha\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)^*$$

— ортопроектор матриці $\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1$, де

$$\mathcal{Q}_1 := \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \left\{ \left[E_1^{\alpha\beta} \right]_j \otimes \mathcal{M}[\mathcal{E}\Theta_j \mathcal{F}] \right\} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\beta\cdot\gamma}.$$

Збурення матричного рівняння Сильвестра (2.1) розв'язне для довільної неоднорідності у випадку $P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)^*}=0$. Покладемо

$$\mathcal{E} = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi_j\, y_j, \quad y_j \in \mathbb{R}^1;$$

тут

$$\left\{ \Xi_j \right\}_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

— базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Позначимо $(\alpha\times\delta)$ – матриці

$$\Omega_{1,i} := \Xi_i\Theta_1\mathcal{F}, \quad \Omega_{2,i} := \Xi_i\Theta_2\mathcal{F}, \ \dots\ , \ \ \Omega_{\beta\gamma,i} := \Xi_i\Theta_{\beta\gamma}\mathcal{F}.$$

Для знаходження вектора $y\in\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$, компоненти якого визначають матрицю $\mathcal{E}$, приходимо до рівняння

$$\mathfrak{Q}\cdot y = \mathcal{M}[\mathcal{Q}_1],$$

для розв'язності якого необхідно і достатньо, щоб

$$P_{\mathfrak{Q}^*}\mathcal{M}[\mathcal{Q}_1] = 0; \tag{2.2}$$

тут

$$\mathfrak{Q} := \Big\{ \mathcal{M}\Big[\mathcal{M}(\Omega_{1,1}),\ \dots\ ,\ \mathcal{M}(\Omega_{1,\beta\gamma}) \Big],\ \dots\ ,$$
$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{M}(\Omega_{\alpha\beta,1}),\ \dots\ ,\ \mathcal{M}(\Omega_{\alpha\beta,\beta\gamma}) \Big] \Big\}$$

— стала $(\alpha\beta\delta\gamma\times\alpha\beta)$ – матриця,

$$P_{\mathfrak{Q}^*}:\ \mathbb{R}^{\alpha\beta\delta\gamma\times\alpha\beta\delta\gamma} \to \mathbb{N}(\mathfrak{Q}^*)$$

— ортопроектор матриці $\mathfrak{Q}^*$. Покладемо для визначеності

$$\alpha>1,\ \beta>1,\ \gamma>1,\ \delta>1,$$

при цьому за умови повноти рангу матриці $\mathcal{F}$

$$\mathrm{rank}\,\Omega_{i,j}>0, \quad i=1,2,\ \dots\ ,\ \alpha\beta, \quad j=1,2,\ \dots\ ,\ \beta\gamma$$

мають місце нерівності

$$\alpha\beta\gamma\delta > \text{rank } P_{\mathfrak{Q}^*} \geq \alpha\beta(\gamma\delta - 1) > 0.$$

Умову (2.2) задовольняє серія матриць

$$\mathcal{Q}_1(c_\varrho) := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{P_{\mathfrak{Q}^*_\varrho}} c_\varrho\Big], \quad c_\varrho \in \mathbb{R}^\varrho;$$

тут $P_{P_{\mathfrak{Q}^*_\varrho}}$ — матриця, складена з ϱ лінійно незалежних стовпців ортопроектора $P_{P_{\mathfrak{Q}^*}}$:

$$P_{P_{\mathfrak{Q}^*}} : \ \mathbb{R}^{\alpha\beta\delta\gamma\times\alpha\beta\delta\gamma} \to \mathbb{N}(P_{\mathfrak{Q}^*}).$$

Зазначимо, що

$$0 < \text{rank } P_{P_{\mathfrak{Q}^*}} \leq \alpha\beta,$$

тому $\rho > 0$. Згідно лемі 1.1.5 матриця $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\beta\cdot\gamma}$ може бути зображена у вигляді

$$\mathcal{Q} = \Phi \cdot J_r \cdot \Psi, \quad \text{rank } \mathcal{Q} := r;$$

тут $\Phi \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\alpha\cdot\delta}$ та $\Psi \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\beta\cdot\gamma}$ — невироджені матриці. Зафіксуємо один з векторів $c_\varrho \in \mathbb{R}^\varrho$; у випадку $\alpha\delta \leq \beta\gamma$, матричне рівняння Сильвестра (1.8) можна регуляризувати за умови

$$\text{rank } \Big(J_r + \Pi_{J_r}\Big) = \alpha\delta \leq \beta\gamma; \tag{2.3}$$

тут

$$\Pi_{J_r} := \Phi^{-1} \cdot \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{P_{\mathfrak{Q}^*_\varrho}} c_\varrho\Big] \cdot \Psi^{-1}.$$

Оскільки умову (2.2) при цьому виконано, знаходимо вектор

$$y(c_\nu) = \mathfrak{Q}^+\mathcal{M}[\mathcal{Q}_1] + P_{\mathfrak{Q}_\nu} c_\nu, \quad c_\nu \in \mathbb{R}^\nu$$

а, отже, і матрицю

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}, c_\nu) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi_j \ y_j(\mathcal{F}, c_\nu), \quad y_j(\mathcal{F}, c_\nu) \in \mathbb{R}^1.$$

Тут $P_\mathfrak{Q} : \ \mathbb{R}^{\alpha\beta\times\alpha\beta} \to \mathbb{N}(\mathfrak{Q})$ — ортопроектор матриці $\mathfrak{Q}$; матриця $P_{\mathfrak{Q}_\nu}$ складена з ν лінійно-незалежних стовпців ортопроектора $P_\mathfrak{Q}$. За умови $\alpha\delta \leq \beta\gamma$ у випадку (2.3) розв'язок збуреного матричного рівняння Сильвестра (2.1)

$$C(\mathcal{F}, c_\mu) = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j(\mathcal{F}, c_\mu), \quad x_j(\mathcal{F}, c_\mu) \in \mathbb{R}^1$$

визначає вектор

$$x(\mathcal{F}, c_\mu) := (\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_1)^+ \mathcal{M}[B] + P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} c_\mu, \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu.$$

Тут

$$P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)}: \ \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\beta\cdot\gamma} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_1)$$

— ортопроектор матриці $\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_1$; матриця $P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu}$ складена з μ лінійно-незалежних стовпців ортопроектора $P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)}$. Таким чином, доведена наступна теорема [93].

Теорема 2.1.1. *Матричне рівняння Сильвестра (1.8) у критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) не розв'язне для довільної неоднорідності B, однак за умови $\alpha > 1, \ \beta > 1, \ \gamma > 1, \ \delta > 1$, у випадку (2.3) для фіксованої матриці повного рангу $\mathcal{F}$ розв'язок збуреного матричного рівняння Сильвестра (2.1) визначає матриця*

$$C(\mathcal{F}, c_\mu) = Y\Big[\mathcal{F}\Big] + Z\Big[c_\mu\Big]$$

та вектор

$$y(\mathcal{F}, c_\nu) = y(\mathcal{F}) + y(c_\nu), \quad y(\mathcal{F}) := \mathfrak{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{Q}_1], \quad y(c_\nu) := P_{\mathfrak{Q}_\nu} c_\nu,$$

де

$$Y\Big[\mathcal{F}\Big] := \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j(\mathcal{F}), \quad Z\Big[c_\mu\Big] := \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j(c_\mu);$$

тут

$$x(\mathcal{F}) := (\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_1)^+ \mathcal{M}[B], \quad x(c_\mu) := P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} c_\mu, \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu.$$

Зазначимо, що матричне рівняння Сильвестра (1.8) можна регуляризувати за умови (2.3). Якщо для фіксованої матриці повного рангу $\mathcal{F}$ ця умова не виконується, матричне рівняння (1.8) можна регуляризувати для іншої матриці повного рангу $\mathcal{F}$. Доведена теорема 2.1.1 узагальнює теорему [121] на випадок матричного рівняння Сильвестра (1.8). Техніка регуляризації, наведена у теоремі 2.1.1 значно спрощує відповідну схему регуляризації [121], оскільки виконання умови (2.3) передбачає знаходження $\rho \ll \alpha\beta\gamma\delta$ параметрів навідміну від схеми регуляризації [121], яка для матричного рівняння Сильвестра (1.8) передбачає розв'язання нелінійного рівняння відносно $\alpha\beta\gamma\delta$ параметрів.

Приклад 2.1.1. *Матричне рівняння Сильвестра*

$$\sum_{i=1}^{2} Q_i\ C\ R_i = B \tag{2.4}$$

не розв'язне для довільної неоднорідності B у випадку

$$Q_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

проте його можна регуляризувати.

Зазначимо, що для рівняння Сильвестра (2.4) умови

$$\alpha = 2 > 1, \quad \beta = 3 > 1, \quad \gamma = 3 > 1, \quad \delta = 2 > 1, \quad \alpha\delta = 6 \le \beta\gamma = 6$$

виконуються. Позначимо $\Theta_1,\ \Theta_2,\ \dots\ ,\ \Theta_9$ — природний базис простору $\mathbb{R}^{3\times 3}$, при цьому матриця

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

визначає ортопроектор

$$P_{\mathcal{Q}^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, то для матричного рівняння Сильвестра (2.4) має місце критичний випадок, отже, матричне рівняння Сильвестра (2.4) не розв'язне для довільної неоднорідності B. Дійсно, покладемо

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $\left\{\Xi_j\right\}_{j=1}^{6} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ природний базис простору $\mathbb{R}^{2\times 3}$, при цьому

$$\mathfrak{Q} := \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_1^* & \mathfrak{Q}_2^* & \mathfrak{Q}_3^* & \mathfrak{Q}_4^* \end{pmatrix}^*,$$

де

$$\mathfrak{Q}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{Q}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{Q}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{Q}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно лемі 1.1.5 матриця $Q \in \mathbb{R}^{4\times 9}$ може бути зображена у вигляді

$$Q = \Phi \cdot J_r \cdot \Psi, \quad \operatorname{rank} Q = 3;$$

тут

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

— невироджені матриці. Умову (2.2) задовольняє серія матриць

$$\mathcal{Q}_1(c_\varrho) = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 2\,c_1 & 2\,c_3 & 2\,c_5 \\ c_2 & c_4 & c_6 & 0 & 0 & 0 & 2\,c_2 & 2\,c_4 & 2\,c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 3\,c_1 & 3\,c_3 & 3\,c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\,c_2 & 3\,c_4 & 3\,c_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тут $c_\varrho \in \mathbb{R}^6$, де $\varrho = 6$ — ранг матриці-ортопроектора $P_{P_{\mathfrak{Q}^*}}$. Зокрема, умови (2.2) та (2.3):

$$\operatorname{rank}\left(J_r + \Pi_{J_r}\right) = 4$$

задовольняє матриця

$$\mathcal{Q}_1(c_\varrho) := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\,\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тут

$$\Pi_{J_r} = \Phi^{-1}\mathcal{M}^{-1}\left[P_{P_{\mathfrak{Q}^*_\varrho}} c_\varrho\right]\Psi^{-1} =$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4\,\varepsilon & 12\,\varepsilon & 0 & 2\,\varepsilon & 0 & -3\varepsilon & 0 & 0 & 4\,\varepsilon \\ -4\,\varepsilon & -12\,\varepsilon & 0 & -2\,\varepsilon & 0 & 3\,\varepsilon & 0 & 0 & -4\,\varepsilon \\ 4\,\varepsilon & 12\,\varepsilon & 0 & 2\,\varepsilon & 0 & 3\,\varepsilon & 0 & 0 & 4\,\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умову (2.2) при цьому виконано, однозначно ($\nu = 0$) знаходимо вектор

$$y(c_\nu) = \mathfrak{Q}^+\mathcal{M}[\mathcal{Q}_1],$$

а, отже, і матрицю

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

яка регуляризує матричне рівняння Сильвестра (2.4). Покладемо для визначеності

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

при цьому розв'язок збурення для матричного рівняння Сильвестра (2.4) вигляду (2.1) визначає матриця

$$C(\mathcal{F}, c_\mu) = Y\Big[\mathcal{F}\Big] + Z\Big[c_\mu\Big], \quad c_\mu \in \mathbb{R}^5,$$

де

$$Y\Big[\mathcal{F}\Big] = \begin{pmatrix} \frac{2-5\varepsilon+3\varepsilon^2}{12-8\varepsilon+16\varepsilon^2} & 0 & \frac{6-7\varepsilon-3\varepsilon^2}{24-16\varepsilon+32\varepsilon^2} \\ \frac{4-3\varepsilon+11\varepsilon^2}{24-16\varepsilon+32\varepsilon^2} & 0 & -\frac{3+\varepsilon^2}{6-4\varepsilon+8\varepsilon^2} \\ \frac{4-3\varepsilon+11\varepsilon^2}{24-16\varepsilon+32\varepsilon^2} & 0 & \frac{6+7\varepsilon+7\varepsilon^2}{24-16\varepsilon+32\varepsilon^2} \end{pmatrix}$$

та

$$Z\Big[c_\mu\Big] := \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j x_j(c_\mu), \quad x(c_\mu) := P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} c_\mu;$$

тут

$$P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} = \begin{pmatrix} P^{(1)}_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} & P^{(2)}_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} \end{pmatrix},$$

$$P^{(1)}_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} = \begin{pmatrix} 4\left(4-4\varepsilon+5\varepsilon^2\right) & -8+4\varepsilon-6\varepsilon^2 \\ -8+4\varepsilon-6\varepsilon^2 & 16-8\varepsilon+21\varepsilon^2 \\ -8+4\varepsilon-6\varepsilon^2 & -8+8\varepsilon-11\varepsilon^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -10\varepsilon^2 & 3(-2+\varepsilon)\varepsilon \\ 8(-1+\varepsilon)\varepsilon & 4\varepsilon(1+\varepsilon) \\ 2\varepsilon(4+\varepsilon) & -\varepsilon(-2+7\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$P^{(2)}_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10\varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 3(-2+\varepsilon)\varepsilon \\ 0 & 0 & 3(-2+\varepsilon)\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ 8\left(3-2\varepsilon+4\varepsilon^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 8\left(3-2\varepsilon+4\varepsilon^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 12+4\varepsilon+5\varepsilon^2 \\ 0 & 0 & -4\varepsilon(3+\varepsilon) \\ 0 & 0 & -12+8\varepsilon-\varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що перевірка виконання умови (2.3) у випадку матричного рівняння Сильвестра (2.4) передбачає знаходження $\rho = 6$ параметрів навідміну від схеми регуляризації [121], яка для матричного рівняння Сильвестра (1.8) передбачає розв'язання нелінійного рівняння відносно $\alpha\beta\gamma\delta = 36$ невідомих.

Частинним випадком матричного рівняння Сильвестра при $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$, $k = 2$, $Q_1 := A \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$, $R_1 := I_\gamma$ та $R_2 := B \in \mathbb{R}^{\gamma\times\gamma}$ є матричне рівняння Ляпунова (1.12); тут $C \in \mathbb{R}^{\alpha\times\gamma}$ — невідома матриця. У випадку некоректно поставленої задачі матричне рівняння Ляпунова (1.12) може бути регуляризоване [38, 71, 96, 127]. Дійсно, припустимо, що умова розв'язності (1.13) матричного рівняння Ляпунова (1.12) не виконується для довільної неоднорідності:

$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[D] \neq 0.$$

Інакше кажучи, припустимо, що для матричного рівняння Ляпунова (1.12) має місце критичний випадок ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$). Поставимо наступну задачу: чи існують матриці $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$ та $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}$, для яких збурення матричного рівняння Ляпунова

$$AC + CB + \varepsilon\,\mathcal{E}C\mathcal{F} = D \tag{2.5}$$

розв'язне для довільної неоднорідності? Припустимо матрицю $\mathcal{E}$ невідомою, а матрицю $\mathcal{F}$ — фіксованою.

Наслідок 2.1.1. *Матричне рівняння Ляпунова (1.12) у критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) не розв'язне для довільної неоднорідності D, однак, у випадку*

$$\operatorname{rank}\left(J_r + \Pi_{J_r}\right) = \alpha\delta$$

для фіксованої матриці повного рангу $\mathcal{F}$ розв'язок збурення (2.5) матричного рівняння Ляпунова (1.12) визначає матриця

$$X(\mathcal{F}, c_\mu) = \Phi\Big[\mathcal{F}\Big] + \Psi\Big[c_\mu\Big]$$

та вектор

$$y(\mathcal{F}, c_\nu) = y(\mathcal{F}) + y(c_\nu), \quad y(\mathcal{F}) := \mathfrak{Q}^+\mathcal{M}[\mathcal{Q}_1], \quad y(c_\nu) := P_{\mathfrak{Q}_\nu}c_\nu,$$

де

$$\Phi\Big[\mathcal{F}\Big] := \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma}\Theta_j x_j(\mathcal{F}), \quad \Phi\Big[c_\mu\Big] := \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma}\Theta_j x_j(c_\mu);$$

тут

$$x(\mathcal{F}) := (\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_1)^+\mathcal{M}[D], \quad x(c_\mu) := P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu}c_\mu, \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu.$$

Приклад 2.1.2. *Матричне рівняння Ляпунова (1.12)*

$$AC + CB = D \tag{2.6}$$

не розв'язне для довільної неоднорідності D для

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

проте його можна регуляризувати.

Позначимо $\Theta_1, \ \Theta_2, \ \dots \ , \ \Theta_9$ — природний базис простору $\mathbb{R}^{3\times 3}$, при цьому матриця

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{Q^*} \neq 0$, то для матричного рівняння Ляпунова (2.6) має місце критичний випадок, отже, матричне рівняння не розв'язне для довільної неоднорідності D. Дійсно, покладемо $\mathcal{F} := I_3$. Згідно лемі 1.1.5 матриця $Q \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ може бути зображена у вигляді

$$Q = \Phi \cdot J_r \cdot \Psi, \quad \text{rank}\, Q = 8;$$

тут

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

та

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— невироджені матриці. Умову rank $\left(J_r + \Pi_{J_r}\right) = 9$ задовольняє матриця

$$\Pi_{J_r} = \begin{pmatrix} \frac{3\varepsilon}{4} & \frac{\varepsilon}{4} & 0 & \frac{\varepsilon}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{4} \\ -\frac{3\varepsilon}{8} & -\frac{\varepsilon}{8} & 0 & -\frac{\varepsilon}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{8} \\ -\frac{\varepsilon}{8} & -\frac{\varepsilon}{24} & 0 & -\frac{\varepsilon}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon}{4} & -\frac{\varepsilon}{4} & 0 & \frac{3\varepsilon}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{4} \end{pmatrix},$$

для якої сума

$$\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

— невироджена матриця:

$$\det(\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_1) = 288\,\varepsilon + 432\,\varepsilon^2 + 144\,\varepsilon^3.$$

Оскільки умову (2.2) при цьому виконано, однозначно ($\nu = 0$) знаходимо вектор

$$y(c_\nu) = \mathfrak{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{Q}_1],$$

а, отже, і матрицю

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

яка регуляризує матричне рівняння Ляпунова (2.6). Покладемо для визначеності

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при цьому розв'язок збурення (2.5) матричного рівняння Ляпунова (2.6) визначає матриця

$$C = \frac{1}{12\,(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 12\,(2+\varepsilon) & 0 & 12\,(1+\varepsilon) \\ -6\,(2+\varepsilon)^2 & 12\,(1+\varepsilon)(2+\varepsilon) & -4\,(1+\varepsilon) \\ 2\,(2+\varepsilon)(3+4\,\varepsilon) & -6\,(1+\varepsilon)(2+\varepsilon) & (1+\varepsilon)(4+3\,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що техніка регуляризації некоректно поставлених матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра, наведена у теоремі 2.1.1 та наслідку 2.1.1, суттєво відрізняється, як від класичного методу регуляризації А.М. Тихонова [61], так і від його розвинення [106]. Актуальність вивчення методів регуляризації пов'язана з їх широким використанням у задачах на відновлення та покращення зображень [154, 155].

2.2 Регуляризація нетерових крайових задач за допомогою виродженого імпульсного збурення

Дослідження систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом традиційне для київської школи нелінійних коливань. М.М. Крилов та М.М. Боголюбов дослідили модель годинника, в якому затухання коливань, викликане тертям, компенсувалося періодичними поштовхами анкера [39]. Дослідження М.М. Крилова та М.М. Боголюбова було продовжено в роботі А.Д. Мишкіса й А.М. Самойленка [51]. Задача про регуляризацію періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу була розв'язана С.М. Чуйко та О.В. Чуйко [96]. Нами досліджено задачу про регуляризацію лінійної нетерової ($m \neq n$) крайової задачі

$$dz(t)/dt = A(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha \tag{2.7}$$

за допомогою імпульсного збурення. Зокрема, припустимо, що крайова задача (2.7) не розв'язна у класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Тут $A(t)$ — неперервна на відрізку $[a, b]$ матриця та $\ell z(\cdot)-$ лінійний обмежений векторний функціонал вигляду

$$\ell z(\cdot) := \mathrm{col}\Big(\ell_1\ z(\cdot),\ \dots\ ,\ \ell_m\ z(\cdot)\Big),$$

де $\ell_1\ z(\cdot),\ \dots\ , \ell_m\ z(\cdot)\ :\ \mathbb{C}[a, b] \to \mathbb{R}^1$ лінійні обмежені функціонали. На відміну від монографії [110] та статті [8] поставимо задачу не про умови розв'язності лінійної періодичної крайової задачі для системи з фіксованим імпульсним впливом [8, 13, 55, 90, 92, 110]

$$\Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0), \quad \Delta z(\tau) := z(\tau + 0) - z(\tau - 0), \tag{2.8}$$

а досліджуємо задачу про знаходження матриці $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, яка б гарантувала б розв'язність цієї задачі у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[a, b] \setminus \{\tau\}_{I}\Big\}$$

для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Поставлена задача продовжує дослідження умов регуляризації лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою імпульсного впливу, наведених у монографії [110, с. 248] та статті [8] на випадок не фіксованої матриці S. Позначимо $X_0(t)$ нормальну $(X_0(a) = I_n)$ фундаментальну матрицю [14, 89] однорідної частини системи (2.7). Загальний розв'язок

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, T] \setminus \{\tau\}_{I}\Big\}, \quad 0 < \tau < T$$

системи (2.7) з імпульсним впливом (2.8) зобразимо у вигляді

$$z(t, c) = X(t)c + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$X(t) := \begin{cases} X_0(t) & t \in [a, \tau[, \\ X_0(t)X_0^{-1}(\tau)(I_n + S)X_0(\tau) & t \in [\tau, b] \end{cases}$$

— нормальна $(X(a) = I_n)$ фундаментальна матриця однорідної частини системи (2.7), (2.8),

$$\mathcal{K}\Big[f(s); S\Big](t) := \begin{cases} K\Big[f(s)\Big](t) & t \in [a, \tau[, \\ X_0(t)\gamma_1 + K\Big[f(s)\Big](t) & t \in [\tau, b], \end{cases}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(\tau) = 0$ для диференціальної системи (2.7), (2.8),

$$K\Big[f(s)\Big](t) := X_0(t) \int_a^t X^{-1}(s) f(s)\, ds$$

— традиційний оператор Гріна задачі Коші $z(\tau) = 0$ для диференціальної системи (2.7); тут

$$\gamma_1 := X_0^{-1}(\tau)\, S\, K\Big[f(s)\Big](\tau).$$

Позначимо матриці $Q := \ell X_0(\cdot)$, $\mathcal{Q} := \ell X(\cdot)$ та ортопроектори [110]

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*), \quad P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}).$$

Крайова задача (2.7) не розв'язна у класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора α за умови $P_{Q^*} \neq 0$. У той же час, регуляризована крайова задача (2.7) та імпульсним впливом (2.8) розв'язна для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора α, якщо $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$. Лінійний обмежений векторний функціонал $\ell z(\cdot)$ може бути зображений у вигляді

$$\ell z(\cdot) = \ell_a z(\cdot) + \ell_b z(\cdot),$$

де

$$\ell_a z(\cdot) : \mathbb{C}[a, \tau] \to \mathbb{R}^m, \quad \ell_b z(\cdot) : \mathbb{C}[\tau, b] \to \mathbb{R}^m$$

— лінійні обмежені функціонали. Позначимо також матриці

$$Q_a := \ell_a X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad Q_b := \ell_b X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Вимога $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ рівнозначна повноті рангу матриці $\mathcal{Q}$. Як і у випадку матричного рівняння Сильвестра (1.8), крайову задачу (2.7) можна регуляризувати лише за умови $m \leq n$. Позначимо $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ довільну матрицю повного рангу $m \leq n$. Повнота рангу матриці $\mathcal{Q}$ рівнозначна рівнянню

$$Q_b\, X_0^{-1}(\tau)(I_n + S) X_0(\tau) = \mathcal{E} - Q_a,$$

розв'язному відносно матриці S за умови

$$P_{(Q_b\, X_0^{-1}(\tau))^*}\Big(\mathcal{E} - Q_a\Big) = 0. \tag{2.9}$$

У разі виконання рівності (2.9) одержуємо принаймні одну матрицю

$$S = \Big(Q_b\, X_0^{-1}(\tau)\Big)^+ \Big(\mathcal{E} - Q_a\Big)\, X_0^{-1}(\tau) - I_n.$$

яка забезпечує розв'язність задачі (2.7) з імпульсним впливом (2.8) у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[a, b] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Дійсно, вимога $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ забезпечує розв'язність рівняння

$$\mathcal{Q}\, c = \alpha - \ell\mathcal{K}\Big[f(s); S\Big](\cdot),$$

а, отже, існування $r-$ параметричної $(r > 0)$ сім'ї розв'язків

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + \mathcal{K}\Big[f(s); S\Big](t) - X(t)\mathcal{Q}^+\ell\mathcal{K}\Big[f(s); S\Big](\cdot), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $X_r(t)-$ $(n \times r)-$ вимірна матриця, складена з $r-$ лінійно-незалежних розв'язків однорідної частини задачі (2.7) з імпульсним впливом (2.8). Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 2.2.1. *Якщо нетерова $(m \neq n)$ крайова задача (2.7) не розв'язна у класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$, то за умови (2.9) існує принаймні одна матриця*

$$S = \Big(Q_b\, X_0^{-1}(\tau)\Big)^+ \Big(\mathcal{E} - Q_a\Big)\, X_0^{-1}(\tau) - I_n,$$

яка забезпечує розв'язність задачі (2.7) з імпульсним впливом (2.8) у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[a, b] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$ у вигляді $r-$ параметричної $(r > 0)$ сім'ї розв'язків

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \alpha\Big](t), \quad r := n - m, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

зображуваного за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G\Big[f(s); \alpha\Big](t) := \mathcal{K}\Big[f(s); S\Big](t) - X(t)\mathcal{Q}^+\ell\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)$$

задачі (2.7) з імпульсним впливом (2.8). Тут $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — довільна матриця повного рангу $m \leq n$.

У залежності від матриці S імпульсний вплив (2.8) за умови

$$\det\Big(I_n + S\Big) \neq 0$$

— невироджений [55, 110], або ж вироджений [14, 89]:

$$\det\Big(I_n + S\Big) = 0.$$

У разі повноти рангу матриці Q_a, або ж матриці Q_b, рівність (2.9) виконується. Дійсно, у наслідок невиродженості матриці $X_0(t)$, у разі повноти рангу матриці Q_b, добуток $Q_b\, X_0^{-1}(\tau)$ — також матриця повного рангу, що забезпечує у разі $m \leq n$ рівність (2.9). У разі повноти рангу матриці Q_a рівність $\mathcal{E} = Q_a$ забезпечує вимогу (2.9). Таким чином, доведено наступне твердження.

Наслідок 2.2.1. *Якщо нетерова ($m \neq n$) крайова задача (2.7) не розв'язна у класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$, то разі повноти рангу матриці Q_a, або ж матриці Q_b, існує принаймні одна матриця*

$$S = \Big(Q_b\, X_0^{-1}(\tau)\Big)^+ \Big(\mathcal{E} - Q_a\Big)\, X_0^{-1}(\tau) - I_n,$$

яка забезпечує розв'язність задачі (2.7) з імпульсним впливом (2.8) у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[a, b] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$ у вигляді $r-$ параметричної ($r > 0$) сім'ї розв'язків

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

задачі (2.7) з імпульсним впливом (2.8). Тут $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — довільна матриця повного рангу $m \leq n$.

Приклад 2.2.1. *Умови доведеного наслідку 2.2.1 виконуються у випадку двоточкової крайової задачі*

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \quad \ell z(\cdot) := M_1 z(0) - M_2 z(2\pi) = \alpha, \tag{2.10}$$

яка для довільної неперервної функції $f(t)$ *не має розв'язків у класі* $z(t) \in \mathbb{C}^1[0;2\pi]$; *в той же час у класі функцій*

$$z(t) \in C^1\Big\{[0,2\pi] \setminus \{\tau\}_I\Big\}, \quad \tau := \pi$$

двоточкова крайова задача з імпульсним впливом

$$dz/dt = A(t)z + f(t),\ t \neq \tau,\ \ell z(\cdot) = \alpha,\ \Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) \qquad (2.11)$$

розв'язна для довільної неперервної функції $f(t)$ *та довільного вектора* $\alpha \in \mathbb{R}^3$; *тут*

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

крім того

$$M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нормальна ($X_0(a) = I_5$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (2.10) має зображення

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & t\sin t & -\sin t & t\cos t & \cos t \\ 0 & \cos t & 0 & -\sin t & -\sin t \\ \sin t & -t\cos t & \cos t & t\sin t & t\sin t \\ 0 & \sin t & 0 & \cos t & e^t + \cos t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2\pi & -2\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 + e^{2\pi} \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

крайова задача (2.10) не розв'язна у класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[0,2\pi]$ для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^3$. У той же час, регуляризована крайова задача з імпульсним впливом (2.11) розв'язна для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора α, якщо $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$. Лінійний обмежений векторний функціонал $\ell z(\cdot)$ може бути зображений у вигляді

$$\ell z(\cdot) = \ell_a z(\cdot) + \ell_b z(\cdot),$$

де

$$\ell_a z(\cdot) = M_1 z(0), \quad \ell_b z(\cdot) = -M_2 z(2\pi)$$

— лінійні обмежені функціонали. У наслідок повноти рангу матриці

$$Q_b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2\pi & -2\pi \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 + e^{2\pi} \end{pmatrix}$$

рівність (2.9) виконується. Позначимо $\theta := 1 + \pi^2$. Для матриці повного рангу

$$\mathcal{E} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

існує принаймні одна матриця

$$S = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\left(2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\right)(-1+\pi)}{2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\theta} & \frac{2+2e^{\pi}+e^{2\pi}}{2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\theta} & 0 & -\frac{e^{-\pi}(2+e^{\pi})\pi}{2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\theta} \\ -1 & 0 & 0 & \pi & \pi \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{\pi}(1+e^{\pi})(-1+\pi)\pi}{2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\theta} & \frac{e^{\pi}(1+e^{\pi})\pi}{2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\theta} & -1 & \frac{e^{-\pi}-\pi^2}{2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\theta} \\ 0 & -\frac{e^{\pi}(-1+\pi)\pi}{2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\theta} & -\frac{e^{\pi}\pi}{2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\theta} & 0 & \frac{e^{-\pi}\left(1-2e^{2\pi}+e^{\pi}\theta-e^{3\pi}\left(1+\pi^2\right)\right)}{2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\theta} \end{pmatrix},$$

яка забезпечує розв'язність регуляризованої задачі з імпульсним впливом (2.11) у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

для довільної функції $f(t) \in \mathbb{C}^1[0, 2\pi]$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^3$, а, отже, існування $r = 3$ параметричної сім'ї розв'язків

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3.$$

Тут

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} (t-1)\sin t & (t-1)\sin t & 2t\cos t \\ \cos t & \cos t & -2\sin t \\ -(t-1)\cos t & -(t-1)\cos t & 2t\sin t \\ \sin t & \sin t & 2\cos t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi[,$$

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} (t-\pi)\sin t & (t-\pi)\sin t & 0 \\ \cos t & \cos t & 0 \\ -(t-\pi)\cos t & -(t-\pi)\cos t & 0 \\ \sin t & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi, 2\pi]$$

— матриця, складена з $r = 3$ лінійно-незалежних розв'язків однорідної частини задачі (2.11). Позначимо для визначеності $\alpha = 0$ та

$$f(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin t & 0 & 0 \end{pmatrix}^*.$$

Розв'язок $z(t, c_r)$ регуляризованої задачі з імпульсним впливом (2.11) зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2(\pi-t)\cos t + (-2+\pi+\pi t)\sin t) \\ \frac{\pi}{2}\cos t \\ -\frac{\pi}{2}(1+t)\cos t + (-\pi+t)\sin t \\ \frac{\pi}{2}\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in [0, \pi[,$$

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](t) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{2\left(2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\right)(2\pi-t)\cos t+\left(2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\left(1+\pi^2\right)\right)\left(2+\pi^2-\pi t\right)\sin t}{2(2+2e^{\pi}+e^{2\pi}(1+\pi^2))} \\ \frac{\pi\left(\left(2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\left(1+\pi^2\right)\right)\cos t+2e^{2\pi}\pi\sin t\right)}{2(2+2e^{\pi}+e^{2\pi}(1+\pi^2))} \\ \frac{\pi\left(2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\left(1+\pi^2\right)\right)(\pi-t)\cos t-2\left(2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\right)(2\pi-t)\sin t}{2(2+2e^{\pi}+e^{2\pi}(1+\pi^2))} \\ \frac{\pi\left(2e^{t}\pi-2e^{2\pi}\pi\cos t+\left(2+2e^{\pi}+e^{2\pi}\left(1+\pi^2\right)\right)\sin t\right)}{2(2+2e^{\pi}+e^{2\pi}(1+\pi^2))} \\ -\frac{e^{t}\pi^2}{2+2e^{\pi}+e^{2\pi}(1+\pi^2)} \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi, 2\pi].$$

У даному випадку

$$\det\Big(I_5 + S\Big) = 0,$$

тому імпульсний вплив (2.11) — вироджений [14, 89].

Регуляризація крайової задачі (2.7) за допомогою імпульсного впливу (2.8) можлива лише за умови $m \leq n$. Якщо $m < n$, існує принаймні одна матриця

$$S = \Big(Q_b\, X_0^{-1}(\tau)\Big)^+ \Big(\mathcal{E} - Q_a\Big)\, X_0^{-1}(\tau) - I_n,$$

яка забезпечує розв'язність задачі (2.7) з імпульсним впливом (2.8) у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[a,b] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$, причому

$$\text{rank}\,\Big(I_n + S\Big) \leq \text{rank}\,\Big(\mathcal{E} - Q_a\Big) \leq m < n,$$

отже, за умови $m < n$, доведено виродженість імпульсного впливу (2.8). Якщо ж $m = n$, існує принаймні одна матриця S, яка забезпечує розв'язність задачі (2.7) з імпульсним впливом (2.8) для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$, причому

$$\text{rank}\,\Big(I_n + S\Big) = \text{rank}\,\Big(\mathcal{E} - Q_a\Big) \leq n,$$

отже, за умови $m = n$, невиродженість матриці $\mathcal{E} - Q_a$ забезпечує невиродженість імпульсного впливу (2.8). Таким чином, доведено наступне твердження.

Наслідок 2.2.2. *Якщо нетерова ($m \neq n$) крайова задача (2.7) не розв'язна у класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$, то разі повноти рангу матриці Q_b існує принаймні одна матриця*

$$S = \Big(Q_b\, X_0^{-1}(\tau)\Big)^+ \Big(\mathcal{E} - Q_a\Big)\, X_0^{-1}(\tau) - I_n,$$

яка забезпечує розв'язність задачі (2.7) з імпульсним впливом (2.8) у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[a,b] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$ у вигляді $r-$ параметричної ($r > 0$) сім'ї розв'язків $z(t, c_r)$ задачі (2.7) з *імпульсним впливом (2.8). Тут $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — довільна матриця повного рангу $m \leq n$. Умова $m < n$ гарантує виродженість імпульсного впливу (2.8); у випадку $m = n$ невиродженість матриці $\mathcal{E} - Q_a$ забезпечує невиродженість імпульсного впливу (2.8).*

Приклад 2.2.2. *Умови доведеного наслідку 2.2.2 виконуються у випадку двоточкової крайової задачі (2.10), яка для довільної неперервної функції $f(t)$ не має розв'язків у класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[0; 2\pi]$; в той же час у класі функцій*

$$z(t) \in C^1\Big\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau\}_I\Big\}, \quad \tau := \pi$$

двоточкова крайова задача з імпульсним впливом (2.11) розв'язна для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^5$; тут $A(t)$ — матриця, наведена у прикладі 2.2.1, крім того

$$M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нормальна ($X_0(a) = I_5$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (2.10) наведена у прикладі 2.2.1. Оскільки

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -e^{2\pi} \\ 0 & 0 & 0 & -2\pi & -2\pi \\ 0 & 1+2\pi & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & e^{2\pi} \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

крайова задача (2.10) не розв'язна у класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[0, 2\pi]$ для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^5$. У наслідок повноти рангу матриці Q_b рівність (2.9) виконується. Для матриці повного рангу $\mathcal{E} := 2Q_a$ існує принаймні одна матриця

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2\pi & 2\pi \\ 0 & -1-\pi & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\pi^2 & -1-\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-e^{-\pi} & -e^{-2\pi}\left(1+e^{\pi}+e^{2\pi}\right) \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\pi} & -1+e^{-2\pi}+e^{-\pi} \end{pmatrix},$$

яка забезпечує розв'язність регуляризованої задачі з імпульсним впливом (2.11) у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

для довільної функції $f(t) \in \mathbb{C}^1[0, 2\pi]$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^5$, а, отже, існування єдиного ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) розв'язку

$$z(t) = G\Big[f(s); \alpha\Big](t).$$

Тут

$$\mathcal{Q} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Позначимо для визначеності $\alpha = 0$ та

$$f(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin t & 0 & 0 \end{pmatrix}^*.$$

Розв'язок $z(t)$ регуляризованої задачі з імпульсним впливом (2.11) зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G\Big[f(s); \alpha\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t\cos t - \sin t \\ 0 \\ t\sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi[,$$

$$G\Big[f(s); \alpha\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-2\pi + t)\cos t - \sin t \\ 0 \\ (-2\pi + t)\sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi, 2\pi].$$

У даному випадку

$$\det\Big(\mathcal{E} - Q_a\Big) = 1 \neq 0,$$

тому, згідно наслідку 2.2.2,

$$\det\Big(I_5 + S\Big) = -e^{-2\pi} \neq 0,$$

отже, імпульсний вплив (2.11) — невироджений [14, 89].

2.3 Регуляризація періодичних крайових задач за допомогою імпульсного збурення

Припустимо задачу про знаходження T-періодичних розв'язків

$$z(t) \in \mathbb{C}^1[0, T]$$

системи звичайних диференціальних рівнянь [110]

$$dz(t)/dt = A(t)z(t) + f(t) \tag{2.12}$$

некоректно поставленою [1, 8]

$$\int_0^T H^*(s)f(s)ds \neq 0$$

для довільної неперервної T-періодичної функції $f(t)$; тут $A(t)$ — неперервна на відрізку $[0, T]$ матриця, $H(t)$ — фундаментальна матриця системи, спряженої до однорідної частини системи (2.12). Дослідимо умови регуляризації [1, 38, 110] крайової задачі для системи (2.12) з періодичною граничною умовою

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(T) = 0 \tag{2.13}$$

та імпульсним впливом [8, 13, 55, 90, 92, 110]

$$\Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) + \mu, \ \Delta z(\tau) := z(\tau + 0) - z(\tau - 0). \tag{2.14}$$

На відміну від монографії [110] та статті [8] поставимо задачу не про умови розв'язності лінійної періодичної крайової задачі для системи (2.12) з фіксованим імпульсним впливом (2.14), а досліджуємо задачу про знаходження T-періодичних розв'язків

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, T] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

а також матриці $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, яка б для фіксованого вектора $\mu := 0$ гарантувала б розв'язність цієї задачі для довільної неперервної функції $f(t)$. Поставлена задача продовжує дослідження умов регуляризації лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою імпульсного впливу, наведених у монографії [110, с. 248] та статті [8] на випадок $\mu := 0$ та не фіксованої матриці S. Позначимо $X_0(t)$ нормальну ($X_0(\tau) = I_n$) фундаментальну матрицю [14, 89] однорідної частини системи (2.12). Загальний розв'язок

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0,T] \setminus \{\tau\}_{_I}\Big\}, \quad 0 < \tau < T$$

диференціальної системи з імпульсним впливом (2.12), (2.14) зобразимо у вигляді

$$z(t,c) = X(t)c + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) := \begin{cases} -X_0(t)\int_t^\tau X_0^{-1}(s)f(s)ds & t \in [0,\tau[, \\ X_0(t)\int_\tau^t X_0^{-1}(s)f(s)ds, & t \in [\tau,T] \end{cases}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(\tau) = 0$ для диференціальної системи (2.12) та $X(t)-$ нормальна $(X(\tau - 0) = I_n)$ фундаментальна матриця однорідної частини системи (2.12) з імпульсним впливом (2.14)

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [0,\tau[, \\ X_0(t)(I_n + S), & t \in [\tau,T]. \end{cases}$$

Диференціальна система (2.12) з періодичною крайовою умовою (2.13) та імпульсним впливом (2.14) розв'язна у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0,T] \setminus \{\tau\}_{_I}\Big\}$$

для довільної неперервної функції $f(t)$, якщо $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$. Лінійний векторний функціонал $\ell z(\cdot)$ у даному випадку може бути зображений у вигляді

$$\ell z(\cdot) = \ell_a z(\cdot) + \ell_b z(\cdot), \quad \ell_a z(\cdot) := z(0), \quad \ell_b z(\cdot) := z(T).$$

Позначимо матриці

$$Q_a := \ell_a X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad Q_b := \ell_b X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Вимога $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ рівнозначна повноті рангу матриці $\mathcal{Q}$. Позначимо довільну невироджену матрицю $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Повнота рангу матриці $\mathcal{Q} := \ell X(\cdot)$ рівнозначна рівнянню

$$Q_b\,(I_n + S) = \mathcal{E} - Q_a,$$

розв'язному відносно матриці $Q_b := \ell_b X_0(\cdot) := -X_0(T)$ у наслідок невиродженості нормальної $(X_0(\tau) = I_n)$ фундаментальної матриці $X_0(t)$

однорідної частини системи (2.12). Таким чином, одержуємо принаймні одну матрицю

$$S = X_0^{-1}(T)\Big(Q_a - \mathcal{E}\Big) - I_n,$$

яка забезпечує однозначну розв'язність задачі (2.12), (2.13) з імпульсним впливом (2.14) для довільної неперервної функції $f(t)$, причому

$$\det\Big(I_n + S\Big) = \det\Big(\mathcal{E} - Q_a\Big) = \det\Big(X_0(0) - \mathcal{E}\Big).$$

Отже, за умови невиродженості матриці $X_0(0) - \mathcal{E}$, наприклад, у разі $\mathcal{E} := X_0(0)$, імпульсний вплив (2.14) — невироджений. Таким чином, доведено наступне твердження.

Наслідок 2.3.1. *Якщо задача про знаходження T-періодичних розв'язків*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1[0, T]$$

системи звичайних диференціальних рівнянь (2.12) нерозв'язна, то існує принаймні одна матриця

$$S = X_0^{-1}(T)\Big(Q_a - \mathcal{E}\Big) - I_n,$$

яка забезпечує розв'язність задачі (2.12), (2.13) з імпульсним впливом (2.14) для довільної неперервної функції $f(t)$ у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[a, b] \setminus \{\tau\}_I\Big\},$$

у вигляді $r-$ параметричної $(r > 0)$ сім'ї розв'язків

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s)\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

задачі (2.7) з імпульсним впливом (2.8). Умова невиродженості матриці $X_0(0) - \mathcal{E}$ гарантує однозначну розв'язність задачі (2.12), (2.13) з невиродженим імпульсним впливом (2.14). У разі ж

$$\det\Big(X_0(0) - \mathcal{E}\Big) = 0$$

імпульсний вплив (2.14) — вироджений. Тут $X_0(t)$ нормальна $(X_0(\tau) = I_n)$ фундаментальна матриця однорідної частини системи (2.12), $X(t)-$

нормальна ($X(\tau-0)=I_n$) *фундаментальна матриця однорідної частини задачі (2.12), (2.13) з імпульсним впливом (2.14)*

$$X(t)=\begin{cases} X_0(t), & t\in[0,\tau[,\\ X_0(t)(I_n+S), & t\in[\tau,T],\end{cases}$$

$X_r(t)-$ $(n\times r)-$ *вимірна матриця, складена з* $r-$ *лінійно-незалежних розв'язків однорідної частини задачі (2.12) з імпульсним впливом (2.14),* $\mathcal{E}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *— довільна матриця повного рангу.*

Доведений наслідок 2.3.1 не передбачає вимоги існування розв'язків рівняння відносно матриці $S\in\mathbb{R}^{n\times n}$, тому суттєво покращує відповідний результат [96].

Приклад 2.3.1. *Умови доведеного наслідку 2.3.1 виконуються у випадку* $2\pi-$ *періодичної крайової задачі*

$$dz/dt=A(t)z+f(t),\quad \ell z(\cdot):=z(0)-z(2\pi)=0,\qquad (2.15)$$

яка для довільної неперервної функції $f(t)$ *не має розв'язків у класі* $z(t)\in\mathbb{C}^1[0;2\pi]$; *в той же час у класі функцій*

$$z(t)\in C^1\Big\{[0,2\pi]\setminus\{\tau\}_I\Big\},\quad \tau:=\pi$$

$2\pi-$ *періодична крайова задача з імпульсним впливом*

$$dz/dt=A(t)z+f(t),\quad t\neq\tau,\quad \ell z(\cdot)=0,\quad \Delta z(\tau)=Sz(\tau-0)\qquad (2.16)$$

розв'язна для довільної неперервної функції $f(t)$; *тут*

$$A(t):=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Нормальна ($X_0(\pi)=I_3$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (2.15) має вигляд

$$X(t)=\begin{pmatrix}e^{t-\pi}&0&0\\0&-\cos t&-\sin t\\0&\sin t&-\cos t\end{pmatrix},$$

Оскільки

$$Q = \begin{pmatrix} e^{-\pi} - e^{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

крайова задача (2.15) не розв'язна у класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[0, 2\pi]$ для довільної неперервної функції $f(t)$. Для матриці повного рангу $\mathcal{E} := -Q_a$ знаходимо єдину матрицю

$$S = \begin{pmatrix} -1 - 2e^{-2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

яка забезпечує розв'язність регуляризованої задачі з імпульсним впливом (2.16) у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

для довільної функції $f(t) \in \mathbb{C}^1[0, 2\pi]$. У наслідок невиродженості матриці $X_0(0) - \mathcal{E}$ імпульсний вплив (2.16) невироджений, а розв'язок регуляризованої задачі (2.16) — єдиний. Покладемо для визначеності

$$f(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin t \end{pmatrix}^*.$$

Розв'язок $z(t)$ регуляризованої задачі з імпульсним впливом (2.16) зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G\Big[f(s)\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -t\cos t + \sin t \\ t\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi[,$$

$$G\Big[f(s)\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ (\pi - t)\cos t + \sin t \\ (t - \pi)\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi, 2\pi].$$

Для матриці ж повного рангу

$$\mathcal{E} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

знаходимо матрицю

$$S = \begin{pmatrix} -1 - e^{-2\pi} & 0 & e^{-\pi} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

яка також забезпечує розв'язність регуляризованої задачі з імпульсним впливом (2.16). У наслідок виродженості матриці $X_0(0) - \mathcal{E}$ імпульсний вплив (2.16) також вироджений, але розв'язок регуляризованої задачі (2.16) — єдиний. Для тієї ж самої неоднорідності$f(t)$ розв'язок $z(t)$ регуляризованої задачі з імпульсним впливом (2.16) набуває вигляду

$$G\Big[f(s)\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -(\pi + t)\cos t + \sin t \\ (\pi + t)\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi[,$$

$$G\Big[f(s)\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ (\pi - t)\cos t + \sin t \\ (t - \pi)\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi, 2\pi].$$

Таким чином, доведений наслідок дозволяє знаходження, як виродженого, так і невиродженого імпульсного впливу (2.14), який дає розв'язок задачі про регуляризацію задачі про знаходження періодичних розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь (2.12). На завершення зазначимо, що побудована нами схема регуляризації лінійних нетерових крайових задач аналогічно [91, 116, 128] може бути перенесена на матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі.

2.4 Регуляризація лінійної нетерової крайової задачі за допомогою імпульсного впливу типу "interface conditions"

Припустимо далі, що крайова задача

$$dz(t)/dt = A(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^m \tag{2.17}$$

не розв'язна у класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора α :

$$P_{Q^*}\left\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\right\} \neq 0, \quad Q := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \text{rank}\, Q := n_1.$$

Тут $A(t)$ — неперервна на відрізку $[a, b]$ матриця та $\ell z(\cdot)$– лінійний векторний функціонал, компоненти якого

$$\ell^{(1)} z(\cdot),\ \dots\ , \ell^{(m)} z(\cdot) : \mathbb{C}[a, b] \to \mathbb{R}^1$$

— лінійні обмежені функціонали, $P_{Q^*} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матриця-ортопроектор:

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q^*),$$

$X_0(t)$ — нормальна ($X_0(a) = I_n$) фундаментальна матриця [14, 89] однорідної частини системи (2.17). На відміну від монографії [110] та статті [8] поставимо задачу про знаходження умов розв'язності та побудову розв'язку

$$z(t) \in \mathbb{C}^1 \Big\{ [a, b] \setminus \{\tau_i\}_I \Big\}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p, \quad \tau_i \in [a, b]$$

лінійної крайової задачі для системи з імпульсним впливом типу "interface conditions" [13, 90, 92]

$$dz(t)/dt = A(t)z(t) + f(t), \quad \mathcal{L}z(\cdot) = \check{\alpha}, \tag{2.18}$$

Лінійний обмежений векторний функціонал

$$\mathcal{L}z(\cdot) : \mathbb{C}[a, b] \to \mathbb{R}^m,$$

припускаємо, зображується у вигляді

$$\mathcal{L}z(\cdot) = \sum_{i=0}^{p} \ell_i z(\cdot), \quad \ell_0 z(\cdot) : \mathbb{C}[a, \tau_1] \to \mathbb{R}^m, \quad \ell_p z(\cdot) : \mathbb{C}[\tau_p, b] \to \mathbb{R}^m,$$

$$\ell_i z(\cdot) : \mathbb{C}[\tau_{i-1}, \tau_i[\to \mathbb{R}^m, \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p$$

та гарантує розв'язність задачі (2.18) у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1 \Big\{ [a, b] \setminus \{\tau_i\}_I \Big\}$$

для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Поставлена задача продовжує дослідження умов регуляризації лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою імпульсного впливу, наведених у монографії [110, с. 248] на випадок імпульсного впливу типу "interface conditions" [94]

$$\mathcal{L}z(\cdot) := \begin{pmatrix} \ell_0 z(\cdot) + \ell_1 z(\cdot) \\ \ell_0 z(\cdot) + \ell_1 z(\cdot) + \ell_2 z(\cdot) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \ell_0 z(\cdot) + \ell_1 z(\cdot) + \ \dots\ + \ell_p z(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \alpha \end{pmatrix} := \check{\alpha}\ .$$

Позначимо матрицю

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [a, \tau_1[, \\ X_0(t-\tau_1), & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_0(t-\tau_p), & t \in [\tau_p, b]\ , \end{cases}$$

а також матрицю

$$\Theta := \begin{pmatrix} Q_0 & Q_1 & O & \ldots & O \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & O \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & \ldots & Q_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p\cdot m\times n\cdot(p+1)}, \quad \theta := \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \ldots \\ \theta_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$$

та її ортопроектор $P_{\Theta^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(\Theta^*)$; тут

$$Q_0 := \ell_0 X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \ldots\ ,\ Q_p := \ell_p X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Розв'язок задачі (2.18)

$$z(t) \in \mathbb{C}^1 \Big\{ [a, b] \setminus \{\tau_i\}_I \Big\}$$

зображується у вигляді

$$z(t, c) = X(t)c + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), \quad t \in [a, b], \quad t \neq \tau_i \in [a, b], \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) := X_0(t)\int_0^t X_0^{-1}(s)f(s)ds, \quad t \in [a, b], \quad t \neq \tau_i \in [a, b]$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = c$ для диференціальної системи (2.18). Загальний розв'язок однорідної частини системи (2.18)

$$z_0(t, c_i) = X(t)\cdot c_i = \begin{cases} X_0(t)\cdot c_0, & t \in [a, \tau_1[, \\ X_0(t-\tau_1)\cdot c_1, & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_0(t-\tau_p)\cdot c_p, & t \in [\tau_p, b] \end{cases}$$

задовольняє крайовій умові (2.18) за умови $\Theta\cdot\theta = 0$. Останню умову задовольняє вектор

$$\theta = P_\Theta \cdot \check{\theta}, \quad \check{\theta} \in \mathbb{R}^{n(p+1)};$$

тут P_Θ — ортопроектор:

$$\mathbb{R}^{n(p+1)} \to \mathbb{N}(\Theta).$$

Позначимо матрицю P_{Θ_r}, утворену з $r \leq n$ лінійно незалежних стовпців ортопроектора P_Θ та матриці

$$W_0 := \begin{pmatrix} I_n & O & \dots & O \end{pmatrix} \cdot P_{\Theta_r}, \; \dots \; , \; W_p := \begin{pmatrix} O & O & \dots & I_n \end{pmatrix} \cdot P_{\Theta_r}.$$

Таким чином, отримуємо загальний розв'язок

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) \cdot c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

однорідної частини системи (2.18), де

$$X_r(t) := \begin{cases} X_0(t) \cdot W_0, & t \in [a, \tau_1[, \\ X_0(t-\tau_1) \cdot W_1, & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_0(t-\tau_p) \cdot W_p, & t \in [\tau_p, b] \end{cases}$$

— фундаментальна матриця однорідної частини крайової задачі (2.18). Для розв'язання неоднорідної крайової задачі (2.18) достатньо задовольнити крайову умову

$$\mathcal{L}z(\cdot) := \ell_0 z(\cdot) + \ell_1 z(\cdot) + \; \dots \; + \ell_p z(\cdot) = \check{\alpha}. \tag{2.19}$$

Таким чином, отримуємо рівняння

$$\mathcal{Q} \cdot c = \check{\alpha} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot), \quad \mathcal{Q} := \mathcal{Q}(\tau) := \mathcal{L}X(\cdot), \quad \tau := [\; \tau_1, \; \tau_2, \; \dots \; , \; \tau_p \;] \; ,$$

розв'язне тоді й тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{Q}^*}\Big\{\check{\alpha} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0;$$

тут $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$. Розв'язність крайової задачі (2.18) для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$ гарантує умова $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, рівнозначна рівнянню

$$\mathcal{F}(\tau) := \mathcal{Q}(\tau) \cdot \mathcal{Q}^+(\tau) = I_m \tag{2.20}$$

відносно невідомого вектора $\tau \in \mathbb{R}^p$. Зазначимо, що у критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$), згідно із теоремою 1.1.3, рівняння (2.20) розв'язне [81, 129] лише для фредгольмової ($m = n$), або ж недовизначеної ($m < n$) крайової задачі (2.18). Отже, рівняння (2.20), розв'язне, зокрема, для фредгольмової ($m = n$) крайової задачі (2.18) за умови $\det \mathcal{Q}(\tau) \neq 0$, при цьому існує принаймні один вектор τ, який дає розв'язок рівняння (2.20). Таким чином, доведено наступну умову регуляризації лінійної нетерової крайової задачі за допомогою імпульсного впливу типу "interface conditions" [94].

Теорема 2.4.1. *Якщо крайова задача (2.17) у класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ не розв'язна для довільної неперервної функції $f(t)$ та довільного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$:*

$$P_{Q^*}\left\{\alpha - \ell K\left[f(s)\right](\cdot)\right\} \neq 0,$$

то для кожного вектора $\tau \in \mathbb{R}^p$ — розв'язку рівняння (2.20), крайова задача (2.18) у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\left\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\right\}, \quad p = \min_{j \in \mathbb{N}} p_j, \quad \max_{0 \leq i \leq p_j} \operatorname{rank} \left[\mathcal{Q}(\tau)\right] = m \leq n$$

має принаймні один розв'язок

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + \mathcal{G}\left[f(s), \alpha\right](t), \quad t \in [a,b], \quad t \neq \tau_i \in [a,b], \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де

$$\mathcal{G}\left[f(s); \alpha\right](t) := X(t)\mathcal{Q}^+\left\{\check{\alpha} - \mathcal{L}\mathcal{K}\left[f(s)\right](\cdot)\right\} + \mathcal{K}\left[f(s)\right](t)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі про регуляризацію за допомогою імпульсного впливу (2.18),

$$X_r(t) = \begin{cases} X_0(t)W_0, & W_0 = \begin{pmatrix} I_n & O & \ldots & O \end{pmatrix} \cdot P_{\Theta_r}, & t \in [a, \tau_1[, \\ X_0(t-\tau_1)W_1, & W_1 = \begin{pmatrix} O & I_n & \ldots & O \end{pmatrix} \cdot P_{\Theta_r}, & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_0(t-\tau_p)W_p, & W_p := \begin{pmatrix} O & O & \ldots & I_n \end{pmatrix} \cdot P_{\Theta_r}, & t \in [\tau_p, b] \end{cases}$$

— фундаментальна матриця однорідної частини задачі (2.18).

Приклад 2.4.1. *Умови теореми 2.4.1 виконуються для трьохточкової задачі*

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \quad \ell z(\cdot) := M_0 z(-\pi) + M_1 z(0) + M_2 z(\pi) = 1, \quad (2.21)$$

яка для довільної неперервної функції $f(t) \in \mathbb{C}[-\pi;\pi]$ *не має розв'язків у класі функцій* $z(t) \in \mathbb{C}^1[-\pi;\pi]$; *у той же час у класі*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[-\pi;\pi] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, \quad \tau_1 := -\frac{\pi}{2}, \quad \tau_2 := \frac{\pi}{2}$$

трьохточкова крайова задача з імпульсним впливом

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \ t \neq \tau, \tag{2.22}$$

$$\mathcal{L}z(\cdot) := M_0 z(-\pi) + M_1 z(0) + M_2 z(\pi) = \alpha$$

розв'язна для довільної неперервної функції $f(t) \in \mathbb{C}[-\pi;\pi]$; *тут*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad M_0 = M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = 2M_0.$$

Оскільки

$$X_0(t) = \begin{bmatrix} -\cos t & \sin t \\ -\sin t & -\cos t \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{Q^*} = (1), \quad P_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то у випадку трьохточкової задачі для диференціального рівняння (2.21) має місце критичний випадок, при цьому необхідну і достатню умову існування гладкого розв'язку в класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[-\pi;\pi]$ для довільної неперервної функції $f(t) \in \mathbb{C}[-\pi;\pi]$ не виконано, в то й же час, у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[-\pi;\pi] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, \quad \tau_1 := -\frac{\pi}{2}, \quad \tau_2 := \frac{\pi}{2}$$

трьохточкова крайова задача з імпульсним впливом (2.22) розв'язна для довільної функції

$$f(t) \in \mathbb{C}\Big\{[-\pi;\pi] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}.$$

У тому же просторі нормальна $(X(-\pi) = X(-\frac{\pi}{2}) = X(\frac{\pi}{2}) = I_2)$ фундаментальна матриця $X(t)$ однорідної частини диференціальної системи (2.21) набуває вигляду

$$X(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\cos t & \sin t \\ -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}, & t \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}[, \\ \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix}, & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \\ \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Тут

$$Q_0 := \ell_0 X_0(\cdot) = M_0 X_0(-\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 := \ell_1 X_0(\cdot) = M_1 X_0(0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 := \ell_2 X_0(\cdot) = M_2 X_0(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для побудови фундаментальної системи розв'язків $X_r(t)$ однорідної частини диференціальної системи (2.22) використовуємо матрицю

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ортопроектор

$$P_{\Theta} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

а також матрицю, утворену з двох лінійно незалежних стовпців останнього ортопроектора

$$P_{\Theta_r} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$; то неоднорідна задача (2.22), регуляризована за допомогою імпульсного впливу, розв'язна для довільної функції $f(t)$; тут

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

При цьому трьохточкова крайова задача з імпульсним впливом (2.22), регуляризована за допомогою імпульсного впливу має однопараметричну сім'ю розв'язків

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + \mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t), \quad t \in [-\pi; \pi], \quad t \neq \tau_1, \quad t \neq \tau_2, \quad c_r \in \mathbb{R}^2,$$

де

$$X_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -\cos t + \sin t & 0 \\ -\cos t - \sin t & 0 \end{pmatrix}, & t \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}[, \\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\cos t + 3\sin t & 0 \\ -3\cos t + 2\sin t & 0 \end{pmatrix}, & t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\cos t - \sin t \\ 0 & \cos t - \sin t \end{pmatrix}, & t \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases}$$

— фундаментальна матриця однорідної частини крайової задачі з імпульсним впливом (2.22),

$$\mathcal{G}\Big[f(s), \alpha\Big](t) = \frac{1}{10}\left[\begin{array}{c} \cos t + 2\sin t \\ -2\cos t + 11\sin t \end{array}\right], \quad t \in \Big[-\pi; -\frac{\pi}{2}\Big[,$$

$$\mathcal{G}\Big[f(s), \alpha\Big](t) = \frac{1}{10}\left[\begin{array}{c} 2\cos t - \sin t \\ \cos t + 12\sin t \end{array}\right], \quad t \in \Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big[,$$

$$\mathcal{G}\Big[f(s), \alpha\Big](t) = \frac{1}{10}\left[\begin{array}{c} -2\cos t + \sin t \\ -\cos t + 8\sin t \end{array}\right], \quad t \in \Big[\frac{\pi}{2}; \pi\Big]$$

— узагальнений оператор Гріна задачі про регуляризацію за допомогою імпульсного впливу (2.21).

Рівняння (2.20), зокрема, розв'язне для фредгольмової ($m = n$) періодичної задачі

$$dz(t)/dt = A(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) := z(0) - z(T) = 0, \tag{2.23}$$

при цьому будь-який момент імпульсного впливу $0 < \tau < T$ є розв'язком рівняння (2.20). Таким чином, доведено наступну умову регуляризації лінійної нетерової крайової задачі за допомогою імпульсного впливу.

Наслідок 2.4.1. *Якщо крайова задача (2.23) у класі* $z(t) \in \mathbb{C}^1[0; T]$ *не розв'язна для довільної неперервної функції* $f(t)$:

$$P_{Q^*}\ell K\Big[f(s)\Big](\cdot) \neq 0,$$

то для кожного $0 < \tau < T$ *крайова задача (2.23) у класі*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, T] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

має принаймні один розв'язок

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + \mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t), \quad t \in [0;T], \quad t \neq \tau, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t) := \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) - X(t)\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі про регуляризацію за допомогою імпульсного впливу періодичної задачі (2.23),

$$X_r(t) = \begin{cases} X_0(t)W_0, & W_0 = \begin{pmatrix} I_n & O \end{pmatrix} \cdot P_{\Theta_r}, \ \ t \in [0, \tau[, \\ X_0(t-\tau_1)W_1, & W_1 = \begin{pmatrix} O & I_n \end{pmatrix} \cdot P_{\Theta_r}, \ \ t \in [\tau, T] \end{cases}$$

— фундаментальна матриця однорідної частини задачі (2.23).

Приклад 2.4.2. *Умови наслідку 2.4.1 виконуються для періодичної задачі*

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \quad \ell z(\cdot) := z(0) - z(2\pi) = 0, \tag{2.24}$$

яка для довільної неперервної функції $f(t) \in \mathbb{C}[0, 2\pi]$ не має розв'яків у класі функцій $z(t) \in \mathbb{C}^1[0; 2\pi]$; в то й же час, у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau\}_I\Big\}, \quad \tau := \pi$$

періодична крайова задача з імпульсним впливом

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \ t \neq \tau, \ \ \mathcal{L}z(\cdot) := z(0) - z(2\pi) = 0 \tag{2.25}$$

розв'язна для довільної неперервної функції $f(t) \in \mathbb{C}[0, 2\pi]$; тут

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$X_0(t) = \begin{bmatrix} \cos t & t\sin t & -\sin t & t\cos t & t\cos t \\ 0 & \cos t & 0 & -\sin t & -\sin t \\ \sin t & -t\cos t & \cos t & t\sin t & t\sin t \\ 0 & \sin t & 0 & \cos t & -e^t + \cos t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix},$$

то

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\pi & -2\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+e^{2\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-e^{2\pi} \end{pmatrix},$$

при цьому

$$P_{Q^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

отже, у випадку періодичної задачі (2.24) має місце критичний випадок, при цьому необхідну і достатню умову існування гладкого розв'язку в класі $z(t) \in \mathbb{C}^1[0, 2\pi]$ для довільної функции $f(t) \in \mathbb{C}[0, 2\pi]$ не виконано, в той же час, у класі

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau\}_I\Big\}, \quad \tau := \pi$$

періодична крайова задача з імпульсним впливом (2.25) розв'язна для довільної функції

$$f(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau\}_I\Big\}.$$

Дійсно, нормальна ($X(0) = X(\pi) = I_5$) фундаментальна матриця $X(t)$ однорідної частини диференціальної системи з імпульсним впливом (2.25)

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [0; \pi[, \\ X_0(t-\pi), & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

визначає рівність $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, де

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \pi & \pi \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1+e^{\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-e^{\pi} \end{pmatrix}.$$

Для побудови фундаментальної системи розв'язків $X_r(t)$ однорідної частини диференціальної системи (2.22) використовуємо матрицю

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi & \pi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\pi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1+e^{\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{\pi} \end{pmatrix}.$$

Тут $Q_0 = I_5$, крім того

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pi & \pi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1+e^{\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{\pi} \end{pmatrix}.$$

При цьому періодична крайова задача, регуляризована за допомогою імпульсного впливу (2.25) має єдиний ($P_{\mathcal{Q}} = 0$) розв'язок $z(t) = \mathcal{G}[f(s)](t)$ для довільної неперервної функції $f(t) \in \mathbb{C}[0, 2\pi]$; припустимо, наприклад,

$$f(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t & \cos t & \sin t \end{pmatrix}^*,$$

при цьому, для $t \in [0, \pi[$:

$$\mathcal{G}\Big[f(s), 0\Big](t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (2+\pi+t)((\pi+t)\cos t + (2\pi - 1 + 2t)\sin t) \\ 2(\pi+t)(2\cos t - \sin t) \\ \Big[-(2\pi^2 + t\,(3+2t) + \pi(3+4t))\cos t + \\ +(3+\pi^2+2t+t^2+2\pi(1+t))\sin t\Big] \\ 2(e^{\pi+t} + (1+\pi+t)\cos t + 2(1+\pi+t)\sin t) \\ 2(-e^{\pi+t} - \cos t - \sin t) \end{bmatrix}$$

та при $t \in [\pi; 2\pi]$:

$$\mathcal{G}\Big[f(s), 0\Big](t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-2+\pi-t)((\pi-t)\cos t + (2\pi + 1 - 2t)\sin t) \\ -2(\pi-t)(2\cos t - \sin t) \\ \Big[(2\pi^2 - t\,(3+2t) + \pi(3+4t))\cos t + \\ +(3+\pi^2+2t+t^2-2\pi(1+t))\sin t\Big] \\ 2(e^{-\pi+t} + (1-\pi+t)\cos t + 2(1-\pi+t)\sin t) \\ 2(-e^{-\pi+t} - \cos t - \sin t) \end{bmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна в задачі про регуляризацію за допомогою імпульсного впливу (2.25).

Навідміну від статті [80] задача про регуляризацію лінійної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу розв'язана конструктивно, причому отримані достатні умови існування розв'язку рівняння (2.20).

Запропонована техніка регуляризації лінейної нетерової крайової задачі за допомогою імпульсного впливу може бути аналогічно [107] перенесена на матричні крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь, а також аналогічно [112, 116] — на матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі. Крім того, запропонована техніка регуляризації лінейної нетерової крайової задачі може бути аналогічно [106] перенесена на відповідні крайові задачі у частинних похідних.

2.5 Регуляризація матричної крайової задачі за допомогою збурення крайової умови

Припустимо задачу про знаходження розв'язків матричного диференціального рівняння

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \tag{2.26}$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \tag{2.27}$$

некоректно поставленою [1, 38, 110], а саме: припустимо, що матрична крайова задача (2.26), (2.27) не має розв'язків [18, 107]

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \otimes \mathbb{C}^1[a;b]$$

для довільних неоднорідностей

$$F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b], \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}.$$

Тут $A \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$ та $B \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta}$ — сталі матриці; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] \to \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}.$$

Нами досліджено умови регуляризації [1, 38, 110] матричної крайової задачі (2.26), (2.27) за допомогою малого $0 < \varepsilon \ll 1$ збурення

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{U}Z(a,\varepsilon)\mathcal{V}$$

крайової умови (2.27):

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) = \mathfrak{A}, \quad \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\delta\times\alpha}, \quad \mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}. \tag{2.28}$$

На відміну від статей [96, 127] регуляризація матричної крайової задачі (2.26), (2.27) відбувається не за рахунок імпульсного збурення, а за рахунок збурення крайової умови (2.27) у просторі [91, 128]

$$Z(t,\varepsilon): \; Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b], \quad Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0].$$

Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$. Умови розв'язності та структура розв'язків системи (2.26) були наведені в монографії [18]. Конструктивні умови розв'язності та структура періодичного розв'язку системи (2.26) за умов $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ були отримані у статті [107]. Як відомо [18, с. 211], загальний розв'язок задачі Коші

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(a) = \Theta$$

має зображення

$$Z(t,\Theta) = W(t,\Theta) := U(t)\cdot\Theta\cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

де $U(t)$ та $V(t)$ — нормальні фундаментальні матриці:

$$U'(t) = AU(t), \quad U(a) = I_\alpha$$

та

$$V'(t) = BV(t), \quad V(a) = I_\beta.$$

Загальний розв'язок $Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b]$ задачі Коші

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad Z(a) = \Theta$$

має зображення [107]

$$Z(t,\Theta) = W(t,\Theta) + K[F(s)](t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

де

$$K[F(s)](t) := \int_a^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(t)V^{-1}(s)\,ds$$

— оператор Гріна задачі Коші для матричного диференціального рівняння (2.26). Матрична крайова задача (2.26), (2.27) розв'язна тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{L}W(\cdot,\Theta) = \mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot).$$

Позначимо $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ — природний базис [21] простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ та c_j — константи, які визначають розвинення матриці

$$\Theta = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ \dots\ \alpha\cdot\beta$$

за векторами $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базиса простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при цьому

$$\mathcal{L}W(\cdot,\Theta) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j.$$

Таким чином, отримуємо лінійне алгебраїчне рівняння

$$\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j = \mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)$$

відносно $\alpha\cdot\beta$ констант $c_j \in \mathbb{R}^1,\ j = 1, 2,\ \dots,\ \alpha\cdot\beta$, рівнозначне лінійному алгебраїчному рівнянню

$$\mathcal{Q}c = \mathcal{M}[\mathcal{A}] - \mathcal{M}\{\mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} \tag{2.29}$$

відносно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$; тут

$$\mathcal{Q} := [\ \mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(1)}]\ \ \mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(2)}]\ \dots\ \mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(\alpha\cdot\beta)}]\ ] \in \mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\mathcal{Q}^{(j)} := \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}, \quad j = 1, 2,\ \dots,\ \alpha\cdot\beta.$$

Лінійне алгебраїчне рівняння (2.29) розв'язне тоді й тільки тоді, коли [85, 86, 87, 110]

$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} = 0.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор:

$$\mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\gamma\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*).$$

Оскільки, за припущенням, матрична крайова задача (2.26), (2.27) не має розв'язків $Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b]$ для довільних

$$F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b],\ \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma},$$

для цієї задачі має місце критичний випадок [110], а саме: для матричної крайової задачі (2.26), (2.27) має місце нерівність $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$. Отже, матрична крайова задача (2.26), (2.28) матиме розв'язки

$$Z(t,\varepsilon): \; Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b], \quad Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0]$$

для довільних $F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b]$, $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}$ у випадку $P_{\mathfrak{Q}^*} = 0$; тут

$$\mathfrak{Q} := [\; \mathcal{M}[\mathfrak{Q}^{(1)}] \;\; \mathcal{M}[\mathfrak{Q}^{(2)}] \; ... \; \mathcal{M}[\mathfrak{Q}^{(\alpha\cdot\beta)}] \;] \in \mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\mathfrak{Q}^{(j)} := \check{\mathcal{L}}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}, \quad j = 1, 2, \; ... \; , \; \alpha\cdot\beta.$$

Як відомо [4], кожна $(m \times n)-$ матриця Q у певному базисі може бути зображена у вигляді

$$Q = M \cdot J \cdot N, \quad \text{rank}\, Q := \rho; \tag{2.30}$$

тут $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ та $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невироджені матриці,

$$J := \begin{pmatrix} I_\rho & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Розвиненням (2.30) можна скористатися для знаходження умов регуляризації матричної крайової задачі (2.26), (2.27). Збурення матриці $\mathcal{Q}$ шукатимемо у вигляді

$$\mathfrak{Q} := \mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Нерівність $P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$ рівнозначна рівнянню

$$[\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}] \cdot [\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}]^+ = I_{\gamma\cdot\delta} \tag{2.31}$$

відносно $(\gamma\cdot\delta\times\gamma\cdot\delta)-$ матриці $\mathcal{R}$. Зазначимо, що рівняння (2.31) розв'язне лише за умови $\gamma\delta \leq \alpha\beta$ [121]. Дійсно, припустимо рівняння (2.31) перевизначеним: $\gamma\delta > \alpha\beta$, при цьому

$$\text{rank}\,(\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R})(\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R})^+ \leq \text{rank}\,(\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}) =$$

$$= \text{rank}\,(\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R})^+ \leq \alpha\beta < \gamma\delta,$$

що суперечить рівності рангів лівої та правої частин рівняння (2.31). У випадку $\gamma\delta \leq \alpha\beta$ рівняння (2.31) має принаймні один розв'язок

$$\mathcal{R} := M \cdot \Pi_J \cdot N \in \mathbb{R}^{\gamma\delta\times\alpha\beta},$$

де $\Pi_J \in \mathbb{R}^{\gamma\delta\times\alpha\beta}$ — матриця повного рангу. Таким чином, поставлена задача про регуляризацію матричної крайової задачі (2.26), (2.27) рівнозначна задачі про регуляризацію матричного рівняння

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon)c = \mathcal{M}[\mathcal{A}] - \mathcal{M}\{\mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} \tag{2.32}$$

з $(\gamma\delta\times\alpha\beta)$– матрицею $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$. Остання задача розв'язна за умови $\gamma\delta \le \alpha\beta$ у вигляді

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := M\cdot\Pi_J\cdot N.$$

Дійсно, матриці M та N невироджені, тому має місце рівність [21, 4.48]

$$\text{rank } \mathfrak{Q} = \text{rank } (J + \varepsilon\Pi_J) = \mu\nu,$$

при цьому $P_{\mathfrak{Q}^*} = 0$, отже система (2.32) з матрицею $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ розв'язна для довільних неоднорідностей

$$F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b], \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}.$$

Припустимо матрицю $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\alpha}$ — фіксованою, а $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\delta}$ — невідомою матрицею; зазначимо, що

$$\mathcal{U}Z(a,\varepsilon)\mathcal{V} = \mathcal{U}W(a,c)\mathcal{V} = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\mathcal{U}\,\Xi^{(j)}\mathcal{V}c_j, \ c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}.$$

Позначимо $\Lambda_j, \ j = 1,2, \ \dots\ , \ \beta\cdot\gamma$ — природний базис [21] простору $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. Невідому матрицю $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ шукатимемо у вигляді

$$\mathcal{V} = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma}\Lambda_j\zeta_j \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}, \quad \zeta_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1,2, \ \dots\ , \ \beta\cdot\gamma.$$

Для цього використовуємо рівняння

$$\{\ \mathcal{M}[\mathcal{U}\,\Xi^{(1)}\mathcal{V}]\ ,\ \dots\ ,\ \mathcal{M}[\mathcal{U}\,\Xi^{(\alpha\beta)}\mathcal{V}]\ \} = M\cdot\Pi_J\cdot N.$$

Позначимо матриці

$$\Pi_i := \{\ \mathcal{M}[\mathcal{U}\,\Xi^{(i)}\Lambda_1]\ ,\ \dots\ ,\ \mathcal{M}[\mathcal{U}\,\Xi^{(i)}\Lambda_{\beta\gamma}]\ \},$$

де

$$\Pi_i \in \mathbb{R}^{\delta\gamma\times\beta\gamma}, \ i = 1,2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta.$$

Невідому матрицю $\mathcal{V}$ визначає вектор $\zeta \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}$, для знаходження якого використовуємо систему

$$\mathfrak{D}\zeta = \mathcal{M}[\, M \cdot \Pi_J \cdot N]; \tag{2.33}$$

тут

$$\mathfrak{D} := \begin{pmatrix} \Pi_1\mathcal{M}\Lambda_1 & \Pi_1\mathcal{M}\Lambda_2 & \cdots & \Pi_1\mathcal{M}\Lambda_{\beta\gamma} \\ \Pi_2\mathcal{M}\Lambda_1 & \Pi_2\mathcal{M}\Lambda_2 & \cdots & \Pi_2\mathcal{M}\Lambda_{\beta\gamma} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{\alpha\beta}\mathcal{M}\Lambda_1 & \Pi_{\alpha\beta}\mathcal{M}\Lambda_2 & \cdots & \Pi_{\alpha\beta}\mathcal{M}\Lambda_{\beta\gamma} \end{pmatrix}$$

— $(\alpha\beta\gamma\delta \times \beta\gamma)$ – вимірна стала матриця. Система (2.33) розв'язна за умови

$$P_{\mathfrak{D}^*}\mathcal{M}[\, M\Pi_J N] = 0. \tag{2.34}$$

Якщо вимога (2.34) виконується (і тільки у цьому випадку) система (2.33) має принаймні один розв'язок

$$\zeta = \mathfrak{D}^+\mathcal{M}[\, M\Pi_J N];$$

тут $P_{\mathfrak{D}^*}$ — матриця-ортопроектор:

$$P_{\mathfrak{D}^*}: \ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\mathfrak{D}^*).$$

Таким чином, поставлену задачу про регуляризацію матричної крайової задачі (2.26), (2.27) розв'язує принаймні одна матриця

$$\mathcal{V} = \mathcal{M}^{-1}[\mathfrak{D}^+\mathcal{M}(\, M\Pi_J N)],$$

яка визначає збурення матриці $\mathcal{Q}$ вигляду

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} = M \cdot \Pi_J \cdot N,$$

при цьому $P_{\mathfrak{Q}^*}(\varepsilon) = 0$, отже система (2.32) з матрицею $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ розв'язна для довільних неоднорідностей. За умови [97]

$$\mathfrak{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\{\mathcal{A} - \check{\mathcal{L}}K[F(s)](\cdot,\varepsilon)\} \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}[0,\varepsilon_0] \tag{2.35}$$

система (2.32) має розв'язок

$$c = \mathfrak{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\{\mathcal{A} - \check{\mathcal{L}}K[F(s)](\cdot,\varepsilon)\} + P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)c_r, \ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Таким чином, отримуємо розв'язок матричної крайової задачі (2.26), (2.28) вигляду

$$Z(t,\varepsilon) = W(t,c_r) + G[F(s);\mathfrak{A}](t,\varepsilon), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де

$$W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1}[X(t)P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)c_r]$$

— загальний розв'язок однорідної частини матричної крайової задачі (2.26), (2.28),

$$G[F(s);\mathfrak{A}](t,\varepsilon) := K[F(s)](t) + \tag{2.36}$$

$$+\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathfrak{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\Big\{\mathcal{A} - \check{\mathcal{L}}K[F(s)](\cdot,\varepsilon)\Big\}\Big\}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі про регуляризацію матричної крайової задачі (2.26), (2.28), $P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)$ — матриця, складена з r лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора

$$P_{\mathfrak{Q}}(\varepsilon): \ \mathbb{R}^{\alpha\beta} \to \mathbb{N}(\mathfrak{Q}(\varepsilon)).$$

Таким чином, доведено наступне твердження [97].

Теорема 2.5.1. *Припустимо, що матрична крайова задача (2.26), (2.27) не має розв'язків*

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b]$$

для довільних неоднорідностей

$$F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b], \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}.$$

За умови $\gamma\delta \le \alpha\beta$ *та за вимог (2.34), (2.35) за допомогою малого збурення*

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{U}Z(a,\varepsilon)\mathcal{V}, \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$$

крайової умови (2.27):

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) = \mathfrak{A}, \quad \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\delta\times\alpha}, \quad \mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$$

матрична крайова задача (2.26), (2.28) отримує розв'язки вигляду

$$Z(t,\varepsilon) = W(t,c_r) + G[F(s);\mathfrak{A}](t,\varepsilon), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

у просторі

$$Z(t,\varepsilon): \ Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b], \quad Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0].$$

Тут $G[F(s);\mathfrak{A}](t,\varepsilon)$ *— узагальнений оператор Гріна (2.36) задачі про регуляризацію матричної крайової задачі (2.26), (2.28),*

$$W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1}[X(t)P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)c_r]$$

— загальний розв'язок однорідної частини матричної крайової задачі (2.26), (2.28).

Зазначимо, що регуляризація матричної крайової задачі (2.26), (2.27) може бути здійснена аналогічно до статей [96, 127] за рахунок імпульсного збурення розв'язків.

Приклад 2.5.1. *Умови доведеної теореми виконуються у випадку матричної задачі*

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \tag{2.37}$$

яка для довільних неоднорідностей

$$F(t) \in \mathbb{C}_{2\times 3}[0; 2\pi], \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

не має розв'язків у класі $Z(t) \in \mathbb{C}_{2\times 3}[0; 2\pi]$; у той же час у класі функцій

$$Z(t, \varepsilon): \ Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}_{2\times 3}[0; 2\pi], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{2\times 3}[0, \varepsilon_0]$$

за допомогою малого збурення

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot, \varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{U}Z(0, \varepsilon)\mathcal{V}$$

крайової умови (2.37) регуляризована крайова задача для системи (2.37) стає розв'язною для довільних неоднорідностей; тут

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 := 0, \quad \tau_2 := \pi, \quad \tau_3 := 2\pi,$$

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \sum_{i=1}^{3} M_i Z(\tau_i) N_i, \quad M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$N_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок задачі Коші

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(a) = \Theta$$

для системи (2.37) має зображення

$$W(t, \Theta) = U(t) \cdot \Theta \cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{2\times 3},$$

де $U(t)$ и $V(t)$ — нормальні ($U(0) = I_2,\ V(0) = I_3$) фундаментальні матриці:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix},$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 & -\sin 2t \\ -e^t + \cos 2t & e^t & -\sin 2t \\ \sin 2t & 0 & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$\Xi^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \Xi^{(6)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Загальний розв'язок задачі (2.37) визначає матриця

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - e^{2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

та її ортопроектор

$$P_{\mathcal{Q}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, то матрична задача (2.37) не має розв'язків у класі $Z(t) \in \mathbb{C}_{2\times 3}[0; 2\pi]$ для довільних неоднорідностей

$$F(t) \in \mathbb{C}_{2\times 3}[0; 2\pi], \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Матрицю Q можна подати у вигляді $Q = MJN$; тут

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -e^{\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-e^{2\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— невироджені матриці,

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умова $\gamma\delta = \alpha\beta = 6$ виконується, рівняння (2.31) має щонайменше один розв'язок $\mathcal{R} := M \cdot \Pi_J \cdot N \in \mathbb{R}^{6\times 6}$, де

$$\Pi_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-e^{2\pi}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{-1+e^{2\pi}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матриця, для якої

$$\det(J + \varepsilon\Pi_J) = e^{\pi}\varepsilon^2(1+\varepsilon) \neq 0.$$

Стала матриця

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

задовольняє вимогу (2.34). Таким чином, поставлену задачу про регуляризацію матричної крайової задачі (2.37) розв'язує матриця

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

яка визначає збурення матриці $\mathcal{Q}$ вигляду

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 & 1-e^{2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при цьому $P_{\mathfrak{Q}^*} = 0$, крім того виконується умова (2.35). Отже матрична крайова задача (2.37) за допомогою малого збурення $\check{\mathcal{L}}Z(\cdot, \varepsilon)$ крайової умови стає розв'язною для довільних неоднорідностей. Зокрема, покладемо

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} \cos 5t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо функцію $\varphi(t) := -2\cos t - 9\sin 3t$. Оскільки матриця $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ невироджена, загальний розв'язок збуреної крайової задачі для системи (2.37) єдиний:

$$G[F(s); \mathcal{A}](t) = K[F(s)](t) =$$
$$= \begin{pmatrix} K[F(s)](t)\mathcal{P}_1 & K[F(s)](t)\mathcal{P}_2 & K[F(s)](t)\mathcal{P}_3 \end{pmatrix};$$

тут

$$\mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{P}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а також

$$K\Big[F(s)\Big](t)\mathcal{P}_1 = \frac{1}{96}\begin{pmatrix} \varphi(t) + 9\cos 3t - 7\cos 5t - 2\sin t + 25\sin 5t \\ -2\cos t + 9\cos 3t - 7\cos 5t \end{pmatrix},$$

$$K\Big[F(s)\Big](t)\mathcal{P}_2 = 0,$$

$$K\Big[F(s)\Big](t)\mathcal{P}_3 = \frac{1}{96}\begin{pmatrix} \varphi(t) - 9\cos 3t + 11\cos 5t + 2\sin t + 5\sin 5t \\ 2\sin t - 9\sin 3t + 5\sin 5t \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що запропонована техніка регуляризації матричної крайової задачі за допомогою збурення крайової умови може бути перенесена на матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі [129], а також на матричні крайові задачі з запізненням [6, 110].

Висновки до розділу 2

1) Для матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра отримані достатні умови та побудовано схему регуляризації, яка узагальнює та суттєво відрізняється від класичного методу регуляризації Тихонова.

2) Для лінійних нетерових крайових задач отримані достатні умови регуляризації за рахунок, як виродженого, так і невиродженого імпульсного збурення, а також за допомогою імпульсного впливу типу "interface conditions".

3) Для лінійних матричних крайових задач отримані достатні умови регуляризації за допомогою збурення крайової умови. Побудовано узагальнений оператор Гріна та знайдено вигляд збуреної крайової умови матричної крайової задачі.

Основні результати другого розділу дисертації опубліковано в статтях у наукових фахових виданнях України та тезах доповідей на Міжнародних наукових конференціях та семінарах [93, 94, 97].

РОЗДІЛ 3
МАТРИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

3.1 Матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі з імпульсним впливом

Розглянемо задачу про побудову розв'язків [18, 30, 107]

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} := \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p, \tag{3.1}$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{3.2}$$

Тут [116, 128]

$$\mathcal{A}Z'(t):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \quad \tau_0 := a$$

— матричний диференціально-алгебраїчний оператор, який за визначенням для будь-яких скалярних функцій

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$$

та сталих матриць $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ забезпечує рівність

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Аналогічно матричний оператор

$$\mathcal{B}Z(t):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$$

будемо далі називати алгебраїчним, якщо для будь-яких

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \quad \Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

має місце рівність

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Тут також $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$ — неперервна для $t \neq \tau_i$ матриця та $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \sum_{i=0}^{p} \mathcal{L}_i Z(\cdot): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p,$$

де

$$\mathcal{L}_i Z(\cdot) : \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_i, \tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, i = 0,\ \dots\ ,\ p-1,$$
$$\mathcal{L}_p Z(\cdot) : \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_p, b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$$

— лінійні обмежені матричні функціонали. Взагалі кажучи, припускаємо

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \mu,\ \nu \in \mathbb{N}$$

— довільні натуральні числа. Матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (3.1), (3.2) з імпульсним впливом узагальнює нетерові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь [9, 73, 91, 110], в тому числі, з імпульсним впливом [90, 92, 110].

Задача про побудову розв'язків диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (3.1) приводить до задачі про побудову вектора $z(t)$, компоненти якого $z_j(t)$ визначають розвинення матриці

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} z_j(t), \quad z_j(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \quad j = 1, 2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta.$$

Лінійний диференціально-алгебраїчний матричний оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ за визначенням зображується у вигляді

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t) z_j'(t).$$

При цьому

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}Z'(t)\Big] = \Omega(t)\cdot z'(t), \quad \Omega(t) := \Big[\Omega_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}^1_{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\},$$

де

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{B}Z(t)\Big] = \Theta(t)\cdot z(t), \quad \Theta(t) := \Big[\Theta_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}^1_{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\},$$

де

$$\Theta_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha \cdot \beta.$$

Таким чином, задачу про побудову розв'язків диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (3.1) приведено до задачі про знаходження розв'язків

$$z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}\Big\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}$$

традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [17, 66, 67, 112]

$$\Omega(t) \cdot z'(t) = \Theta(t) \cdot z(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}[F(t)]. \tag{3.3}$$

За умови [73, 128]

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0, \ P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0, \ \Omega^+(t)\Theta(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \tag{3.4}$$

у випадку

$$\Omega^+(t)\mathcal{F}(t), \ P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \tag{3.5}$$

система (3.3) розв'язна відносно похідної

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t, \varphi(t)),$$

де

$$\mathfrak{F}(t, \varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t).$$

Позначимо $X_0(t)$ нормальну фундаментальну матрицю [110]

$$\frac{dX_0(t)}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)X_0(t), \quad X_0(a) = I_{\alpha\beta}, \quad t \in [a; \tau_1[$$

одержаної традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь. Фундаментальну матрицю нетривіальних розв'язків задачі

$$z' = \Omega^+(t)\Theta(t)z, \quad t \neq \tau_i, \quad \ell z(\cdot) := \mathcal{M}\mathcal{L}Z(\cdot) = 0$$

шукаємо у вигляді

$$X(t) = \left\{\begin{array}{lll} X_0(t)U_0, & U_0 \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}, & t \in [a; \tau_1[, \\ X_0(t)U_1, & U_1 \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}, & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots, \\ X_0(t)U_p, & U_p \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}, & t \in [\tau_p; b], \end{array}\right. \quad U := \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \dots \\ U_p \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Підставляючи матрицю (3.6) у крайову умову (3.2), отримуємо рівняння

$$Q\,U = 0, \quad \ell_i z(\cdot) := \mathcal{M}\mathcal{L}_i Z(\cdot), \tag{3.7}$$

де

$$Q := \begin{bmatrix} \ell_0 X_0(\cdot) & \ell_1 X_0(\cdot) & \dots & \ell_p X_0(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu\times\alpha\cdot\beta(p+1)}.$$

Позначимо $P_Q : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta(p+1)} \to \mathbb{N}(Q)-$ матрицю-ортопроектор. За умови $P_Q = 0$ однорідна частина задачі (3.1), (3.2) має тільки нульовий розв'язок; якщо ж $P_Q \neq 0$, то однорідна частина задачі (3.1), (3.2) має розв'язок вигляду $z(t,c) = X(t)c$, де

$$U = P_Q C, \quad C \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta(p+1)\times\alpha\cdot\beta}.$$

Припустимо, що

$$P_Q = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)} \\ P_Q^{(1)} \\ \dots\dots \\ P_Q^{(p)} \end{bmatrix}, \quad C = \tilde{I}\cdot C^{(0)}, \quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} I_{\alpha\cdot\beta} \\ I_{\alpha\cdot\beta} \\ \dots\dots \\ I_{\alpha\cdot\beta} \end{bmatrix},$$

де $P_Q^{(0)}, P_Q^{(1)}, \dots, P_Q^{(p)}$ — $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta(p+1))$-вимірні блоки ортопроектора P_Q, $C^{(0)}$ — довільна стала $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)$-матриця, $\tilde{I}$ — стала $(\alpha\cdot\beta(p+1)\times\alpha\cdot\beta)$ — вимірна матриця. У нових позначеннях загальний розв'язок рівняння (3.7) визначають матриці

$$U_0 = P_Q^{(0)}\tilde{I}C^{(0)}, \quad U_1 = P_Q^{(1)}\tilde{I}C^{(0)}, \ \dots \ , \ U_p = P_Q^{(p)}\tilde{I}C^{(0)},$$

де

$$U = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)}\tilde{I}C^{(0)} \\ P_Q^{(1)}\tilde{I}C^{(0)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ P_Q^{(p)}\tilde{I}C^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Таким чином, за умов (3.4), (3.5) та $P_Q \neq 0$, однорідна частина задачі (3.1), (3.2) має розв'язок

$$Z(t,c) = W(t,c) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)c\Big], \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

який визначається фундаментальною матрицею $X(t)$. За умов (3.4), (3.5) розв'язок неоднорідної диференціально-алгебраїчної задачі (3.1), (3.2) з імпульсним впливом шукаємо, використовуючи розв'язок неоднорідної крайової задачі

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^{+}(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t, \varphi(t)), \quad \ell z(\cdot) := \mathcal{M}\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{M}\mathfrak{A}$$

у вигляді

$$G\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathcal{M}\mathfrak{A}\Big](t) := \begin{cases} X_0(t)\xi_0 + K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t), & t \in [a; \tau_1[, \\ X_0(t)\xi_1 + K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t), & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , & \dots\dots\dots , \\ X_0(t)\xi_p + K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t), & t \in [\tau_p; b]. \end{cases}$$

Тут

$$K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t) := X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s)\mathfrak{F}(s, \varphi(s))ds;$$

розв'язок матричного диференціально алгебраїчного рівняння (3.1)

$$Z(t, c) = W(t, c) + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t), \quad W(t, c) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X_0(t)c\Big]$$

визначає узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (3.1)

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t)\Big\}, \quad t \in [a; \tau_1[.$$

Крім того $\xi_0, \ \xi_1, \ \dots \ , \ \xi_p$ — сталі, для знаходження яких використовуємо рівняння

$$Q\,\xi = \mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot)\Big\}, \quad \xi := \mathrm{col}\ (\xi_0, \ \dots \ , \ \xi_p) \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta(p+1)},$$

розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} = 0; \tag{3.8}$$

тут P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\mu\cdot\nu} \to \mathbb{N}(Q^*)$. Згідно до традиційної класифікації крайових задач, випадок $P_{Q^*} \neq 0$ називатимемо критичним; у цьому випадку умови існування та вигляд загального розв'язку задачі (3.1), (3.2) визначає наступна теорема [100].

Теорема 3.1.1. *За умов (3.4) та (3.5) однорідна частина диференціально-алгебраїчної задачі з імпульсним впливом (3.1), (3.2) має розв'язок*

$$Z(t,c) = W(t,c) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)c\Big], \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

який зображується фундаментальною матрицею

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t)P_Q^{(0)}\tilde{I}C^{(0)}, & t \in [a,\tau_1], \\ X_0(t)P_Q^{(1)}\tilde{I}C^{(0)}, & t \in [\tau_1,\tau_2], \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots , \\ X_0(t)P_Q^{(p)}\tilde{I}C^{(0)}, & t \in [\tau_p, b]. \end{cases}$$

За умов (3.4) та (3.5) лінійна неоднорідна диференціально алгебраїчна задача з імпульсним впливом (3.1), (3.2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (3.5). В цьому випадку задача (3.1), (3.2) має розв'язок

$$Z(t,c) = W(t,c) + \mathfrak{G}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s)); \mathcal{M}\mathfrak{A}\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

який зображується узагальненим оператором Гріна

$$\mathfrak{G}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s)); \mathcal{M}\mathfrak{A}\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{G\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s)); \mathcal{M}\mathfrak{A}\Big](t)\Big\},$$

де

$$\mathrm{col}\ (\xi_0,\ \dots\ ,\ \xi_p) := Q^{+}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\}.$$

Твердження теореми 3.1.1 спрощується у некритичному ($P_{Q^*} = 0$) випадку, при цьому лінійна неоднорідна диференціально-алгебраїчна задача з імпульсним впливом (3.1), (3.2) розв'язна для будь-яких неоднорідностей [100].

Приклад 3.1.1. *Вимогам доведеної теореми задовольняє матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсним впливом*

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad t \in [-1;1], \quad t \neq \tau_1, \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}. \tag{3.9}$$

де

$$\mathcal{A}Z'(t) := \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} \hat{S}_i(t)\,\check{S}_j(t)\,Z'(t)\,\hat{R}_i(t)\,\check{R}_j(t),$$

$$\hat{S}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\check{S}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{S}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{R}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{R}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{R}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \check{R}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Крім того

$$\mathcal{B}Z(t) := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \hat{\Phi}_i(t)\, \check{\Phi}_j(t)\, Z(t)\, \hat{\Psi}_i(t)\, \check{\Psi}_j(t), \quad \check{R}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де

$$\hat{\Phi}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\Phi}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\Phi}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\check{\Phi}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\Phi}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Psi}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\check{\Psi}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\Psi}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Імпульсний вплив визначають рівності:

$$\mathcal{L}Z(\cdot): \quad \sqrt{e}\, Z(-1) - Z(0) = 0, \quad Z(-1) - Z(1) = 0, \quad \mathfrak{A} := 0.$$

Позначимо

$$\Xi_1^* := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2^* := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \Xi_6^* := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{3\times 2}$. Оскільки

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то умови (1.17) та (1.18) виконуються,

$$\Omega^+(t)\Theta(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{6\times 6}[-1; 1],$$

при цьому матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (3.9) являє критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$); тут

$$P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У наслідок нерівності

$$P_Q = \frac{1}{2\,(1+e^2)} \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 & e^2 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^2 & 0 & 0 & e^2 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

однорідна частина диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3.9) має нетривіальний розв'язок

$$W(t, c_1) = c_1 \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1; 0[,$$

$$W(t, c_1) = c_1 \begin{pmatrix} 1+e^{t/2} & 1+e^{t/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 1].$$

Зазначимо, що $\varrho = 1 \neq 0$, при цьому розв'язок диференціально алгебраїчної задачі (3.9) залежить від довільної функції $\varphi(t) \in \mathbb{C}[-1; 1]$; покладемо $\varphi(t) := 0$. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(-1) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (3.9) має вигляд

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t) = \frac{t+1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1; \tau_1[$$

та дозволяє перевірити виконання умови (3.5). Оскільки вимогу (3.5) виконано, неоднорідна диференціально-алгебраїчна задача з імпульсним впливом (3.9) розв'язна. При цьому диференціально-алгебраїчна задача з імпульсним впливом (3.9) має розв'язок

$$Z(t,c_1)=W(t,c_1)+\mathfrak{G}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathcal{M}\mathfrak{A}\Big](t),\quad c_1\in\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

який визначає оператор Гріна

$$\mathfrak{G}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathcal{M}\mathfrak{A}\Big](t)=\frac{t-(t+1)\sqrt{e}}{2\,(1-\sqrt{e})}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&-1\end{pmatrix},\quad t\in[-1;0[,$$

крім того

$$\mathfrak{G}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathcal{M}\mathfrak{A}\Big](t)=\frac{t-2-(t-1)\sqrt{e}}{2\,(1-\sqrt{e})}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&-1\end{pmatrix},\quad t\in[0;1].$$

Знайдені умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом (3.1), (3.2) узагальнюють традиційні результати, як для матричних диференціальних рівнянь [18, 30, 107], так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь [17, 66, 67, 112]. З іншого боку, умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом (3.1), (3.2) узагальнюють результати для нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь [9, 73, 110].

3.2 Метод найменших квадратів у теорії матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач

Припустимо задачу про побудову розв'язків [18, 30, 104, 107]

$$Z(t)\in\mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b]:=\mathbb{C}^1[a;b]\otimes\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1.14):

$$\mathcal{A}Z'(t)=\mathcal{B}Z(t)+F(t),\tag{3.10}$$

підпорядкованих крайовій умові (1.15):

$$\mathcal{L}Z(\cdot)=\mathfrak{A},\quad \mathfrak{A}\in\mathbb{R}^{\mu\times\nu}\tag{3.11}$$

некоректно поставленою, а саме, припустимо, що виконуються умови (1.17) та (1.18), при цьому матрична задача Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.14) однозначно розв'язна для будь-якого початкового значення $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. В той же час припустимо, що має місце критичний випадок ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) та не виконується умова (1.21) розв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.14), (1.15). За умов (1.17) та (1.18) система (1.16) розв'язна відносно похідної

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t, \varphi(t));$$

тут

$$\mathfrak{F}(t, \varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t).$$

Отже, за умов (1.17) та (1.18) матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (3.10), (3.11) рівнозначна наступній

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t, \varphi(t)), \quad \ell z(\cdot) := \mathcal{M}\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{M}\mathfrak{A}. \tag{3.12}$$

Припустимо $\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ ...\ ,\ \psi_k(t),\ ...$ – система лінійно-незалежних неперервно-диференційовних $\alpha\beta$ – вимірних вектор-функцій. Позначимо $(\alpha\beta \times k)$ – вимірну матрицю

$$\psi(t) = \Big[\psi_1(t) \ \ \psi_2(t) \ \ ... \ \ \psi_k(t)\Big].$$

Наближення до розв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3.10), (3.11) шукатимемо у вигляді

$$z(t) := \mathcal{M}\Big[Z(t)\Big] = \psi(t)\cdot c, \quad c \in \mathbb{R}^k.$$

Вимагатимемо [77, 115]

$$F(c) := \left|\left|\frac{dz}{dt} - \Omega^+(t)\Theta(t)z - \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\right]\right|\right|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} +$$

$$+\left|\left|\mathcal{M}\Big[\mathcal{L}Z(\cdot) - \mathcal{A}\Big]\right|\right|^2_{\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu}} \to \min$$

для фіксованої матриці $\psi(t)$; при цьому

$$F(c) = \left|\left|\psi'(t)\cdot c - \Omega^+(t)\Theta(t)\psi(t)\cdot c - \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\right|\right|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} +$$

$$+\left\|\mathcal{M}\left[\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\left[\psi(\cdot)c\right]-\mathcal{A}\right]\right\|^2_{\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu}} \to \min .$$

Позначимо

$$\check{\Xi}^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \quad j=1,2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta$$

— базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ та $c_j,\ j=1,2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta$ — константи, які визначають розвинення вектора

$$c=\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\check{\Xi}^{(j)}c_j, \quad c_j\in\mathbb{R}^1, \quad j=1,2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta$$

по векторам $\check{\Xi}^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ базиса простору $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$. Зазначимо, що

$$\psi'(t)\cdot c-\Omega^+(t)\Theta(t)\psi(t)\cdot c-\mathfrak{F}(t,\varphi(t))=$$

$$=\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\left\{\psi'(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)}-\Omega^+(t)\Theta(t)\psi(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)}-\mathfrak{F}(t,\varphi(t)\Big]\right\}c_j=\Phi(t)c,$$

де

$$\Phi(t):=\left[\begin{array}{cccc}\Phi_1(t) & \Phi_2(t) & \dots & \Phi_k(t)\end{array}\right]$$

— $(\alpha\cdot\beta\times k)$– матриця,

$$\Phi_j(t):=\psi'(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)}-\Omega^+(t)\Theta(t)\psi(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)}, \quad c\in\mathbb{R}^k.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\left\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\left[\psi(\cdot)c\right]\right\}=\Psi c, \quad \Psi:=\left[\begin{array}{cccc}\Psi_1 & \Psi_2 & \dots & \Psi_k\end{array}\right]\in\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu\times k},$$

де

$$\Psi_j:=\mathcal{M}\left\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\left[\psi(\cdot)\check{\Xi}^{(j)}\right]\right\}, \quad j=1,2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta.$$

Функція $F(c)$ зображувана у вигляді

$$F(c)=\int_a^b\left\{\Phi(t)c-\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\right\}^*\left\{\Phi(t)c-\right.$$

$$\left.-\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\right\}dt+\left\{\Psi c-\mathcal{M}\left[\mathcal{A}\right]\right\}^*\cdot\left\{\Psi c-\mathcal{M}\left[\mathcal{A}\right]\right\}.$$

Для фіксованої матриці $\psi(t)$ мінімум функції $F(c)$ існує, оскільки неперервна невід'ємна функція досягає мінімуму. Необхідною умовою мінімізації функції $F(c)$ є рівність

$$\frac{dF(c)}{dc}=0,$$

тотожня рівнянню

$$\Big[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]\cdot c=\int_a^b \Phi^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt+\Psi^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big],$$

розв'язному відносно вектора

$$c=\Big[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]^+\left\{\int_a^b \Phi^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt+\Psi^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\right\}$$

за умови

$$\mathcal{P}_\psi\left\{\int_a^b \Phi^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt+\Psi^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\right\}=0, \qquad (3.13)$$

зокрема, у випадку невиродженості суми $(k\times k)-$ матриць Грама [5]

$$\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big):=\int_a^b \Phi^*(t)\Phi(t)dt, \quad \Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big):=\Psi^*\Psi.$$

Тут

$$\mathcal{P}_\psi:=P_{[\Gamma(\psi(\cdot))+\Gamma(\mathcal{L}\psi(\cdot))]^*}:\ \mathbb{R}^k\to\mathbb{N}\Big[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]^*$$

— $(k\times k)-$ матриця-ортопроектор. Отриманий псевдорозв'язок [103]

$$z^\dagger(\psi(t))=\psi(t)\cdot\Big[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]^+\times$$

$$\times\left\{\int_a^b \Phi^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt+\Psi^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\right\}$$

забезпечує мінімум функції $F(c)$ і залежить від вибору матриці $\psi(t)$. Таким чином, доведено теорему [103, 104].

Теорема 3.2.1. *Для фіксованого числа k та фіксованої $(\alpha\beta\times k)-$ вимірної матриці $\psi(t)$ за умов (1.17), (1.18) та (3.13) найкращим чином (у сенсі найменших квадратів) мінімізує нев'язку $F(c)$ псевдорозв'язку*

$$Z^\dagger(\psi(t))=\mathcal{M}^{-1}\Bigg\{\psi(t)\cdot\Big[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]^+\times \qquad (3.14)$$

$$\times\left\{\int_a^b \Phi^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt+\Psi^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\right\}\Bigg\}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1.14), підпорядкованого крайовій умові (1.15), серед функцій вигляду

$$Z^\dagger(\psi(t))=\mathcal{M}^{-1}\Big\{\psi(t)\cdot c\Big\}.$$

Наслідок 3.2.1. *Для фіксованого числа k та фіксованої $(\alpha\beta \times k)$–вимірної матриці $\psi(t)$ за умов (1.17), (1.18) та [74]*

$$\det\left[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\right] \neq 0$$

псевдорозв'язок (3.14) найкращим чином (у сенсі найменших квадратів) мінімізує нев'язку $F(c)$ псевдорозв'язку $Z^{\dagger}(\psi(t))$ матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1.14), підпорядкованого крайовій умові (1.15), серед функцій вигляду

$$Z^{\dagger}(\psi(t)) = \mathcal{M}^{-1}\Big\{\psi(t) \cdot c\Big\}.$$

У частинному випадку, коли $\ell\psi(\cdot) = 0$, умова (3.13):

$$\mathcal{P}_{\psi} \int_a^b \Phi^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt = 0 \tag{3.15}$$

та формула (3.14) значно спрощуються:

$$Z^{\dagger}(\psi(t)) = \psi(t) \cdot \left[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big)\right]^{+} \int_a^b \Phi^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt.$$

У випадку розв'язності матричної крайової задачі (1.14), (1.15) за умов (1.17), (1.18) та (3.13) для відповідного вибору матриці $\psi(t)$ найкращий (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язок (3.14) матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.14), (1.15) є точним розв'язком. Доведена теорема 3.2.1 та наслідок 3.2.1 узагальнюють [103] відповідні твердження [74] на випадок матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.14), (1.15).

Приклад 3.2.1. *Побудуємо псевдорозв'язок $Z^{\dagger}(\psi(t))$ коректно поставленої 2π-періодичної диференціально-алгебраїчної крайової задачі для системи (A.5):*

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t),$$

дослідженої у прикладі A.7.

У наслідок рівностей $P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0, P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0$, умови (1.17), (1.18) виконано. Оскільки $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, то в задачі про побудову 2π-періодичних розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи (A.5) має місце критичний випадок; умову (1.21) виконано, крім того $P_{\Omega}(t) \neq 0$, тому розв'язок матричної диференціально-алгебраїчної системи (A.5) залежатиме від довільної функції $\varphi(t) \in \mathbb{C}[0; 2\pi]$; покладемо, як і у прикладі A.7

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Позначимо $(6 \times 18)-$ вимірну матрицю

$$\psi(t) := I_6 \otimes \begin{pmatrix} 1 & \cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\ell\psi(\cdot) = 0$, для знаходження псевдорозв'язку коректно поставленої 2π-періодичної диференціально-алгебраїчної крайової задачі для системи (A.5) використовуємо формулу (3.13); тут [103]

$$\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big) = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{pmatrix},$$

при цьому умова (3.15) виконується:

$$\mathcal{P}_{\psi} \int_a^b \Phi^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt = 0.$$

Тут

$$\mathfrak{F}(t,\varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \\ \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

крім того

$$\mathcal{P}_\psi = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Оскільки умову (3.15) виконано, отримуємо розв'язок 2π-періодичної матричної задачі для диференціально-алгебраїчної системи (A.5)

$$Z(t,\varphi(t)) = \begin{pmatrix} -\cos t & \sin t \\ \sin t & -3\cos t - \sin t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

який відрізняється від розв'язку, отриманого у прикладі A.7.

3.3 Випадок нерозв'язності системи (1.16) відносно похідної

Якщо умова (1.17), або (1.18) не виконуються, система (1.16) не розв'язна відносно похідної, при цьому система (1.14) може мати розв'язки вигляду [73, 76, 104, 128]

$$Z(t) = \mathcal{P}_\ell Y(t) \mathcal{P}_r, \quad \mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}, \quad \mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta},$$

де $\mathcal{P}_\ell,\ \mathcal{P}_r$ — невідомі сталі матриці, при цьому задача про знаходження розв'язків диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (1.14) приводить до задачі про знаходження вектора $y(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a;b]$, компоненти якого $y_j(t)$ визначають розвинення матриці

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} y_j(t), \quad y_j(t) \in \mathbb{C}^1[a;b], \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta.$$

У цьому випадку лінійний обмежений диференціально-алгебраїчний матричний оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ набуває вигляду

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\,\mathcal{P}_\ell \Xi^{(j)} \mathcal{P}_r\, y_j'(t),$$

при цьому

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}Z'(t)\Big] = \Omega_1(t)\cdot y'(t), \quad \Omega_1(t) := \Big[\Omega_1^{(j)}(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\Omega_1^{(j)}(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\,\mathcal{P}_\ell \Xi^{(j)} \mathcal{P}_r(t)\right], \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{B}Z(t)\Big] = \Theta_1(t)\cdot y(t), \quad \Theta_1(t) := \Big[\Theta_1^{(j)}(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\Theta_1^{(j)}(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\,\mathcal{P}_\ell \Xi^{(j)} \mathcal{P}_r(t)\right], \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta.$$

Таким чином, задачу про побудову розв'язків диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (1.14) приведено до задачі про побудову розв'язків $y(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta\times 1}[a;b]$ традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [17, 66, 67, 76, 104, 112]

$$\Omega_1(t)\cdot y'(t) = \Theta_1(t)\cdot y(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}\Big[F(t)\Big]. \tag{3.16}$$

За умови [73, 76, 104, 128]

$$P_{\Omega_1^*(t)}\Theta_1(t) = 0, \quad P_{\Omega_1^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0, \tag{3.17}$$

у випадку

$$\Omega_1^+(t)\Theta_1(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}[a;b], \tag{3.18}$$

$$\Omega_1^+(t)\mathcal{F}(t),\ P_{\Omega_{1,\varrho}}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a;b]$$

система (3.16) розв'язна відносно похідної

$$\frac{dy}{dt} = \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)y + \mathfrak{F}_1(t,\varphi(t)),$$

$$\mathfrak{F}_1(t,\varphi(t)) := \Omega_1^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega 1,\varrho}(t)\varphi(t).$$

Тут $P_{\Omega_{1,\varrho}}(t)$ — $(\alpha\cdot\beta\times\varrho)-$ матриця, утворена з ϱ лінійно-незалежних стовпців $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)-$ матриці-ортопроектора $P_{\Omega_1}(t) : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\Omega_1(t))$. Умова (3.17) являє собою, взагалі кажучи, нелінійне рівняння відносно сталих матриць $\mathcal{P}_\ell,\ \mathcal{P}_r$. Припустимо, що система рівнянь (3.17) має дійсний розв'язок

$$\mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha},\ \mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta},$$

для якого виконується умова (3.18). Позначимо $\mathfrak{X}(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$\frac{d\mathfrak{X}(t)}{dt} = \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)\mathfrak{X}(t), \quad X(a) = I_{\alpha\beta}$$

отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь. За умов (3.17) та (3.18) система (3.16) має розв'язок вигляду

$$y(t,c) = \mathfrak{X}(t)c + K\Big[\mathfrak{F}_1(t,\varphi(s))\Big](t),$$

який визначає розв'язок матричного диференціально алгебраїчного рівняння (1.14)

$$Z(t,c) = \mathfrak{W}(t,c) + \mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\mathfrak{W}(t,c) := \mathcal{P}_\ell\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{X}(t)c\Big]\mathcal{P}_r,$$

$$\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t) := \mathcal{P}_\ell\mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[\mathfrak{F}_1(t,\varphi(s))\Big](t)\Big\}\mathcal{P}_r \tag{3.19}$$

— узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.14). Підставляючи розв'язок матричного диференціально алгебраїчного рівняння (1.14) у крайову умову (1.15), приходимо до задачі про знаходження розв'язків

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Xi^{(j)} c_j \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta}, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ \dots \ , \ \alpha \cdot \beta$$

матричного рівняння

$$\mathcal{L}\mathfrak{W}(\cdot, c) + \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \tag{3.20}$$

У критичному випадку ($P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$) за умов (3.17), (3.18) матричне рівняння (3.20) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathfrak{Q}_d^*} \mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{3.21}$$

Тут $P_{\mathfrak{Q}^*}$ — $(\mu \cdot \nu \times \mu \cdot \nu)-$ матриця-ортопроектор $P_{\mathfrak{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu} \to \mathbb{N}(\mathfrak{Q}^*)$, де

$$\mathfrak{Q} := \Big[\mathfrak{Q}_i\Big]_{i=1}^{\alpha \cdot \beta} \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times \alpha \cdot \beta}, \quad \mathfrak{Q}_i := \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{X}(\cdot)\Theta^{(i)}\Big]\mathcal{P}_r\Big\},$$

$$i = 1, 2, \ \dots \ , \ \alpha \cdot \beta;$$

матриця $P_{\mathfrak{Q}_r}$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців $(\alpha \cdot \beta \times \alpha \cdot \beta)-$ матриці-ортопроектора $P_{\mathfrak{Q}} : \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta} \to \mathbb{N}(\mathfrak{Q})$. Матриця $P_{\mathfrak{Q}_d^*}$ утворена з d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{\mathfrak{Q}^*}$. Припустимо, що у критичному випадку ($P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$) за умов (3.17), (3.18) матричне рівняння (3.20) не розв'язне:

$$P_{\mathfrak{Q}_d^*} \mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\} \neq 0. \tag{3.22}$$

Припустимо $\psi_1(t), \ \psi_2(t), \ \dots \ , \ \psi_k(t), \ \dots$ – система лінійно-незалежних неперервно-диференційовних $\alpha\beta-$ вимірних вектор-функцій. Позначимо $(\alpha\beta \times k)-$ вимірну матрицю

$$\psi(t) = \Big[\psi_1(t) \ \ \psi_2(t) \ \ \dots \ \ \psi_k(t)\Big].$$

Наближення до розв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$\frac{dy}{dt} = \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)y + \mathfrak{F}_1(t, \varphi(t)), \quad \ell y(\cdot) := \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell Y(\cdot)\mathcal{P}_r = \mathcal{M}\mathfrak{A} \tag{3.23}$$

шукатимемо у вигляді

$$y(t) := \mathcal{M}\Big[\mathcal{P}_\ell Y(t)\mathcal{P}_r\Big] = \psi(t)\cdot c, \quad c \in \mathbb{R}^k.$$

Вимагатимемо [77, 115]

$$F(c) := \left|\left|\frac{dy}{dt} - \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)y - \mathfrak{F}(t,\varphi(t))\Big]\right|\right|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} +$$

$$+\left|\left|\mathcal{M}\Big[\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell Y(\cdot)\mathcal{P}_r - \mathcal{A}\Big]\right|\right|^2_{\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu}} \to \min$$

для фіксованої матриці $\psi(t)$; при цьому

$$F(c) = \left|\left|\psi'(t)\cdot c - \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)\psi(t)\cdot c - \mathfrak{F}(t,\varphi(t))\right|\right|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} +$$

$$+\left|\left|\mathcal{M}\Big[\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell\mathcal{M}^{-1}\Big[\psi(\cdot)c\Big]\mathcal{P}_r - \mathcal{A}\Big]\right|\right|^2_{\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu}} \to \min.$$

Позначимо

$$\check{\Xi}^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta$$

— базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ та c_j, $j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta$ — константи, які визначають розвинення вектора

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\check{\Xi}^{(j)}c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta$$

по векторам $\check{\Xi}^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ базиса простору $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$. Зазначимо, що

$$\psi'(t)\cdot c - \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)\psi(t)\cdot c =$$

$$= \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\left\{\psi'(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)} - \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)\psi(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)}\Big]\right\}c_j = \check{\Phi}(t)c,$$

де

$$\check{\Phi}(t) := \Big[\ \check{\Phi}_1(t) \ \ \check{\Phi}_2(t) \ \ \dots \ \ \check{\Phi}_k(t)\ \Big]$$

— $(\alpha\cdot\beta\times k)-$ матриця,

$$\check{\Phi}_j(t) := \psi'(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)} - \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)\psi(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)}, \quad c \in \mathbb{R}^k.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell\mathcal{M}^{-1}\Big[\psi(\cdot)c\Big]\mathcal{P}_r\Big\} = \check{\Psi}c, \quad \check{\Psi} := \Big[\ \check{\Psi}_1\ \ \check{\Psi}_2\ \dots\ \check{\Psi}_k\ \Big] \in \mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu\times k},$$

де

$$\check{\Psi}_j := \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell\mathcal{M}^{-1}\Big[\psi(\cdot)\check{\Xi}^{(j)}\Big]\mathcal{P}_r\Big\}, \quad j = 1, 2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta.$$

Функція $F(c)$ зображувана у вигляді

$$F(c) = \int_a^b \Big\{\check{\Phi}(t)c - \mathfrak{F}(t,\varphi(t))\Big\}^*\Big\{\check{\Phi}(t)c-$$

$$-\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\Big\}dt + \Big\{\check{\Psi}c - \mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\Big\}^* \cdot \Big\{\check{\Psi}c - \mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\Big\}.$$

Для фіксованої матриці $\psi(t)$ мінімум функції $F(c)$ існує, оскільки неперервна невід'ємна функція досягає мінімуму. Необхідною умовою мінімізації функції $F(c)$ є рівняння

$$\Big[\check{\Gamma}\Big(\psi(\cdot)\Big) + \check{\Gamma}\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]\cdot c = \int_a^b \check{\Phi}^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt + \check{\Psi}^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big],$$

розв'язне відносно вектора

$$c = \Big[\check{\Gamma}\Big(\psi(\cdot)\Big) + \check{\Gamma}\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]^+ \Big\{\int_a^b \check{\Phi}^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt + \check{\Psi}^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\Big\}$$

за умови

$$\check{\mathcal{P}}_\psi \Big\{\int_a^b \check{\Phi}^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt + \check{\Psi}^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\Big\} = 0, \tag{3.24}$$

зокрема, у випадку невиродженості суми $(k\times k)-$ матриць Грама [5]

$$\check{\Gamma}\Big(\psi(\cdot)\Big) := \int_a^b \check{\Phi}^*(t)\check{\Phi}(t)dt, \quad \check{\Gamma}\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big) := \check{\Psi}^*\check{\Psi}.$$

Тут

$$\check{\mathcal{P}}_\psi := P_{[\check{\Gamma}(\psi(\cdot))+\check{\Gamma}(\mathcal{L}\psi(\cdot))]^*}:\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{N}\Big[\check{\Gamma}\Big(\psi(\cdot)\Big) + \check{\Gamma}\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]^*$$

— $(k\times k)-$ матриця-ортопроектор. Отриманий псевдорозв'язок

$$z^\dagger(\psi(t)) = \psi(t)\cdot\Big[\check{\Gamma}\Big(\psi(\cdot)\Big) + \check{\Gamma}\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]^+ \times$$

$$\times\Big\{\int_a^b \check{\Phi}^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt + \check{\Psi}^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\Big\}$$

забезпечує мінімум функції $F(c)$ і залежить від вибору матриці $\psi(t)$. Таким чином, доведено наступне твердження [104].

Теорема 3.3.1. *Для фіксованого числа k та фіксованої $(\alpha\beta \times k)-$вимірної матриці $\psi(t)$ за умов (3.17), (3.18) та (3.24) псевдорозв'язок*

$$Z^\dagger(\psi(t)) = \mathcal{M}^{-1}\Bigg\{\psi(t)\cdot\Bigg[\check{\Gamma}\Big(\psi(\cdot)\Big) + \check{\Gamma}\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Bigg]^+ \times \tag{3.25}$$

$$\times\left\{\int_a^b \check{\Phi}^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt + \check{\Psi}^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\right\}\Bigg\}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1.14), підпорядкованого крайовій умові (1.15), найкращим чином (у сенсі найменших квадратів) мінімізує нев'язку $F(c)$.

Наслідок 3.3.1. *Для фіксованого числа k та фіксованої $(\alpha\beta \times k)-$вимірної матриці $\psi(t)$ за умов (3.17), (3.18) та*

$$\det\Bigg[\check{\Gamma}\Big(\psi(\cdot)\Big) + \check{\Gamma}\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Bigg] \neq 0$$

псевдорозв'язок (3.25) найкращим чином (у сенсі найменших квадратів) мінімізує нев'язку $F(c)$ псевдорозв'язку $Z^\dagger(\psi(t))$ матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1.14), підпорядкованого крайовій умові (1.15).

У частинному випадку, коли $\ell\psi(\cdot) = 0$, умова (3.24):

$$\check{\mathcal{P}}_\psi \int_a^b \check{\Phi}^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt = 0 \tag{3.26}$$

та формула (3.25) значно спрощуються:

$$Z^\dagger(\psi(t)) = \psi(t)\cdot\Bigg[\check{\Gamma}\Big(\psi(\cdot)\Big)\Bigg]^+ \int_a^b \check{\Phi}^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt.$$

У випадку розв'язності матричної крайової задачі (1.14), (1.15) за умов (3.17), (3.18) та (3.24) для відповідного вибору матриці $\psi(t)$ найкращий (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язок (3.25) матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.14), (1.15) є точним розв'язком. Доведена теорема 3.3.1 та наслідок 3.3.1 узагальнюють відповідні твердження [74, 76, 128] на випадок матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.14), (1.15).

Приклад 3.3.1. *Побудуємо псевдорозв'язок* $Z^{\dagger}(\psi(t))$ *коректно поставленої* 2π*-періодичної диференціально-алгебраїчної крайової задачі*

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \tag{3.27}$$

де

$$\mathcal{A}Z'(t) := \sum_{i=1}^{2} S_i Z'(t) R_i, \quad \mathcal{B}Z(t) := \sum_{i=1}^{2} \Phi_i Z(t) \Psi_i,$$

— лінійні матричні оператори, крім того [128]

$$S_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} 0 & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & 0 \end{pmatrix}, \Psi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}^* \neq 0,$$

отже, умову (1.17) не виконано, отже система (1.16) не розв'язна відносно похідної, при цьому система (3.27) має розв'язки вигляду [104]

$$Z(t) = \mathcal{P}_\ell Y(t)\mathcal{P}_r, \quad \mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

де $\mathcal{P}_\ell,\ \mathcal{P}_r$ — невідомі сталі матриці. Зокрема, система рівнянь (3.17) має дійсний розв'язок

$$\mathcal{P}_\ell := \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix},\ \mathcal{P}_r := I_2,$$

для якого виконуються умови (3.17), (3.18). Добуток

$$Q_1^+(t)\Omega_1(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0&0 \\ 2&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

визначає матрицю

$$\mathfrak{X}(t) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ \frac{t}{2}&0&0&1&0&0 \\ \frac{t\,(4+t)}{8}&0&0&\frac{t}{2}&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

та загальний розв'язок

$$\mathfrak{W}(t,c) = \begin{pmatrix} 8\,c_1 & 8\,c_4 + 4\,c_1 t \\ 8\,c_2 & 8\,c_3 + t\,(4\,c_4 + c_1\,(t+4)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

задачі Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для однорідної частини диференціально-алгебраїчної системи (3.27). Тут

$$\Omega_1(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\mathfrak{Q} = -\frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2+\pi & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; P_{\mathfrak{Q}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

то $P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$, отже, у задачі про побудову 2π-періодичних розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи (3.27) має місце критичний випадок. Загальний розв'язок

$$\mathfrak{W}(t, c_r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_r := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

однорідної частини 2π-періодичної матричної задачі для диференціально-алгебраїчної системи (3.27) визначають матриці

$$P_{\mathfrak{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathfrak{Q}_r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок $\mathcal{P}_\ell,\ \mathcal{P}_r$ системи рівнянь (3.17) визначає матриці

$$P_{\Omega_1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\Omega_{1,\varrho}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

таким чином, вектор

$$\mathfrak{F}_1(t, \varphi(t)) := \Omega_1^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_{1,\varrho}}(t)\varphi(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix}^*$$

залежить від довільної функції $\varphi(t) \in \mathbb{R}^\varrho$; тут

$$P_{Q_\varrho}(t)\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \end{pmatrix},\ \varphi(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix},\ \varrho = 2.$$

Покладемо

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

при цьому узагальнений оператор Гріна задачі Коші для системи (3.27) має вигляд [128]

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s))\Big](t) := \mathcal{P}_\ell\,\mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s))\Big](t)\Big\}\,\mathcal{P}_r =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4\sin^2\frac{t}{2} \\ 0 & t + \sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і дозволяє пересвідчитись у виконанні умови (3.21). Позначимо $(6 \times 18)-$вимірну матрицю

$$\psi(t) := I_6 \otimes \begin{pmatrix} 1 & \cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\ell\psi(\cdot) = 0$, для знаходження псевдорозв'язку коректно поставленої 2π-періодичної диференціально-алгебраїчної крайової задачі для системи (3.27) використовуємо формулу (3.24); тут [104]

$$\check{\Gamma}\Big(\psi(\cdot)\Big) = \frac{4}{\pi}\begin{pmatrix}
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4
\end{pmatrix},$$

при цьому умова (3.26) виконується:

$$\check{\mathcal{P}}_\psi \int_a^b \check{\Phi}^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt = 0.$$

Оскільки умову (3.26) виконано, отримуємо розв'язок 2π-періодичної матричної задачі для диференціально-алгебраїчної системи (3.27)

$$Z(t, \varphi(t)) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2\cos t \\ 0 & \sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

який співпадає з розв'язком, отриманим у статті [128].

3.4 Розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті методом найменших квадратів

Знайдені у попередньому підрозділі умови існування, а також конструкція найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі можуть бути перенесені на задачу про розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті. Вивчення матричних алгебраїчних рівнянь [109], зокрема, матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті [42, 147], пов'язане з численними застосуваннями таких рівнянь при розв'язанні матричного диференціального рівняння Ріккаті [33, 107], теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування та стійкості руху [24, 60].

Досліджуємо задачу про знаходження розв'язків

$$Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті

$$A\,Z\,Z^* + B\,Z + C = 0; \tag{3.28}$$

тут $A,\ B,\ C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — сталі $(n \times n)$ – вимірні матриці. Визначений вище оператор $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ приводить матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті (3.28) до рівнозначного

$$f(z) = 0, \quad f(z) := \mathcal{M}[\,A\,Z\,Z^* + B\,Z + C\,], \quad z := \mathcal{M}[Z]. \tag{3.29}$$

Для побудови ітераційної схеми $\{z_k\}$, збіжної до розв'язку $\tilde{z} \in \mathbb{R}^n$ рівняння (3.29), використовуємо класичний метод найменших квадратів [5, 115]. Припустимо, що знайдено наближення z_k, досить близьке до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (3.29). У малому околі точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (3.29) має місце наближена рівність

$$f(z_k) + J_k\,(\tilde{z} - z_k) \approx 0, \quad J_k := f'(z_k) \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2},$$

тому для знаходження наступного наближення z_{k+1} до точного розв'язку $\tilde{z}$ природно покласти

$$f(z_k) + J_k\,x_{k+1} = 0, \quad x_{k+1} := z_{k+1} - z_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Вимагаючи [5, 115]

$$\varphi(z_k) := ||f(z_k) + J_k\,x_{k+1}||_{\mathbb{R}^{n^2}} \to \min,$$

за умови невиродженості матриці Грама [5, 115]

$$\Gamma_k := J_k^* J_k \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2},$$

отримуємо ітераційну схему $\{z_k\}$

$$z_{k+1} = z_k + x_{k+1}, \quad x_{k+1} = -\Gamma_k^{-1} J_k^* f(z_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

збіжну до розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (3.29), якщо оператор

$$\psi(z) := z - \Gamma^{-1}(z) J^*(z) f(z), \quad J(z) := f'(z), \quad \Gamma(z) := J(z)^* J(z) \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$$

є оператором стиснення [35] у малому околі наближення z_k, досить близького до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (3.29). Таким чином, у малому околі точного розв'язку рівняння (3.29) за умови

$$\det \Gamma_k \neq 0, \quad ||\psi'(z_k)||_{\mathbb{R}^{n^2\times n^2}} \leq \upsilon < 1, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.30}$$

ітераційна схема [31]

$$Z_{k+1} := \mathcal{M}[z_{k+1}], \quad z_{k+1} = z_k - \Gamma_k^{-1} J_k^* f(z_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.31}$$

збігається до розв'язку рівняння (3.29), а отже, і рівняння (3.28).

Теорема 3.4.1. *Припустимо, що для матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті (3.28) виконуються наступні умови.*

1. *Рівняння (3.28) має розв'язок $\tilde{Z}$.*
2. *У малому околі точного розв'язку $\tilde{Z}$ рівняння (3.29) виконується умова (3.30).*

У такому разі для знаходження розв'язку $\tilde{Z}$ рівняння (3.28) застосовна ітераційна схема (3.31), яка збігається до розв'язку рівняння (3.28).

Зазначимо, що для знаходження розв'язку матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті (3.28) застосовний також метод Ньютона-Канторовича [35]. Запропонована у статті техніка розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті (3.28) аналогічно [120] може бути перенесена на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі.

Приклад 3.4.1. *Запропонована у теоремі 3.4.1 схема застосовна для знаходження розв'язку матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті*

$$Z\,Z^* + Z + C = 0, \quad C := -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Для нульового наближення

$$Z_0 := \frac{5}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ||f(z_0)|| = \frac{\sqrt{157}}{36} \approx 0,348\ 055$$

умова (3.30) виконується:

$$\det \Gamma_0 = 1 \neq 0, \quad \Gamma_0 = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 15 \\ 30 & 0 & 68 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 43 \end{pmatrix},$$

крім того

$$||\psi'(z_0)||_{\mathbb{R}^4} = \frac{1}{108}\sqrt{\frac{37}{2}\left(79 + \sqrt{3649}\,\right)} \approx 0,470\ 223 < 1.$$

Для першого наближення

$$Z_1 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 1 & 36 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ||f(z_1)|| = \frac{37}{1296} \approx 0,0285\ 494$$

умова (3.30) також виконується:

$$\det \Gamma_1 = \frac{494\ 209}{419\ 904} \neq 0, \quad \Gamma_1 = \frac{1}{648}\begin{pmatrix} 722 & 0 & 1368 & 0 \\ 0 & 685 & 18 & 684 \\ 1368 & 18 & 3240 & 648 \\ 0 & 684 & 648 & 1944 \end{pmatrix},$$

крім того

$$||\psi'(z_1)||_{\mathbb{R}^4} \approx 0,0766\ 725 < 1.$$

Для другого наближення

$$Z_2 = \frac{1}{1368}\begin{pmatrix} 1 & 1368 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ||f(z_2)|| = \frac{1\ 369}{1\ 871\ 424} \approx 0,000\ 731\ 529$$

умова (3.30) також виконується:

$$\det \Gamma_2 = \frac{879\ 403\ 195\ 225}{875\ 556\ 946\ 944} \neq 0\ ,$$

крім того

$$||\psi'(z_2)||_{\mathbb{R}^4} \approx 0,00\ 220\ 254 \ll 1;$$

тут

$$\Gamma_2 = \frac{1}{935\ 712} \begin{pmatrix} 938\ 450 & 0 & 1\ 874\ 160 & 0 \\ 0 & 937\ 081 & 684 & 937\ 080 \\ 1\ 874\ 160 & 684 & 4\ 678\ 560 & 935\ 712 \\ 0 & 937\ 080 & 935\ 712 & 2\ 807\ 136 \end{pmatrix}.$$

Для третього наближення

$$Z_3 = \frac{1}{1\ 874\ 160} \begin{pmatrix} 1 & 1\ 874\ 160 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ ||f(z_3)|| = \frac{1\ 369}{1\ 871\ 424} \approx 0,000\ 731\ 529$$

умова (3.30) також виконується:

$$\det \Gamma_3 = \frac{3\ 084\ 381\ 270\ 031\ 172\ 630\ 449\ 681}{3\ 084\ 371\ 395\ 607\ 554\ 467\ 840\ 000} \neq 0\ ,$$

крім того

$$||\psi'(z_3)||_{\mathbb{R}^4} \approx 1,61\ 162 \times 10^{-6} \ll 1.$$

Для четвертого

$$Z_4 = \frac{1}{3\ 512\ 479\ 453\ 920} \begin{pmatrix} 1 & 3\ 512\ 479\ 453\ 920 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$||f(z_4)|| \approx 2,84\ 699 \times 10^{-13}$$

і п'ятого наближень

$$Z_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12\ 337\ 511\ 914\ 217\ 166\ 362\ 274\ 240} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$||f(z_5)|| \approx 8,10\ 536 \times 10^{-26}$$

умова (3.30) також виконується

$$\det \Gamma_4 \neq 0, \quad \det \Gamma_5 \neq 0,$$

крім того

$$||\psi'(z_4)||_{\mathbb{R}^4} \approx 8,59\ 919 \times 10^{-13} \ll 1, \quad ||\psi'(z_5)||_{\mathbb{R}^4} \approx 2,44\ 818 \times 10^{-25} \ll 1.$$

Про збіжність до розв'язку рівняння (3.32) знайденої послідовності наближень, визначених ітераційною схемою (3.31), свідчить послідовне зменшення величин

$$||f(z_k)||, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Рівняння (3.32) має точний розв'язок

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тому про збіжність до розв'язку рівняння (3.32) знайденої послідовності наближень, визначених ітераційною схемою (3.31), свідчить послідовне зменшення величин

$$||Z_k - \tilde{Z}||, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

зокрема

$$||Z_0 - \tilde{Z}|| = \frac{1}{6}, \quad ||Z_1 - \tilde{Z}|| = \frac{1}{36}, \quad ||Z_2 - \tilde{Z}|| = \frac{1}{1368}, \quad ||Z_3 - \tilde{Z}|| = \frac{1}{1\ 874\ 160},$$

$$||Z_4 - \tilde{Z}|| = \frac{1}{3\ 512\ 479\ 453\ 920} \approx 2,84\ 699 \times 10^{-13},$$

$$||Z_5 - \tilde{Z}|| = \frac{1}{12\ 337\ 511\ 914\ 217\ 166\ 362\ 274\ 240} \approx 8,10\ 536 \times 10^{-26}.$$

Висновки до розділу 3

1. Знайдені умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом, які узагальнюють традиційні результати, як для матричних диференціальних рівнянь, так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь.

2. У випадку нерозв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.14), (1.15), знайдені умови існування, а також конструкція найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

3. У випадку розв'язності матричної диференціально алгебраїчної крайової задачі (1.14), (1.15) для відповідного вибору матриці $\psi(t)$ знайдені умови існування, а також конструкція найкращого (у сенсі найменших квадратів) розв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

Основні результати третього розділу дисертації опубліковано в статтях у наукових фахових виданнях України та тезах доповідей на Міжнародних наукових конференціях та семінарах [31, 100, 103, 104].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано конструктивні умови існування та побудовано алгоритми знаходження розв'язків матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач, для яких відповідний оператор не має оберненого, зокрема:

1) для матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра побудовано схему регуляризації, яка суттєво відрізняється від класичного методу регуляризації Тихонова. Для наближеного розв'язання матричного рівняння Ріккаті побудовано ітераційну схему за технікою найменших квадратів, а також знайдені умови її збіжності до шуканого розв'язку;

2) знайдені умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом, які узагальнюють традиційні результати, як для матричних диференціальних рівнянь, так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь. Для лінійних нетерових крайових задач отримані достатні умови регуляризації за рахунок, як виродженого, так і невиродженого імпульсного збурення, а також за допомогою імпульсного впливу типу ”interface conditions”;

3) у випадку нерозв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.14), (1.15), знайдені умови існування, а також конструкція найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі, які узагальнюють традиційні результати, як для матричних диференціальних рівнянь, так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азбелев Н.В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. — Москва : Наука, 1991. — 277 с.

2. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и реккурентное оценивание / А. Алберт. — Москва : Наука, 1977. — 224 с.

3. Алиев Ф.А. О построении общего решения обобщенного уравнения Сильвестра / Ф.А. Алиев, В.Б. Ларин // Proceedings of IAM. — 2016. — T. 5, №1. — P. 3—10.

4. Арнольд В.И. Особенности дифференцируемых отображений / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде. — 3-е изд., перераб. — Москва : МЦНМО, 2009. — 672 с.

5. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. — Москва : Наука, 1965. — 408 с.

6. Бігун Я.Й. Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням / Я.Й. Бігун // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 4. — С. 435–446.

7. Бойчук А.А. Автономные слабонелинейные краевые задачи / А.А. Бойчук, С.М. Чуйко // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 10. — С. 1668—1674.

8. Бойчук А.А. Бифуркация решений импульсной краевой задачи / А.А. Бойчук, С.М. Чуйко // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11, № 1. — С. 21—31.

9. Бойчук А.А. Вироджені нетерові крайові задачі / А.А Бойчук, Л.М. Шегда // Нелінійні коливання. — 2007. — Т. 10, № 3. — С. 303—312.

10. Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач / А.А. Бойчук. — Київ : Наук. думка, 1990. — 96 с.

11. Бойчук А.А. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи / А.А. Бойчук, В.Ф. Журавлев, А.М. Самойленко. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.

12. Бойчук А.А. Нормально-разрешимые краевые задачи / А.А. Бойчук, В.Ф. Журавлев, А.М. Самойленко. — К.: Наук. думка. — 2019. — 628 с.

13. Бойчук А.А. Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями / А.А. Бойчук, С.М. Чуйко // Нелінійні коливання. — 2007. — Т. 10, № 1. — С. 51—65.

14. Бойчук А.А. Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием / А. А. Бойчук, Е. В. Чуйко, С. М. Чуйко // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, № 5. — С. 588—594.

15. Бойчук А.А. Слабонелинейные краевые задачи с импульсным воздействием типа "interface conditions"/ А. А. Бойчук, С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко // Нелінійні коливання. — 2000. — Т. 3, № 3. — С. 291—296.

16. Бойчук А.А. Функция Грина линейной неоднородной краевой задачи / А. А. Бойчук. // Доповіді АН УРСР. Серія А: фіз.-мат. і техн. науки. — 1988. — №7. — С. 3–6.

17. Бояринцев Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования / Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.

18. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р . Беллман. — Москва : Наука, 1969. — 367 с.

19. Вержбицкий В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / В.М. Вержбицкий. — Москва : Высшая школа, 2000. — 270 с.

20. Власенко Л.А. Теоремы единственности и аппроксимации для одного вырожденного операторно-дифференциального уравнения / Л.А. Власенко, А.Г. Руткас // Матем. заметки. — 1996. — Т. 68, № 4. — С. 597—601.

21. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — Москва : Наука, 1984. — 318 с.

22. Гаврилюк І.П. Методи обчислен. Ч. II. / І.П. Гаврилюк, В.Л. Макаров. — Київ : Вища школа, 1995. — 432 с.

23. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — Москва : Наука, 1988. — 552 с.

24. Годунов С.К. Нормы решений матричных уравнений Лурье – Риккати как критерий качества стабилизируемости и детектируемости / С.К. Годунов // Вычислительные проблемы в задачах математической физики. — Новосибирск: Наука, 1992. — С. 3–21. — (Труды Института математики СО РАН; т. 22).

25. Гребеников Е.А. Введение в резонансную аналитическую механику / Е.А. Гребеников, Ю.А. Митропольский, Ю.А. Рябов. — Москва : Янус, 1999. — 302 с.

26. Гребеников Е.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов. — Москва : Наука, 1979. — 432 с.

27. Гукенхеймер Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. — Москва : Ижевск, 2002. — 560 с.

28. Демиденко Г.В. Матричные уравнения / Г.В. Демиденко. — Новосибирск : НГУ. — 2009. — 204 с.

29. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. — Москва : Наука, 1967. — 472 с.

30. Деревенский В.П. Матричные уравнения Бернулли. I / В.П. Деревенский // Известия вузов. Математика. — 2008. — № 2. — С. 14—23.

31. Дзюба М. В. Про наближене розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті методом найменших квадратів / М. В. Дзюба // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. — 2017. — Т. 31. — С. 46—53.

32. Дьяконов В.П. Mathematica в математических и научно-технических расчетах / В.П. Дьяконов. — Москва : Солон-Пресс, 2004. — 696 с.

33. Зеликин М.И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении / М.И. Зеликин — Москва : Факториал. — 1998. — 352 с.

34. Иванов А.П. Итерационный метод построения периодических решений систем с малым параметром. Проблемы механики. / А.П. Иванов, Т.И. Наджафов. — Москва : Наука, 2003. — С. 406—417.

35. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — Москва : Наука, 1977. — 744 с.

36. Каудерер Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер. — Москва : Изд.-во иностр. лит., 1961. — 778 с.

37. Кравчук М. Вибрані математичні праці / М. Кравчук. — Київ; Нью-Йорк: Задруга, 2002. — 792 с.

38. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — Москва : Наука, 1971. — 104 с.

39. Крылов Н.М. Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. — Киев : Изд-во АН УССР, 1937. — 365 с.

40. Крылов Н.М. Избранные труды. Т. 1 / Н.М. Крылов. — Киев : Изд-во Акад. наук УССР, 1961.— 268 с.

41. Кублановская В.И. О вычислении обобщенной обратной матрицы и проектора / В.И. Кублановская // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. — 1966. — Т. 6, № 2. — С. 326—332.

42. Кувшинов В.М. Особенности численного решения матричного алгебраического уравнения Риккати методом установления // Ученые записки ЦАГИ. — 1979. — Т. X. № 1. — С. 69—87.

43. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. — Москва : Наука, 1978. — 280 с.

44. Лаптинский В.Н. К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 7. — С. 994—996.

45. Лика Д.К. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний / Д.К. Лика, Ю.А. Рябов. — Кишинев: Штиница, 1974. — 292 с.

46. Лузин Н.Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений / Н.Н. Лузин // Автоматика и телемеханика. — 1940. — № 5. — С. 4—66.

47. Лшссел У. Связанные и параметрические колебания в электронике / У. Лшссел. — Москва : Иностранная литература, 1963. — 351 с.

48. Лыкова О.Б. Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях / О.Б. Лыкова, А.А. Бойчук // Укр. мат. журнал. — 1988. — Т. 40, № 1. — С. 62—69.

49. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И.Г. Малкин. — Москва : Гостехиздат, 1956. — 491 с.

50. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. — Москва : ГИТТЛ, 1952. — 432 с.

51. Мышкис А.Д. Системы с толчками в заданные моменты времени / А.Д. Мышкис, А.М. Самойленко // Математ. сборник. Новая серия. — 1967. — Т. 74, № 2. — С. 202—208.

52. Панасенко Е.В. Краевые задачи для уравнения Ляпунова в банаховом пространстве / Е.В. Панасенко, А.А. Покутный // Нелінійні коливання. — 2016. — Т. 19, № 2. — С. 240—246.

53. Покутний О. Розробка методів розв'язування крайових задач для операторно-диференціальних систем, які моделюють фізико-технічні та біологічні задачі / О. Покутний, І. Бондар. — Препр. ІМ НАН України. — 6.06.2016.

54. Потемкин В.Г. Система MATLAB. Справочное пособие / В.Г. Потемкин. — Москва : Диалог; МИФИ, 1997. — 350 с.

55. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. — Киев: Вища шк., 1987. — 287 с.

56. Самойленко А.М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням / А.М. Самойленко, М.І. Шкіль, В.П. Яковець. — Київ : Вища школа, 2000. — 296 с.

57. Самойленко А.М. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань / А.М. Самойленко, Р.І. Петришин. — Київ : Наук. думка, 2004. — 475 с.

58. Самойленко А.М. О существовании периодических решений некоторых классов дифференциальных уравнений со случайным импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк, А.Н. Станжицкий // Укр. мат. журнал. — 2001. — Т. 53, № 8. — С. 1061—1079.

59. Самойленко А.М. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. — Київ : Наук. думка, 1986. — 224 с.

60. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.

61. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — Москва : Наука, 1986. — 288 с.

62. Фодчук В.И. К теории интегральных многообразий сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений / В.И. Фодчук, И.М. Черевко // Укр. мат. журн. — 1982. — Т. 34, № 6. — С. 725—731.

63. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. — Москва : Мир. — 1999. — 686 с.

64. Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах / Т. Хаяси. — Москва : Иностр. лит., 1957. — 204 с.

65. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — Москва : Мир, 1989. — 655 с.

66. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, 1996. — 280 с.

67. Чистяков В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. — Новосибирск: Наука. — 2003. — 317 с.

68. Чуйко А.С. Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи / А.С. Чуйко // Нелинейные колебания. — 2005. — Т. 8, № 2. — С. 278—288.

69. Чуйко О. Про регуляризацію матричної крайової задачі збуренням крайової умови / О. Чуйко, М. Дзюба // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування, 28–30 вересня 2016 р. : матеріали міжнар. конф. — Чернівці, 2016. — С. 99.

70. Чуйко С.М. Автономная нетерова краевая задача в критическом случае / С.М. Чуйко, И.А. Бойчук // Нелінійні коливання. — 2009. — Т. 12, № 3. — С. 405—416.

71. Чуйко С.М. Возникновение решений линейной нетеровой краевой задачи / С.М. Чуйко // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 8. — С. 1148—1152.

72. Чуйко С.М. К вопросу об обобщении матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи / С.М. Чуйко // Укр. мат. вестник. — 2017. — Т. 14, № 1. — С. 16—32.

73. Чуйко С.М. Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем / С.М. Чуйко // Комп. исследов. и моделирование. — 2013. — Т. 5, №5. — С. 769—783.

74. Чуйко С.М. Метод найменших квадратів в теорії некорректно поставлених крайових задач / С.М. Чуйко // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. — 2007. — № 7. — С. 51—53.

75. Чуйко С.М. Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса / С.М. Чуйко // Нелинейные колебания. — 2014. — Т. 17, № 1. — С. 137—148.

76. Чуйко С.М. Нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально-алгебраических систем с линейным импульсным воздействием / С.М. Чуйко // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 (32), № 1–2. — С. 89—100.

77. Чуйко С.М. О приближенном решении автономных краевых задач методом наименьших квадратов/ С.М. Чуйко, О.В. Старкова // Нелінійні коливання. — 2009. — Т. 12, № 4. — С. 556—573.

78. Чуйко С.М. О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов / С.М. Чуйко // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11, № 4. — С. 554—573.

79. Чуйко С.М. О разрешимости линейной матричной краевой задачи / С.М. Чуйко // Известия Вузов. Математика. — 2018. — № 4. — С. 86—97.

80. Чуйко С.М. О регуляризации линейной нетеровой краевой задачи при помощи вырожденного импульсного воздействия / С.М. Чуйко // Нелінійні коливання. — 2013. — Т. 16, № 1. — С. 133—145.

81. Чуйко С.М. О регуляризации матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи / С.М. Чуйко // Український математичний вісник. — 2016. — Т. 13, № 1. — С. 76—90.

82. Чуйко С. М. О решении билинейного матричного уравнения / С.М. Чуйко // Чебышевский сборник. — 2016. — Т. 17, Вып. 2. — С. 196—205.

83. Чуйко С.М. О решении линейных матричных уравнений / С.М. Чуйко // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: матем., прикладна матем. і механіка. — 2015. — Т. 81. — С. 28—34.

84. Чуйко С.М. О решении матричного уравнения Ляпунова / С.М. Чуйко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика и математика. — 2015, № 3. — С. 176—185.

85. Чуйко С. М. О решении матричного уравнения Сильвестра / С.М. Чуйко // Вестник Одесского национального университета. Серия: математика и механика. — 2014. — Т. 19, Вып. 1 (21). — С. 49—57.

86. Чуйко С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова / С.М. Чуйко // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразіна. Серия: математика, прикладная математика и механика. — 2014. — № 1120. — С. 85—94.

87. Чуйко С.М. О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра / С.М. Чуйко // Чебышевский сборник. — 2015. — Т. 16, Вып. 1. — С. 52—66.

88. Чуйко С.М. Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи / С.М. Чуйко // Нелінійні коливання. — 2006. — Т. 9, № 3. — С. 416—432.

89. Чуйко С.М. Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием / С.М. Чуйко, Е.В. Чуйко // Доповіді НАНУ. — 1999. — № 6. — С. 43—47.

90. Чуйко С.М. Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием / С.М. Чуйко // Доклады Академии Наук. Июль 2001. — Т. 379, № 2. — С. 170—172.

91. Чуйко С.М. Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения / С.М. Чуйко // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 (32), № 1–2. — С. 101—107.

92. Чуйко С.М. Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием / С.М. Чуйко // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 8. — С. 1132—1135.

93. Чуйко С. М. Про регуляризацію матричного рівняння Сильвестра / С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, М. В. Дзюба // Труды Института при-

кладной математики и механики НАН Украины. — 2015. — Т. 29. — С. 147—156.

94. Чуйко С. М. Регуляризация линейной нетеровой краевой задачи при помощи импульсного воздействия типа "interface conditions"/ С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, М. В. Дзюба // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2016. — Т. 30. — С. 143—154.

95. Чуйко С. М. Регуляризация матричного уравнения Сильвестра / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // XI Міжнародна математична літня школа «Алгебра, топологія, аналіз», 1–14 серпня 2016 р. : тези доп. — Одеса, 2016. — С. 142.

96. Чуйко С.М. Регуляризація періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу / С.М. Чуйко, О.В. Чуйко // Буковинський математичний журнал. — 2013. — Т. 1, № 3—4. — С. 158—161.

97. Чуйко С. М. Регуляризація матричної крайової задачі за допомогою збурення крайової умови / С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, М. В. Дзюба // Буковинський математичний журнал. — 2016. — Т. 4, № 1—2. — С. 145—151.

98. Чуйко С. М. Матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсним впливом / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Теорія наближення функцій та її застосування, 28 травня–3 червня 2017 р. : тези доп. міжнар. конф. — Слов'янськ, 2017. — С. 95.

99. Чуйко С. М. Матрична імпульсна диференціально-алгебраїчна крайова задача / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, 7–10 червня 2017 р. : тези доп. — Київ, 2017. — С. 109.

100. Чуйко С. М. Матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача с импульсным воздействием / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Нелінійні коливання. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 564—573. Translated in: Chuiko S. M. Matrix differential-algebraic boundary-value problem with

pulsed action / S. M. Chuiko, M. V. Dzyuba // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — V. 238, N 3. — P. 333—343.

101. Чуйко С. М. Матричная импульсная дифференциально-алгебраическая краевая задача / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова, 11–16 июня 2018 г. : тезисы докл. — Одесса, 2018. — С. 84.

102. Чуйко С. Матрична імпульсна диференціально-алгебраїчна крайова задача / С. Чуйко, М. Дзюба // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях, 17–19 вересня 2018 р. : матеріали міжнар. наук. конф. — Чернівці, 2018. — С. 113.

103. Чуйко С. М. Метод найменших квадратів у теорії матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач / С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова, М. В. Дзюба // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 2. — С. 280—292. Translated in: Chuiko S. M. Least-squares method in the theory of matrix differential-algebraic boundary-value problems / S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova, M. V. Dzyuba // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — V. 70, N 2. — P. 319—333.

104. Чуйко С. М. Про наближене розв'язання матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач методом найменших квадратів / С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова, М. В. Дзюба // Нелінійні коливання. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 423—436.

105. Якубович В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. — Москва : Наука, 1972. — 720 с.

106. Barnes B. Convex regularization method for solving Cauchy problem of the Helmholtz equation / B. Barnes , E. Osei-Frimpong, J. Ackora-Prah, S. K. Amponsah // Math. theory and Modeling. — 2016. — V. 11, N 6. — P. 63—74.

107. Boichuk A.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations / A.A. Boichuk, S.A. Krivosheya // Differential Equations. — 2001. — T. 37, N 4. — P. 464—471.

108. Boichuk A.A. Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations / A.A. Boichuk, A.A. Pokutnyi, V.F. Chistyakov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — V. 53, N 6. — P. 777—788.

109. Boichuk A.A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type / A.A. Boichuk, S.A. Krivosheya // Ukrainian Mathematical Journal. — 1998. — V. 50, N 8. — P. 1162—1169.

110. Boichuk A.A. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. — Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. — 298 p.

111. Boichuk A. Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases / A. Boichuk, S. Chuiko // Differential Equations. — 1992. — N 10. — P. 1353—1358.

112. Campbell S.L. Singular Systems of differential equations / S. L. Campbell — San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. — 1980. — 178 p.

113. Campbell S.L. Generalized Inverses of Linear Transformations / S.L. Campbell, C.D. Meyer — London. — Pitman Publishing Limited. — 1979. — 272 p.

114. Cherevko I. Asymptotic decomposition of linear singularly perturbed multiscale systems / I. Cherevko, O.Osypova // Miskolc Mathematical Notes. — 2015. — V. 16, N 2. — P. 729—745.

115. Chuiko S.M. About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods / S. M. Chuiko, O.V. Starkova // Nonlinear oscillation. — 2009. — V. 12, N 4. — P. 556—573.

116. Chuiko S.M. A generalized matrix differential-algebraic equation / S.M. Chuiko // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). — 2015. — V. 210, N 1. — P. 9—21.

117. Chuiko S.M. An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case / S.M. Chuiko, I.A. Boichuk // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — 2009. — V. 12, N 3. — P. 405—416.

118. Chuiko S.M. Emergence of solution of linear Noetherian boundary-value problem / S.M. Chuiko // Ukr. Math. Zh. — 2007. — V. 59, N 8. — P. 1274—1279.

119. Chuiko S.M. Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation / S. M. Chuiko // Russian Mathematics. — 2016. — V. 60, N 8. — P. 64—73.

120. Chuiko S.M. Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem / S.M. Chuiko // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — V. 38 (2). — P. 236—244.

121. Chuiko S.M. On a regularization method for solving linear matrix equation / S.M. Chuiko, E.V. Chuiko, A.V. Belushenko // Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math. — 2014. — V. 1. — P. 12—14.

122. Chuiko S. M. On regularization method for solving linear matrix Sylvester equation / S. M. Chuiko, M. V. Dzuba // International Conference on Differential Equations, dedicated to the 110-th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, 20–24 September 2016 : Book of Abstracts. — Lviv, 2016. — P. 39.

123. Chuiko S. M. On a regularization method for solving matrix Sylvester equation / S. M. Chuiko, M. V. Dzuba // Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation, 24–26 May 2017 : Abstracts of XVIII Intern. Conf. Reports. — Kyiv, 2017. — P. 24.

124. Chuiko S.M. On approximate solution of boundary value problems by the least square method / S.M. Chuiko // Nonlinear Oscillations (N.Y.). — 2008. — V. 11, N 4. — P. 585—604.

125. Chuiko S.M. On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem the Newton - Kantorovich method / S. M. Chuiko, I. A. Boichuk, O. E. Pirus // Journal of Mathematical Sciences — 2013. — V. 189, N 5. — P. 867—881.

126. Chuiko S.M. On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method / S.M. Chuiko, O.E. Pirus // Journal of Mathematical Sciences — 2013. — V. 191, N 3. — P. 449—464.

127. Chuiko S.M. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action / S.M. Chuiko // Journal of Mathematical Sciences — 2014. — V. 197, N 1. — P. 138—150.

128. Chuiko S.M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem / S.M. Chuiko // Siberian Mathematical Journal. — 2015. — V. 56, N 4. — P. 752—760.

129. Chuiko S.M. On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem / S.M. Chuiko // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — V. 220, N 5. — P. 591—602.

130. Chuiko S. About an approximate solution of matrix differential-algebraic boundary-value problems with a least-squares method / S. Chuiko, O. Nesmelova, M. Dzuba //Differential equations and control theory, 25–27 September 2018 : Book of Abstracts. — Kharkiv, 2018. — P. 18.

131. Conti R. On ordinary differential equation with interface conditions / R. Conti // Journ. of Diff. Eq. — 1968. — V. 4, N 1. — P. 4—11.

132. Godunov S.K. Norms of solutions to the Lurie-Riccati matrix equations as criteria of the quality of stabilizability and detectability / S.K.Godunov // Siberian Advances in Mathematics. — 1992. — V. 2, N 3. — P. 135—157.

133. Karandjulov L.I. Generalized Green's matrix for linear pulse boundary-value problems / L. I. Karandjulov // Укр. мат. журнал. — 1994. — Т. 46, № 7. — С. 849—856.

134. Kovalev A.M. Inverse problems of nonlinear control systems / A.M. Kovalev, V.F. Shcherbak // Facta Univ. Ser. Mech. Automat. Control Robot. — 1997. — V. 2, N 7. — P. 241—253.

135. Kovalev A.M. The Synthesis of Stabilizing Control of a Rigid Body with Attached Elastic Elements / A.M. Kovalev, A.L. Zuyev, V.F. Shcherbak // J. of Automation and Information Sciences. — 2002. — V. 34, N 11. — P. 1—10.

136. Kovalev A.M. Damping for forced oscillations in systems of linked rigid bodies / A.M. Kovalev, I.A. Bolgrabskaya, D.A. Chebanov,

V.F. Shcherbak // Internat. Appl. Mech. — 2003. — V. 39, N 3. — P. 343—349.

137. Lakshmikantham V. Theory of Impulsive Differential Equations / V. Lakshmikantham, D. Bainov, P. Simeonov. — Singapore; New Jersey; Londn; Hong Kong: World Scientific, 1989. — 272 p.

138. Lakshmikantham V. Trends in the theory of impulsive differential equations / V. Lakshmikantham // Differential equations and applications V. I, II. — Ohio Univ. Press, Athens, OH, 1989. — P. 76—87.

139. Lakshmikantham V. Hybrid systems with time scales and impulses / V. Lakshmikantham, J. Vasundhara Devi // Nonlinear Anal. — 2006. — V. 65, N 11. — P. 2147—2152.

140. Lakshmikantham V. Impulsive differential systems for two-point boundary value problems / V. Lakshmikantham, K. N. Murty, S. Sivasundaram // Appl. Math. Comput. — 1992. — V. 50, N 2—3. — P. 157—166.

141. Lamour R. Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis / R. Lamour, R. März, C. Tischendorf. — Heidelberg, New York, Dordrecht, London. — Springer. — 2013. — 667 p.

142. Leontief W.W. The Structure of American Economy 1919-1939: An Empirical Application of Equilibrium Analysis / W.W. Leontief. — Oxford University Press, Inc., 1951; 2nd edition enlarged. — 264 p.

143. Liz E. Periodic solutions of discontinuous impulsive differential systems / E. Liz, J. J. Nieto // J. Math. Anal. Appl. — 1991. — V. 161, N 2. — P. 388—394.

144. Magnus J.R. L-structured matrices and linear matrix equations / J.R. Magnus // Linear algebra and its appl. — 1983. — V. 14. — P. 67—88.

145. Magnus J.R. Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, 2nd Edition / J.R. Magnus, H. Neudecker // Wiley. — 1999. — 424 pp.

146. Nashed M.Z. Generalized Inverses and Applications / M. Z. Nashed. — New York: Academic Press, 1976. — 1054 p.

147. Palin V.V. Solvability of Quadratic Matrix Equations / V.V. Palin // Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika. Mekhanika. — 2008. — V. 63, N 6. — P. 36—41.

148. Perestyuk N.A. On the Solvability of Impulsive Differential-algebraic Equations / N.A. Perestyuk, L.A. Vlasenko // Ukrainian Mathematical Journal. — 2005. — V. 57, N 4. — P. 458—468.

149. Perestyuk M.O. Decomposition of linear singularly perturbed functional differential equations / M.O. Perestyuk, I.M. Cherevko // Nonlinear Oscillations. — 2001. — V. 4, N 3. — P. 345—353.

150. Panasenko E.V. Bifurcation conditions for the solutions of the Lyapunov equation in a Hilbert space / E.V. Panasenko, O.O. Pokutnyi // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — V. 236, N 3. — P. 313—326.

151. Samoilenko A. Hybrid difference differential boundary-value problem / A. Samoilenko, A. Boichuk, S. Chuiko // Miskolc Mathematical Notes. — 2017. — V. 18, № 2. — P. 1015—1031.

152. Sčhwabik S. Differential Equations with Interface Conditions / S. Sčhwabik // Časopis Pro pestovani matematiky. — 1980. — roč. 105. — P. 391—410.

153. Stallard F.W. Differential systems with interface conditions / F. W. Stallard. — Oak Ridge National Laboratory Report, N 1876. — 1955. — 71 p.

154. Stanimirovic P.S. On the Leverrier-Faddeev algorithm for computing the Moore-Penrose inverse / P. S. Stanimirovic, M. B. Tasic // J. Appl. Math. Comput. — 2011. — V. 35, N 1—2. — P. 135—141.

155. Stanimirovic P.S. On removing blur in images using least squares solutions / P. S. Stanimirovic, I. Stojanovic, D. Pappas, S. Chountasis // Filomat. — 2016. — V. 30 (14). — P. 3855—3866.

156. Vejvoda O. On perturbed nonlinear boundary-value problems / O. Vejvoda // Czech. Math. J. — 1961. — N 11. — P. 323—364.

157. Vogel T. Breaking oscillations in servo systems / T. Vogel // Journ. Mental. Sci. — 1954. — V. 100. — P. 103—113.

158. Vogel T. Theorie des systemes evolutifs / T. Vogel // Goutnier. — Villons. — 1965. — 172 p.

159. Wexler D. On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems / D. Wexler // Ann. Vft. Pura et Appl. — 1968. — V. 80. — P. 123—136.

160. Weierstrass K. Zur theorie der bilinearen und quadratischen formen / K. Weierstrass // Monatsh. Akad. Wiss. Berlin. — 1867. — P. 310—338.

ДОДАТОК А
Допоміжні приклади

Приклад А.1. *Матриця*

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 & 5 & 10 & 16 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 6 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 6 & 9 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 5 & 10 & 16 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

зображується у вигляді стандартного розвинення (1.4) з використанням матриць

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

та

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -374 & 1870 & -1122 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2431 & -374 & -561 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -546 & -1092 & 910 & -140 & -210 \\ 0 & 0 & 0 & -392 & 1834 & -1092 & 168 & 252 \\ 0 & 0 & 0 & 84 & 168 & -140 & 1834 & -1176 \end{pmatrix}.$$

Дійсно, $\operatorname{rank} Q = 3$, тому кісткове розвинення $Q := R \cdot S$ визначають матриці

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зобразимо матрицю J_r у вигляді

$$J_r = V_r \cdot W_r, \quad V_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$P_{R^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{R^*_{m-r}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

та

$$P_S = \begin{pmatrix} 2431 & -374 & -561 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -374 & 1870 & -1122 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -561 & -1122 & 935 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2422 & -392 & -546 & 84 & 126 \\ 0 & 0 & 0 & -392 & 1834 & -1092 & 168 & 252 \\ 0 & 0 & 0 & -546 & -1092 & 910 & -140 & -210 \\ 0 & 0 & 0 & 84 & 168 & -140 & 1834 & -1176 \\ 0 & 0 & 0 & 126 & 252 & -210 & -1176 & 854 \end{pmatrix},$$

то для матриць

$$C_{m-r} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{n-r} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

за формулами

$$\Phi = \begin{pmatrix} R & P_{R^*_{m-r}} C_{m-r} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} S \\ C_{n-r} P_{S_{n-r}} \end{pmatrix};$$

отримуємо наведені вище матриці Φ та Ψ.

Приклад А.2. *Як ілюстрацію до теореми 1.1.2 розглянемо задачу про розв'язання рівняння*

$$Qc = b, \tag{A.1}$$

де

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}^5.$$

Стандартне розвинення матриці

$$Q := \Phi \cdot J \cdot \Psi, \quad J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

визначають невироджені матриці

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система (А.1) розв'язна, оскільки $\mathcal{P}_{Q_d^*}\, b = 0$; при цьому

$$c = Q^{\dagger} b + \mathcal{P}_{Q_r}\, c_r, \quad c_r := \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}^* \in \mathbb{R}^3;$$

тут

$$Q^{\dagger} b = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_{Q_r} c_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_1 + c_2 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином $c = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -c_1 + c_2 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}^*$ — загальний розв'язок системи (А.1).

Приклад А.3. *Побудуємо ортопроектори P_Q, P_{Q^*} матриці*

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця Q має $\operatorname{rank} Q = 2$, тому стандартне розвинення визначає матриця

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причому стандартне розвинення (1.4) визначають матриці

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження ортопроекторів P_Q, P_{Q^*} будуємо матриці

$$\mathcal{P}_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ортопроектор P_Q пов'язаний з проектором $\mathcal{P}_Q$ наступним чином

$$P_Q = \mathcal{P}_Q S, \quad S := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно ортопроектор P_{Q^*} пов'язаний з матрицею $\mathcal{P}_{Q^*}$ рівністю

$$P_{Q^*} = R\mathcal{P}_{Q^*}, \quad R := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад А.4. *Використовуючи стандартне розвинення, досліджуємо задачу про розв'язання рівняння*

$$Qc = b, \tag{A.2}$$

де

$$Q := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}^5.$$

Стандартне розвинення матриці $Q := \Phi \cdot J \cdot \Psi$ наведене у прикладі A.3, крім того

$$Q^\dagger = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 8 & -8 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система (A.2) розв'язна, оскільки $\mathcal{P}_{Q_d^*} b = 0$; при цьому

$$c = Q^\dagger b + \mathcal{P}_{Q_r} c_r, \quad Q^\dagger b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

тут

$$\mathcal{P}_{Q_r} c_r = \begin{pmatrix} 2c_1 - c_2 & 0 & -2c_1 + c_2 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином

$$c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\,(2c_1 - c_2 - 1) & 1 & -2\,(2c_1 - c_2 - 1) & 2\,(2c_1 - 1) & 2\,c_3 \end{pmatrix}^*$$

— загальний розв'язок системи (A.2).

Приклад A.5. *Матричне рівняння Сильвестра*

$$\sum_{i=1}^{2} Q_i \; C \; R_i = B \tag{A.3}$$

розв'язне для

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Природний базис простору $\mathbb{R}^{3\times 3}$ складають матриці [21]

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots , \ \Theta_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \dots , \ \Xi_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ключова при дослідженні матричного рівняння Сильвестра (A.3) матриця

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

визначає матрицю-ортопроектор

$$P_{\mathcal{Q}^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, то для матричного рівняння Сильвестра (А.3) має місце критичний випадок, при цьому умова (1.11), виконується, тому поставлена задача розв'язна. Шуканий $r := 5$ – параметричний розв'язок

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r]$$

матричного рівняння Сильвестра (А.3) визначає матриця

$$\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[B] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв'язок матричного рівняння Сильвестра (А.3) має вигляд

$$C = \Phi[Q_i, R_i] + \Psi[B, c_r],$$

де

$$\Phi[Q_i, R_i] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi[B, c_r] = \begin{pmatrix} 0 & c_2 & 0 \\ c_1 & c_3 & c_5 \\ 0 & c_4 & 0 \end{pmatrix},$$

$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5 \in \mathbb{R}^1$ — довільні константи.

Приклад A.6. *Вимогам леми 1.2.1 задовольняє традиційна диференціально-алгебраїчна система*

$$Q(t)\, z'(t) = \Omega(t)z(t) + f(t), \quad f(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}^* \tag{A.4}$$

де

$$Q(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad \Omega(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

У наслідок рівності

$$P_{Q^*(t)}\Omega(t) = 0, \quad P_{Q^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0$$

умови (1.17) та (1.18) виконано. Добуток

$$Q^+(t)\Omega(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

визначає загальний розв'язок

$$W(t,c) = X(t)\, c, \quad X(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{t}{2} & \frac{\sin t}{2} & -\sin^2 \frac{t}{2} \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\sin^2 \frac{t}{2} & \frac{\sin t}{2} & \cos^2 \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}^3$$

задачі Коші $Z(a) = c$, $c \in \mathbb{R}^3$ для однорідної частини рівняння (A.4), а також узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (A.4); покладемо $\varphi(t) := \sin t$, при цьому

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\,(\cos t - 1) \\ 3 \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад A.7. *Вимогам теореми 1.3.1 задовольняє задача про побудову 2π-періодичних розв'язків диференціально-алгебраїчної системи*

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \tag{A.5}$$

де

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_1 := R_2, \quad \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 := \Phi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ \cos t & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Крім того

$$\mathcal{A}Z'(t) := \sum_{i=1}^{2} S_i \, Z'(t) \, R_i, \quad \mathcal{B}Z(t) := \sum_{i=1}^{2} \Phi_i \, Z'(t) \, \Psi_i.$$

Позначимо

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{3\times 2}$. У наслідок рівності

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0, \quad P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0,$$

умови (1.17), (1.18) виконано; тут

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добуток

$$\Omega^{+}(t)\Theta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

визначає матрицю

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

для її знаходження використано жорданову форму:

$$\Omega^{+}(t)\Theta(t) = S\,J\,S^{-1};$$

тут

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

крім того

$$X(t) = S\,U(t)\,S^{-1};$$

тут

$$U(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином знаходимо розв'язок

$$W(t,c) = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & t\,c_3 + c_5 + 2t\,c_6 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix}$$

задачі Коші

$$Z(0) = \mathcal{M}^{-1}(c) := \begin{pmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

для однорідної частини диференціально-алгебраїчної системи (A.5). Традиційний оператор Гріна задачі Коші $K[f(s)](t)$ визначає узагальнений оператор Гріна задачі Коші для системи (A.5)

$$\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[Q^+(s)\mathcal{F}(s)\Big](t)\Big\} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin t & 3 + t - 3\cos t - \sin t \\ 1 - \cos t & \sin t \end{pmatrix};$$

тут

$$Q^+(t)\mathcal{F}(t) = (\ 0 \quad \cos t \quad \sin t \quad 0 \quad \sin t \quad \cos t\ )^*.$$

Оскільки $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, то в задачі про побудову 2π-періодичних розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи (A.5) має місце критичний випадок; тут

$$\mathcal{Q} = -2\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{Q}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок

$$W(t,c_r) = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \\ -2c_5 & c_5 \end{pmatrix}, \quad c_r \in \mathbb{R}^5$$

однорідної частини 2π-періодичної матричної задачі для диференціально-алгебраїчної системи (A.5) визначають матриці

$$P_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{Q}_r} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\Omega}(t) \neq 0$:

$$P_{\Omega_\varrho}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

тому розв'язок матричної диференціально-алгебраїчної системи (A.5) залежатиме від довільної функції $\varphi(t) \in \mathbb{C}[0; 2\pi]$; покладемо

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо функцію

$$\mathfrak{F}(t, \varphi(t)) := \Omega^{+}(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \\ \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Оскільки умову (1.21) виконано, розв'язок 2π-періодичної матричної задачі для диференціально-алгебраїчної системи (A.5)

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^5$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}\Big](t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \cos t & \sin t \\ \sin t & 3 - 3\cos t - \sin t \\ \frac{4}{5} - \cos t & -\frac{2}{5} + \sin t \end{pmatrix}.$$

ДОДАТОК Б
Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації у фахових виданнях України і виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз

1. Чуйко С. М. Про наближене розв'язання матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач методом найменших квадратів / С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова, М. В. Дзюба // Нелінійні коливання. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 423—436.

   (Входить до міжнародної наукометричної бази MathSciNet.)

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження умов існування, а також конструкції найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

2. Чуйко С. М. Метод найменших квадратів у теорії матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач / С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова, М. В. Дзюба // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 2. — С. 280—292.

   Переклад:
   Chuiko S. M. Least-squares method in the theory of matrix differential-algebraic boundary-value problems / S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova, M. V. Dzyuba // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — V. 70, N 2. — P. 319—333.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Zentralblatt MATH.)

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження умов існування і конструкції найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

3. Чуйко С. М. Матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача с импульсным воздействием / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба //

Нелінійні коливання. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 564—573.

Переклад:

Chuiko S. M. Matrix differential-algebraic boundary-value problem with pulsed action / S. M. Chuiko, M. V. Dzyuba // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — V. 238, N 3. — P. 333—343.

(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH.)

4. Дзюба М. В. Про наближене розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті методом найменших квадратів / М. В. Дзюба // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. — 2017. — Т. 31. — С. 46—53.

5. Чуйко С. М. Регуляризація матричної крайової задачі за допомогою збурення крайової умови / С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, М. В. Дзюба // Буковинський математичний журнал. — 2016. — Т. 4, № 1—2. — С. 145—151.

   (Входить до міжнародної наукометричної бази Zentralblatt MATH.)

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження конструктивних умов регуляризації матричної крайової задачі за допомогою збурення крайової умови.

6. Чуйко С. М. Регуляризация линейной нетеровой краевой задачи при помощи импульсного воздействия типа "interface conditions"/ С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, М. В. Дзюба // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2016. — Т. 30. — С. 143—154.

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження для лінійних нетерових крайових задач достатніх умов регуляризації за допомогою імпульсного впливу типу "interface conditions".

7. Чуйко С. М. Про регуляризацію матричного рівняння Сильвестра / С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, М. В. Дзюба // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2015. — Т. 29. — С. 147—156.

Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження для матричного рівняння Сильвестра достатніх умов та схеми регуляризації.

Наукові праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

8. Chuiko S. About an approximate solution of matrix differential-algebraic boundary-value problems with a least-squares method / S. Chuiko, O. Nesmelova, M. Dzuba // Differential equations and control theory, 25–27 September 2018 : Book of Abstracts. — Kharkiv, 2018. — P. 18.

9. Чуйко С. Матрична імпульсна диференціально-алгебраїчна крайова задача / С. Чуйко, М. Дзюба // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях, 17–19 вересня 2018 р. : матеріали міжнар. наук. конф. — Чернівці, 2018. — С. 113.

10. Чуйко С. М. Матричная импульсная дифференциально-алгебраическая краевая задача / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова, 11–16 июня 2018 г. : тезисы докл. — Одесса, 2018. — С. 84.

11. Чуйко С. М. Матрична імпульсна диференціально-алгебраїчна крайова задача / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, 7–10 червня 2017 р. : тези доп. — Київ, 2017. — С. 109.

12. Чуйко С. М. Матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсним впливом / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Теорія наближення функцій та її застосування, 28 травня–3 червня 2017 р. : тези доп. міжнар. конф. — Слов'янськ, 2017. — С. 95.

13. Chuiko S. M. On a regularization method for solving matrix Sylvester equation / S. M. Chuiko, M. V. Dzuba // Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation, 24–26 May 2017 : Abstracts of XVIII Intern. Conf. Reports. — Kyiv, 2017. — P. 24.

14. Чуйко О. Про регуляризацію матричної крайової задачі збуренням крайової умови / О. Чуйко, М. Дзюба // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування, 28–30 вересня 2016 р. : матеріали міжнар. конф. — Чернівці, 2016. — С. 99.

15. Chuiko S. M. On regularization method for solving linear matrix Sylvester equation / S. M. Chuiko, M. V. Dzuba // International Conference on Differential Equations, dedicated to the 110-th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, 20–24 September 2016 : Book of Abstracts. — Lviv, 2016. — P. 39.

16. Чуйко С. М. Регуляризация матричного уравнения Сильвестра / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // XI Міжнародна математична літня школа «Алгебра, топологія, аналіз», 1–14 серпня 2016 р. : тези доп. — Одеса, 2016. — С. 142.

Особистий внесок здобувача. У спільних роботах із науковим керівником С. М. Чуйком, а також з О. В. Чуйко, О. С. Чуйком та О. В. Нєсмєловою автору дисертації належать результати, які полягають у знаходженні необхідних і достатніх умов існування розв'язків та регуляризації матричних крайових задач для диференціально-алгебраїчних рівнянь. Співавторам належить участь у постановці задач, консультації з вибору методології дослідження, обговорення отриманих результатів та висновків.