

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Баранець Віталія Олександрівна

УДК 532.5, 517.956.35

ДИСЕРТАЦІЯ

«ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ СУСПЕНЗІЙ ЧАСТИНОК, ЩО АГРЕГУЮТЬ»

Спеціальність 01.02.05 – «Механіка рідини, газу та плазми»
(Фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ В. О. Баранець

Науковий керівник: Кізілова Наталія Миколаївна,
доктор фізико-математичних наук, професор.

Харків – 2021

АНОТАЦІЯ

Баранець В.О. Задачі механіки суспензій частинок, що агрегують. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми (Фізико-математичні науки). – Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2021.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, визначено наукову новизну та наведено зв'язок дисертаційної роботи з науковими темами і програмами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Наведено відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду наукових праць та їх аналізу. Описано історію дослідження проблематики та наведено основні результати, отримані у даній області за останній час.

У розділі детально описано механізми агрегації різних суспензій, серед яких технічні і біологічні рідини, мікро- і нанорідини. Велику увагу приділено континуальним аналогам модифікованих рівнянь Смолуховського, в яких описується механізм утворення агрегатів внаслідок розпаду великих утворень і обмінних взаємодій:

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k+p-1} L(k, p) n_k n_p - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k-1} L(k-p, p) n_{k-p} n_p$$

$$\frac{dn_k}{dt} = \sum_{p,m=1}^{\infty} M(k+p, m, k) n_{k+p} n_m - \sum_{\substack{p,m=1 \\ m < p}}^{\infty} M(k, p, k+m) n_k n_{k+m}$$

відповідно, де $L(k, p)$ – ймовірність розпаду агрегату з $k+p$ частинок на два агрегати, що складаються з k і p частинок, $M(k+p, m, k)$ – ймовірність злиття агрегатів з $k+p$ і m частинок з подальшим відщепленням агрегату з k частинок.

Наведено математичні моделі, які використовуються при описі процесів агрегації. Зокрема, представлено моделі крові з урахуванням агрегації еритроцитів у вертикальних і похилих трубках. Наведено огляд дискретних моделей агрегації мікро- та наночастинок з урахуванням парних сил взаємодії, а також зовнішніх об'ємних і масових сил, які діють зі сторони рідини.

Другий розділ присвячений дослідженню квазілінійних моделей осідання частинок дво- та трифазної суспензії, що агрегують, у вертикальних трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил.

У **підрозділі 2.3** розглянуто трифазну модель суспензії, що складається із базової рідини (фаза 1), частинок (фаза 2) і рідини, захопленої в агрегатах (фаза 3). Основна система квазілінійних рівнянь відносно об'ємної концентрації агрегатів H , істинної об'ємної концентрації частинок C , а також середнього об'єму агрегату $w = C / N$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u^2 \frac{\partial w}{\partial x} &= \varphi \frac{w^2}{C}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \gamma_{11} \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_{12} \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_{13} \frac{\partial w}{\partial x} &= \theta + k_1 (1 - H), \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \gamma_{21} \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_{22} \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_{23} \frac{\partial w}{\partial x} &= -k_2 C, \\ \gamma_{11} &= u^1 - (1 - H) \frac{\partial u^1}{\partial H}, \quad \gamma_{12} = -(1 - H) \frac{\partial u^1}{\partial C}, \quad \gamma_{13} = -(1 - H) \frac{\partial u^1}{\partial w}, \\ \gamma_{21} &= C \frac{\partial u^2}{\partial H}, \quad \gamma_{22} = u^2 + C \frac{\partial u^2}{\partial C}, \quad \gamma_{23} = C \frac{\partial u^2}{\partial w}, \quad k_{1,2} = \frac{\partial u^{1,2}}{\partial x}. \end{aligned}$$

де φ – швидкість утворення агрегатів, u^1, u^2 – швидкості фаз, $\theta = \theta^3 / \rho_f$, θ^3 – швидкість захоплення рідини в агрегаті.

Початкові і граничні умови задачі мають вигляд:

$$t = 0: \quad H(0, x) = H_0, \quad C(0, x) = C_0, \quad w(0, x) = w_0$$

$$x = L, t \geq 0: \quad u^{1,2}(t, L) = 0.$$

Дана система гіперболічна, тому для її аналізу і пошуку розв'язку використовувався метод характеристик. Рівняння характеристик та умови на них отримано у вигляді:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 &= u_s + u_f, \\
\left(\frac{dx}{dt}\right)_{2,3} &= u_s + u_f + \frac{1}{2} A \left(1 \pm \sqrt{1 - B / A^2}\right); \\
\left(\frac{dw}{dt}\right)_1 &= \varphi \frac{w^2}{C}, \\
\frac{1}{2} \left[A_1 (1 \pm \sqrt{1 - B / A^2}) - A_2 (1 \mp \sqrt{1 - B / A^2}) \right] &\left[\left(\frac{dH}{dt}\right)_{2,3} - \theta - (1 - H) k_1 \right] + \\
+ \gamma_{12} \left(C k_2 + \left(\frac{dC}{dt}\right)_{2,3} \right) &= 0,
\end{aligned}$$

де $u_s = (1 - H)^2 C (\rho_s - \rho_f) 4\pi^2 v^2 (x + a) / F$, $u_f = (H - C)^2 C (\rho_s - \rho_f) 4\pi^2 v^2 (x + a) / D$,

$$A_1 = H \frac{\partial u_s}{\partial H} - (1 - H) \frac{\partial u_f}{\partial H}, \quad A_2 = C \frac{\partial u_s}{\partial C} + \frac{\partial u_f}{\partial C}, \quad A = A_1 + A_2, \quad B = 4C \left(\frac{\partial u_s}{\partial H} \frac{\partial u_f}{\partial C} - \frac{\partial u_s}{\partial C} \frac{\partial u_f}{\partial H} \right),$$

$$k_1 = \partial u^1 / \partial x, \quad k_2 = \partial u^2 / \partial x.$$

Дана гіперболічна задача є нестандартною з границями, що рухаються.

Характеристика першого сімейства відокремлює зону чистої рідини від зони частинок, що осідають, та рухається зі швидкістю u^2 . Умови на сильному розриві, який розділяє зону частинок, що ущільнюються, від компактної зони, мають вигляд:

$$\begin{aligned}
w_{III} &= w_{IV}, \quad (1 - H_{IV}) Z_{III-IV} = (1 - H_{III}) (Z_{III-IV} - u_{III}^1) \\
Z_{III-IV} C_{IV} &= (Z_{III-IV} - u_{III}^2) C_{III},
\end{aligned}$$

де Z_{III-IV} – швидкість розповсюдження розриву.

Еволюційність цього розриву перевірялась умовою:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_3 < Z_{III-IV} < \left(\frac{dx}{dt}\right)_2$$

У підрозділі 2.3.3 проведено чисельний розв’язок задачі та розрахунки при варіації параметрів моделі відповідно до фізіологічних даних. Досліджені можливі картини розподілу зон і, відповідно, динаміки осідання. Аналізуючи співвідношення для характеристичних швидкостей та швидкості переміщення поверхні розриву, досліджено еволюційність (стійкість) сильних розривів. Результати методу характеристик були підтверджені чисельними розрахунками методом динаміки частинок. Методами теорії

розмірностей отримані набори виразів для різних швидкостей агрегації. На основі даної моделі проведено пояснення виникнення розмитої границі між чистою рідиною та частинками, що осідають.

У **третьому розділі** досліджено квазілінійні моделі осідання частинок дво- та трифазної суспензії, що агрегують, у похилих трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил. Розглянуто стаціонарне осідання частинок у вузькому каналі шириною R і довжиною L ($R/L \ll 1$), нахиленому під кутом θ .

У **підрозділі 3.1** розглянуто систему рівнянь для двофазної суспензії частинок, що агрегують:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Nu_x^1 + \frac{\partial}{\partial y} Nu_y^1 = \varphi,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Hu_x^1 + \frac{\partial}{\partial y} Hu_y^1 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [Hu_x^1 + (1-H)u_x^2] + \frac{\partial}{\partial y} [Hu_y^1 + (1-H)u_y^2] = 0,$$

$$H \frac{\partial p}{\partial y} = -F(u_y^1 - u_y^2) + H \rho_s G \cos(\theta),$$

$$(1-H) \frac{\partial p}{\partial y} = F(u_y^1 - u_y^2) + (1-H) \rho_f G \cos(\theta),$$

$$H \frac{\partial p}{\partial x} = -F(u_x^1 - u_x^2) + H \rho_s G \sin(\theta),$$

$$(1-H) \frac{\partial p}{\partial x} = F(u_x^1 - u_x^2) + (1-H) \rho_f G \sin(\theta),$$

де (u_x^1, u_y^1) і (u_x^2, u_y^2) – складові векторів швидкості для частинок (фаза 1) і рідини (фаза 2), ρ_s, ρ_f – густини твердих і рідких матеріалів, p – гідростатичний тиск, H і N – об’ємна і числова концентрації частинок, F – феноменологічний коефіцієнт для сил в’язкого опору, що діють на частинку зі сторони в’язкої рідини, φ – швидкість агрегації, G – масова сила ($G = ng$, де n – коефіцієнт збільшення у випадку осідання в центрифугі).

Для отримання розв’язку систему було спрощено шляхом усереднення рівнянь по поперечній координаті x :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{x_s} \int_0^{x_s} f dx.$$

В результаті в безрозмірних змінних:

$$Y = \frac{y}{L}, \quad T = \frac{t}{T^*}, \quad T^* = \frac{L}{u_0}, \quad u_0 = \frac{ng\delta\rho w_0^{2/3}}{\mu_f}, \quad W = \frac{w}{w_0}, \quad U_y^1 = \frac{u_y^1}{u_0}, \quad K = \frac{kL}{u_0 w_0}$$

отримано квазілінійну систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial T} + U_y^1 \frac{\partial W}{\partial Y} &= KH\Delta, \\ \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial Y} H U_y^1 &= -\frac{H(1-H)^{4.5} W^{2/3} \sin(\theta)}{L x_s}, \\ U_y^1(H, W, Y) &= -(1-H)^{4.5} W^{2/3} \cos(\theta). \end{aligned}$$

з початковими та граничними умовами:

$$C(0, Y) = C_0, \quad W(0, Y) = 1, \quad U_y^1(T, L) = 0.$$

Система гіперболічна та має два різних дійсних корені.

Рівняння сімейств характеристик мають вигляд:

$$(I) \quad \frac{dY}{dT} = (1-H)^{4.5} W^{2/3} \cos(\theta),$$

$$(II) \quad \frac{dY}{dT} = -A(5.5H-1) \cos(\theta),$$

де $A = (1-H)^{3.5} W^{2/3}$.

Умови на характеристиках:

$$(I) \quad \frac{dW}{dT} = -KH\Delta,$$

$$(II) \quad \frac{2}{W} \left(\frac{dW}{dT} - KC\Delta \right) = \frac{13.5}{1-H} \left(\frac{dH}{dT} + H(1-H)^{4.5} \cos(\theta) \right) + \frac{H(1-H) A \sin(\theta)}{L}.$$

У підрозділі 3.2 проведено аналогічні розрахунки і для більш ускладненої моделі трифазної суспензії частинок, що агрегують, яка враховує захоплення частини рідини всередині агрегатів.

У підрозділі 3.3 за допомогою чисельних розрахунків виявлено, що збільшення початкової концентрації частинок, їх швидкості агрегації, зовнішньої рівномірної сили і кута нахилу прискорюють осідання, а будь-яке зростання в'язкості рідини сповільнює його, що є фізично доречним. Так чи

інакше, поведінка прискорення різна. При невеликому збільшенні кута нахилу осідання прискорюється, а при деяких критичних кутах починає сповільнюватися внаслідок вищого зсувного опору в дуже в'язкій масі компактно розташованих агрегатів. На основі отриманих результатів запропоновано новий метод оцінки стійкості суспензії.

У **четвертому розділі** розглянуто течії мікро- і нанорідин та їх властивості. Оскільки класична динаміка рідини, розроблена для макроскопічних систем, не повністю застосовна до суспензій мікро/наночастинок, запропоновано за граничні умови брати умови прослизання на стінці першого (для мікрорідин):

$$\left(u - u_w - \frac{2 - \sigma}{\sigma} Kn \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0,$$

і другого (для нанорідин) порядків:

$$\left(u - u_w - \frac{2 - \sigma}{\sigma} Kn \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{Kn}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0,$$

де u_w – швидкість стінки, $Kn = \lambda / L$ – число Кнудсена, λ – довжина вільного пробігу, L – характерна довжина, σ – безрозмірний імпульс, якого набуває частинка при зіткненні зі стінкою, n – нормаль до поверхні.

У **підрозділі 4.4** отримано розв'язок задачі про тришарову ламінарну течію мікро- та нанорідин між рухомими пластинами. Три незмішувані рідини з різними в'язкостями $\mu_{1,2,3}$ між двома паралельними пластинами рухаються зі швидкостями U_1 і $U_2 > U_1$ (течія Куетта). В результаті отримано швидкості кожного шару в безрозмірній формі:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\Delta_c} [\gamma_3 + \gamma_2 - \gamma_1 + \eta_2(u-1)Y], \\ V_2 &= \frac{1}{\Delta_c} [\gamma_3 + \gamma_2 u - \gamma_1 u + \eta_1(u-1)Y], \\ V_3 &= \frac{1}{\Delta_c} [\gamma_3 + \gamma_2 u - \gamma_1 + \eta_1 \eta_2(u-1)Y], \end{aligned}$$

де $V_{1,2,3}=u^{(1,2,3)}/U_1$, $Y=y/h$ – безрозмірні координати,
 $\Delta_c=l_1\eta_2(1-\eta_1)-l_2\eta_1(1-\eta_2)+\eta_1+(a_1\eta_2-a_2\eta_1)Kn$, $l_{1,2}=h_{1,2}/h$, $\eta_{1,2}=\mu_{1,2}/\mu_3$, $a_{1,2}=\alpha_{1,2}/h$,
 $u=U_2/U_1>1$, $\gamma_1=\eta_1l_2(1-\eta_2)$, $\gamma_2=\eta_2l_1(1-\eta_1)$, $\gamma_3=\eta_1(1-a_2Kn)+u\eta_2a_1$.

Також знайдено вираз для безрозмірної об'ємної витрати $q=Q/(U_1h)$. В роботі проводяться чисельні розрахунки профілю швидкості й об'ємної витрати рідини при значеннях параметрів, які відповідають різним технічним і біологічним суспензіям мікро/наночастинок.

У **підрозділі 4.5** отримано розв'язок задачі про тришарову течію мікро/нанорідин між двома коаксіальними циліндрами, що обертаються з різною частотою. Між циліндрами знаходяться три шари нестисливої рідини, різними за вмістом мікро/наночастинок, товщинами h_1, h_2, h_3 , і в'язкостями $\mu_{1,2,3}$. Розв'язок неоднорідної задачі розшукувався у вигляді:

$$v^j(r) = C_{j1}r + C_{j2}\frac{1}{r},$$

де C_{j1}, C_{j2} – константи:

$$\begin{aligned} C_{21} &= \frac{1}{\Delta} (B_1\Delta_{23}^- - B_2\Delta_{21}^-), \quad C_{22} = \frac{1}{\Delta} (B_2\Delta_{21}^+ - B_1\Delta_{23}^-), \quad C_{11} = \mu_{21}^+ C_{21} + \frac{\mu_{21}^-}{2(R_1^+)^2} C_{22}, \quad C_{12} = \frac{\mu_{21}^-}{2(R_1^+)^2} C_{21} + \mu_{21}^+ C_{22}, \\ C_{31} &= \mu_{23}^+ C_{21} + \frac{\mu_{23}^-}{2(R_2^+)^2} C_{22}, \quad C_{32} = \frac{\mu_{23}^-}{2(R_2^+)^2} C_{21} + \mu_{23}^+ C_{22}, \quad \Delta_{21}^+ = \mu_{21}^+ + \frac{A_1\mu_{21}^-(R_1^+)^2}{R_1^-R_1^3}, \quad \Delta_{21}^- = \frac{\mu_{21}^-}{2(R_1^+)^2} + \frac{A_1\mu_{21}^+}{R_1^-R_1^3}, \\ \Delta_{23}^+ &= \mu_{23}^+ + \frac{A_2\mu_{23}^-(R_2^+)^2}{R_2^-R_2^3}, \quad \Delta_{23}^- = \frac{\mu_{23}^-}{2(R_2^+)^2} + \frac{A_2\mu_{23}^+}{R_2^-R_2^3}, \quad \Delta = \Delta_{21}^+\Delta_{23}^- - \Delta_{23}^+\Delta_{21}^-, \quad B_1 = \frac{\Omega_1R_1}{R_1^-}, \quad B_2 = \frac{\Omega_2R_2}{R_2^-}, \\ \mu_{21}^\pm &= (1 \pm \mu_2 / \mu_1) / 2, \quad \mu_{23}^\pm = (1 \pm \mu_2 / \mu_3) / 2, \quad R_{1,2}^- = R_{1,2} - \alpha_{1,2}, \quad R_1^+ = R_1 + h_1, \quad R_2^+ = R_1^+ + h_2. \end{aligned}$$

Чисельні розрахунки залежностей $v^{1-3}(r)$ показали, що через велику кількість параметрів, динамічна поведінка системи стає складною і немонотонною. Спостерігаються лінійний, гіперболічний та змішані профілі поля швидкостей, а вплив коефіцієнтів прослизання може викликати зміни монотонності, градієнту швидкості і тертя на стінках.

П'ятий розділ присвячено вивченню експериментальної частини дисертаційної роботи. Перш за все, розглядаються основні наявні методи діагностики швидкості осідання еритроцитів (ШОЕ), до яких належить і метод Панченкова та його модифікації.

Власні експериментальні дослідження проводились на базі лабораторії алергології Державної установи «Інститут дерматології та венерології Національної академії наук України». Використовувались зразки венозної крові пацієнтів, які звертались в лабораторію для проведення тесту на алергію до призначених їм лікарем препаратів. В результаті дослідження були отримані седиментаційні криві $h(t)$ для всіх зразків. Стандартний показник ШОЕ визначався через 1 годину після початку осідання.

У **підрозділі 5.3** описано результати експериментальних досліджень. Показано, що додавання алергену до зразка крові впливає на швидкість осідання еритроцитів шляхом деякого прискорення або уповільнення швидкості. Виявлено, що час досягнення максимальної швидкості осідання $t_{\max}$ є надійним діагностичним показником, який майже не залежить від початкової концентрації еритроцитів, в'язкості плазми і умов проведення тесту, а отже може використовуватись в медичній практиці.

Окрема група експериментів була присвячена дослідженню осідання еритроцитів у мікротрубках. Результати досліджень показали, що процеси осідання у капілярах Панченкова і мікрокапілярах однакові для крові однієї і тієї ж людини, однак різниця між контрольним зразком і з алергенами виявилася чіткішою у мікротрубках. При цьому максимальна швидкість осідання була досягнута набагато раніше, а розсіювання було меншим, ніж у стандартних трубках. Таким чином, при проведенні тесту в мікротрубках діагностична інформація може бути отримана швидше, точніше, і з використанням меншої кількості крові.

Ключові слова: агрегація, седиментація, швидкість осідання, швидкість агрегації, двофазна суспензія, трифазна суспензія, квазілінійна система, метод характеристик, метод динаміки частинок, мікрочастинки,

наночастинки, граничні умови прослизання, течія Куетта, течія Пуазейля, седиментаційні криві.

ABSTRACT

Vitaliia O. Baranets. “Problems of the mechanics of aggregating particles suspensions”. Qualifying scientific work is as a Manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences: Speciality 01.02.05 – mechanics of fluid, gas and plasma (Physical and Mathematical Sciences). – V. N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2021.

In **the introduction** the actuality of studied problem and the connection with the scientific plans, themes and programs are given. The aim, problems and methods of research are formulated. Scientific novelty and significance of obtained results are determined. The information about publications, personal contribution and approbation of results is provided.

The first section is devoted to review and analysis of the literature. A history of the problem and the results obtained in the field of research in recent times are presented.

The mechanisms of aggregation of various suspensions, including technical and biological fluids, micro- and nanofluids are described in this section in detail. Much attention is paid to continuous analogues of modified Smoluchowski equations, which describe the mechanism of aggregate formation by the disintegration of large formations and due to exchange interactions:

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k+p-1} L(k, p) n_k n_p - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k-1} L(k-p, p) n_{k-p} n_p$$

$$\frac{dn_k}{dt} = \sum_{p,m=1}^{\infty} M(k+p, m, k) n_{k+p} n_m - \sum_{\substack{p,m=1 \\ m < p}}^{\infty} M(k, p, k+m) n_k n_{k+m}$$

respectively, where $L(k, p)$ is the probability of the disintegration of the aggregate from $k+p$ particles into two aggregates consisting of k and p particles, $M(k+p, m, k)$

is the probability of integration of the aggregates from $k+p$ and m particles with subsequent cleavage of the aggregate from k particles.

Mathematical models used in describing aggregation processes are presented. In particular, blood models taking into account the aggregation of erythrocytes in vertical and inclined tubes are given. Discrete models of micro- and nanoparticles aggregation taking into account the pair forces of interaction, as well as external bulk and mass forces acting from the fluid are given.

The second section is devoted to study of quasilinear models of the particles of two- and three-phase suspensions that are aggregated and settled in vertical tubes in an inhomogeneous field.

In **subsection 2.3** a model of the three-phase suspension composed of the base fluid (phase 1), particles (phase 2) and fluid captured inside the aggregates (phase 3) is considered. A system of quasilinear equations with respect to mass (C) and volumetric (H) concentrations of aggregates and average volume of aggregate (w) has the form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u^2 \frac{\partial w}{\partial x} &= \varphi \frac{w^2}{C}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \gamma_{11} \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_{12} \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_{13} \frac{\partial w}{\partial x} &= \theta + k_1(1-H), \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \gamma_{21} \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_{22} \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_{23} \frac{\partial w}{\partial x} &= -k_2 C, \\ \gamma_{11} &= u^1 - (1-H) \frac{\partial u^1}{\partial H}, \quad \gamma_{12} = -(1-H) \frac{\partial u^1}{\partial C}, \quad \gamma_{13} = -(1-H) \frac{\partial u^1}{\partial w}, \\ \gamma_{21} &= C \frac{\partial u^2}{\partial H}, \quad \gamma_{22} = u^2 + C \frac{\partial u^2}{\partial C}, \quad \gamma_{23} = C \frac{\partial u^2}{\partial w}, \quad k_{1,2} = \frac{\partial u^{1,2}}{\partial x}. \end{aligned}$$

where φ is the aggregation rate, u^1, u^2 are the rates of phases, $\theta = \theta^3 / \rho_f$, θ^3 is the rate of the fluid capture during the aggregation.

The initial and boundary conditions of the problem are:

$$t = 0: \quad H(0, x) = H_0, \quad C(0, x) = C_0, \quad w(0, x) = w_0$$

$$x = L, t \geq 0: \quad u^{1,2}(t, L) = 0.$$

Here H_0, C_0, w_0 are initial values that are supposed to be constant in the sample.

This system is hyperbolic. Its solution was found by method of characteristics. The system has three families of characteristics:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 &= u_s + u_f, \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{2,3} &= u_s + u_f + \frac{1}{2}A\left(1 \pm \sqrt{1 - B/A^2}\right);\end{aligned}$$

with corresponding conditions:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dw}{dt}\right)_1 &= \varphi \frac{w^2}{C}, \\ \frac{1}{2}\left[A_1(1 \pm \sqrt{1 - B/A^2}) - A_2(1 \mp \sqrt{1 - B/A^2})\right]\left[\left(\frac{dH}{dt}\right)_{2,3} - \theta - (1-H)k_1\right] + \\ + \gamma_{12}\left[Ck_2 + \left(\frac{dC}{dt}\right)_{2,3}\right] &= 0,\end{aligned}$$

where $u_s = (1-H)^2 C(\rho_s - \rho_f)4\pi^2 v^2(x+a)/F$, $u_f = (H-C)^2 C(\rho_s - \rho_f)4\pi^2 v^2(x+a)/D$,

$$A_1 = H \frac{\partial u_s}{\partial H} - (1-H) \frac{\partial u_f}{\partial H}, \quad A_2 = C \frac{\partial u_s}{\partial C} + \frac{\partial u_f}{\partial C}, \quad A = A_1 + A_2, \quad B = 4C \left(\frac{\partial u_s}{\partial H} \frac{\partial u_f}{\partial C} - \frac{\partial u_s}{\partial C} \frac{\partial u_f}{\partial H} \right),$$

$$k_1 = \partial u^1 / \partial x, \quad k_2 = \partial u^2 / \partial x.$$

We have a non-standard hyperbolic problem with moving boundaries. The characteristic of the first family separates a pure fluid zone from a settling particles zone and moves with rate u^2 . Conditions on a strong discontinuity that separates a zone of condensed aggregates from the compact zone are:

$$\begin{aligned}w_{III} &= w_{IV}, \quad (1-H_{IV})Z_{III-IV} = (1-H_{III})(Z_{III-IV} - u_{III}^1) \\ Z_{III-IV}C_{IV} &= (Z_{III-IV} - u_{III}^2)C_{III},\end{aligned}$$

where Z_{III-IV} is the rate of discontinuity distribution.

A condition of evolution of this discontinuity is:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_3 < Z_{III-IV} < \left(\frac{dx}{dt}\right)_2$$

In **subsection 2.3.3** numerical solution of the problem and calculations at parameters variation according to physiological data are carried out. Possible pictures of zone distribution and dynamics of sedimentation are investigated. An evolution (stability) of strong discontinuities by analyzing a relationship for the

characteristic rates and the rate of discontinuity surface moving is investigated. Results of the method of characteristics were confirmed by numerical calculations by the particle dynamics method. Different expressions for aggregation rates are obtained by methods of dimension theory. Based on this model a blurred boundary between pure fluid and settling particles is explained.

In **the third section** quasilinear models of the aggregating particles of two- and three-phase suspensions that are settled in inclined tubes in an inhomogeneous field are investigated. The steady sedimentation of particles in the narrow channel of the width R and the length L ($R/L \ll 1$) inclined at the angle θ is considered.

In **subsection 3.1** the equations of the quasi-steady motion was written in the form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Nu_x^1 + \frac{\partial}{\partial y} Nu_y^1 &= \varphi, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Hu_x^1 + \frac{\partial}{\partial y} Hu_y^1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} [Hu_x^1 + (1-H)u_x^2] + \frac{\partial}{\partial y} [Hu_y^1 + (1-H)u_y^2] &= 0, \\ H \frac{\partial p}{\partial y} &= -F(u_y^1 - u_y^2) + H\rho_s G \cos(\theta), \\ (1-H) \frac{\partial p}{\partial y} &= F(u_y^1 - u_y^2) + (1-H)\rho_f G \cos(\theta), \\ H \frac{\partial p}{\partial x} &= -F(u_x^1 - u_x^2) + H\rho_s G \sin(\theta), \\ (1-H) \frac{\partial p}{\partial x} &= F(u_x^1 - u_x^2) + (1-H)\rho_f G \sin(\theta), \end{aligned}$$

where (u_x^1, u_y^1) and (u_x^2, u_y^2) are components of the velocity vectors for the particles (phase 1) and fluid (phase 2), ρ_s, ρ_f are densities of the solid and fluid materials, p is the hydrostatic pressure, H and N are the mass and numerical concentrations of the particles, F is the phenomenological coefficient for the viscous drag forces acting on the particle from the viscous fluid, φ is the aggregation rate, G is the

mass force ($G = ng$, n is the magnification factor when the sedimentation is carried out in a centrifuge).

To obtain the solution the system was simplified by averaging the equations over transverse coordinate x :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{x_s} \int_0^{x_s} f dx.$$

With the non-dimensional variables

$$Y = \frac{y}{L}, \quad T = \frac{t}{T^*}, \quad T^* = \frac{L}{u_0}, \quad u_0 = \frac{ng\delta\rho w_0^{2/3}}{\mu_f}, \quad W = \frac{w}{w_0}, \quad U_y^1 = \frac{u_y^1}{u_0}, \quad K = \frac{kL}{u_0 w_0}$$

where T^* is the characteristic time, w_0 is the volume of a single particle, the equations for the concentration and volume of the aggregates are the following:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial T} + U_y^1 \frac{\partial W}{\partial Y} &= KH\Delta, \\ \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial Y} H U_y^1 &= -\frac{H(1-H)^{4.5} W^{2/3} \sin(\theta)}{L x_s}, \\ U_y^1(H, W, Y) &= -(1-H)^{4.5} W^{2/3} \cos(\theta). \end{aligned}$$

The boundary conditions for the variables are:

$$H(0, Y) = H_0, \quad W(0, Y) = 1, \quad U_y^1(T, L) = 0.$$

The system is hyperbolic and has two different characteristics values.

The characteristic equations are:

$$(I) \quad \frac{dY}{dT} = (1-H)^{4.5} W^{2/3} \cos(\theta),$$

$$(II) \quad \frac{dY}{dT} = -A(5.5H-1)\cos(\theta).$$

where $A = (1-H)^{3.5} W^{2/3}$.

The conditions at the characteristics are:

$$(I) \quad \frac{dW}{dT} = -KH\Delta,$$

$$(II) \quad \frac{2}{W} \left(\frac{dW}{dT} - KC\Delta \right) = \frac{13.5}{1-H} \left(\frac{dH}{dT} + H(1-H)^{4.5} \cos(\theta) \right) + \frac{H(1-H)A \sin(\theta)}{L}.$$

In **subsection 3.2** similar calculations for a more complex model of blood as a three-phase suspension of aggregating particles which takes into account the fluid captured inside the aggregates were performed.

In **subsection 3.3** numerical calculations shown that increasing the initial concentration of particles, their aggregation rate, external uniform force and angle of inclination accelerate particle sedimentation, and any increase in the viscosity of the fluid slows it down, which is physically appropriate. One way or another, the acceleration behaviour is different. Sedimentation is accelerated by small angles but at the angles exceeded some critical value the settling is decelerated and hampered. That can be explained by the initial faster settling followed by deceleration of sliding of the particles along the inclined wall by the shear drag. Based on the obtained results, a novel method for assessing the suspension stability was proposed.

In **the fourth section** flows of micro- and nanofluids and their properties are considered. Since the classical fluid dynamics developed for macroscopic systems is not fully applicable to suspensions of micro/nanoparticles, it is proposed to use the first order velocity slip boundary conditions (for microfluids):

$$\left(u - u_w - \frac{2 - \sigma}{\sigma} Kn \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

and the second order velocity slip boundary conditions (for nanofluids):

$$\left(u - u_w - \frac{2 - \sigma}{\sigma} Kn \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{Kn}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

where u_w is the wall velocity, $Kn = \lambda / L$ is the Knudsen number, λ is the mean free path, L is the characteristic length, σ is the tangential momentum accommodation factor (or friction), n is the normal to the surface.

In **subsection 4.4** a solution of the problem of laminar flow of three immiscible liquids between two parallel plates is obtained. Three liquids with different viscosities $\mu_{1,2,3}$ between two parallel plates moved with velocities U_1

and $U_2 > U_1$ are considered (Couette flow). As a result, we obtained the velocities of each liquid in non-dimensional form:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\Delta_c} [\gamma_3 + \gamma_2 - \gamma_1 + \eta_2(u-1)Y], \\ V_2 &= \frac{1}{\Delta_c} [\gamma_3 + \gamma_2 u - \gamma_1 u + \eta_1(u-1)Y], \\ V_3 &= \frac{1}{\Delta_c} [\gamma_3 + \gamma_2 u - \gamma_1 + \eta_1 \eta_2(u-1)Y], \end{aligned}$$

where $V_{1,2,3} = u^{(1,2,3)} / U_1$, $Y = y / h$ are dimensionless coordinates,

$$\Delta_c = l_1 \eta_2 (1 - \eta_1) - l_2 \eta_1 (1 - \eta_2) + \eta_1 + (a_1 \eta_2 - a_2 \eta_1) Kn, \quad l_{1,2} = h_{1,2} / h, \quad \eta_{1,2} = \mu_{1,2} / \mu_3, \quad a_{1,2} = \alpha_{1,2} / h, \\ u = U_2 / U_1 > 1, \quad \gamma_1 = \eta_1 l_2 (1 - \eta_2), \quad \gamma_2 = \eta_2 l_1 (1 - \eta_1), \quad \gamma_3 = \eta_1 (1 - a_2 Kn) + u \eta_2 a_1.$$

An expression for the non-dimensional flow rate $q = Q / (U_1 h)$ also was obtained. Numerical calculations of the velocity profile and the flow rate have been carried out at the values of the parameters that correspond to different technical and biological microparticles suspensions.

In **subsection 4.5** a solution of the problem of the laminar flow of three micro/nanofluids layers between two coaxial cylinders rotated at different angular velocities is obtained. The three immiscible fluids with different thicknesses h_1, h_2, h_3 , and viscosities $\mu_{1,2,3}$ are between the cylinders.

The solution of an inhomogeneous problem was found in the form:

$$v^j(r) = C_{j1} r + C_{j2} \frac{1}{r},$$

where C_{j1}, C_{j2} are constants:

$$\begin{aligned} C_{21} &= \frac{1}{\Delta} (B_1 \Delta_{23}^- - B_2 \Delta_{21}^-), \quad C_{22} = \frac{1}{\Delta} (B_2 \Delta_{21}^+ - B_1 \Delta_{23}^-), \quad C_{11} = \mu_{21}^+ C_{21} + \frac{\mu_{21}^-}{2(R_1^+)^2} C_{22}, \quad C_{12} = \frac{\mu_{21}^-}{2(R_1^+)^2} C_{21} + \mu_{21}^+ C_{22}, \\ C_{31} &= \mu_{23}^+ C_{21} + \frac{\mu_{23}^-}{2(R_2^+)^2} C_{22}, \quad C_{32} = \frac{\mu_{23}^-}{2(R_2^+)^2} C_{21} + \mu_{22}^+ C_{22}, \quad \Delta_{21}^+ = \mu_{21}^+ + \frac{A_1 \mu_{21}^- (R_1^+)^2}{R_1^- R_1^3}, \\ \Delta_{21}^- &= \frac{\mu_{21}^-}{2(R_1^+)^2} + \frac{A_1 \mu_{21}^+}{R_1^- R_1^3}, \quad \Delta_{23}^+ = \mu_{23}^+ + \frac{A_2 \mu_{23}^- (R_2^+)^2}{R_2^- R_2^3}, \quad \Delta_{23}^- = \frac{\mu_{23}^-}{2(R_2^+)^2} + \frac{A_2 \mu_{23}^+}{R_2^- R_2^3}, \quad \Delta = \Delta_{21}^+ \Delta_{23}^- - \Delta_{23}^+ \Delta_{21}^-, \quad B_1 = \frac{\Omega_1 R_1}{R_1^-}, \\ B_2 &= \frac{\Omega_2 R_2}{R_2^-}, \quad \mu_{21}^\pm = (1 \pm \mu_2 / \mu_1) / 2, \quad \mu_{23}^\pm = (1 \pm \mu_2 / \mu_3) / 2, \quad R_{1,2}^- = R_{1,2} - \alpha_{1,2}, \quad R_1^+ = R_1 + h_1, \quad R_2^+ = R_1^+ + h_2. \end{aligned}$$

Numerical calculations of dependences $v^{1-3}(r)$ have shown that due to the large number of parameters, the dynamic behaviour of the system becomes complex and non-monotonic. There are linear, hyperbolic and mixed profiles of the velocity field, and the influence of slip coefficients can cause changes in the monotonicity, the velocity gradient and the friction on the walls.

The fifth section is devoted to experimental study. First of all, the main available methods for diagnosing the erythrocyte sedimentation rate (ESR), which include the Panchenkov method and its modifications, are considered.

The experimental study has been carried out in the Allergy Lab of the State Esteblishment “Institute of Dermatology and Venereology of the National Academy of Medical Sciences of Ukraine”. The venous blood samples with small amounts of the drugs prescribed to the patient by his/her doctor were investigated. As a result of the study the sedimentation curves $h(t)$ have been obtained for each tube. The standard ESR value was computed at $t = 1$ h of sedimentation.

Subsection 5.3 describes results of the experimental study. It has been shown that the addition of the potential allergen influences on the sedimentation rate by some acceleration or deceleration of the ESR process. The time to reach the maximum sedimentation rate $t_{\max}$ was shown to be a good diagnostic index, which almost independent of the initial concentration of erythrocyte and blood plasma viscosity, and reflects the RBC aggregation rate only.

When ESR test was carried out in a microcapillary, a smaller amount of blood was needed and the behavior of the ESR curves in the standard and microtubes was similar. The difference between the control sample and the sample affected by potential allergens were more distinct in the microtubes. The maximal velocity was reached in the microtubes well earlier and the dispersion was more noticeable. Thus, the diagnostic information here can be obtained faster, more accurate, and by using a smaller portion of the blood when the microtubes are used.

Key words: aggregation, sedimentation, sedimentation rate, aggregation rate, two-phase suspension, three-phase suspension, quasilinear system, characteristic method, particle dynamics method, microparticles, nanoparticles, slip conditions, Couette flow, Poiseuille flow, sedimentation curves.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці у наукових фахових виданнях України:

1. Кизилова, Н.Н., Черевко, В.А.: Гравитационная седиментация эритроцитов: эксперименты и теоретическая модель. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». **875**, 80–94 (2009)
2. Баранець, В.О., Кізілова, Н.М.: Дослідження течій мікро/нанорідин між двома рухомими циліндрами. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки». **2**, 45–50 (2018)
3. Баранець, В.А., Кизилова, Н.Н.: Дискретное моделирование агрегации и оседания микро- и наночастиц в суспензиях. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». **40**, 4–15 (2018)
4. Baranets, V., Kizilova, N.: Mathematical Modeling of Particle Aggregation and Sedimentation in Inclined Tubes. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». **90**, 42–59 (2019)
5. Баранець, В.А., Кизилова, Н.Н., Дацок, О.М.: Аппаратно-программный комплекс для исследования процессов оседания в технических и биологических суспензиях агрегирующих микро- и наночастиц. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». **42**, 4–11 (2019) *Особистий внесок здобувача: Створення бази даних та написання програмного коду.*

6. **Baranets, V.O.**, Kizilova, N.M.: On hyperbolicity and solution properties of the continual models of micro/nanoparticle aggregation and sedimentation in concentrated suspensions. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки». **4**, 60–63 (2019)

Наукові праці у зарубіжних спеціалізованих виданнях:

7. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Математические модели агрегации биологических макро- и наночастиц. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. **8**, 92–99 (2014)
8. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Моделирование ламинарного течения несмешивающихся суспензий микро- и наночастиц в микроканалах. Механика. Исследования и инновации. **1(9)**, 47–53 (2016)
9. **Баранец, В.А.**, Дацок, О.М., Кизилова, Н.Н.: Математическое моделирование оседания агрегирующих микрочастиц суспензий во внешнем поле сил. Механика. Исследования и инновации. **12(12)**, 5–15 (2019) *Особистий внесок здобувача: Розрахунки та аналіз результатів.*

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації.

Статті в матеріалах конференцій:

10. **Cherevko, V.**, Kizilova, N.: Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions. In: Fesenko O., Yatsenko L. (eds.) Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications, 4th International Conference on Nanotechnology and Nanomaterials, NANO 2016, Lviv, 24– 27August 2016. Springer Proceedings in Physics, vol. 195, pp. 207–228. Springer, Cham (2017) (Scopus).

11. Kizilova, N., Batyuk, L., **Baranets, V.**: Human Red Blood Cell Properties and Sedimentation Rate: a Biomechanical Study. In: Arkusz K., Bedzinski R., Klekiel T., Piszczatowski S. (eds.) Biomechanics in Medicine and Biology, Proceedings of the International Conference of the Polish Society of Biomechanics, BIOMECHANICS 2018, Zielona Gora, Poland, 5–7 September 2018. Springer Series “Advances in Intelligent Systems and Computing”, vol. 831, pp. 3–22. Springer, Cham (2019) (Scopus).
Особистий внесок здобувача: Розв’язок задачі та проведення чисельних розрахунків.
12. Черевко, В.А.: Исследование оседания эритроцитов в трубках разной длины. В: Жолткевич Г. М. (ред.) Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях, Харків, 23–25 травня 2007 р. Сборник материалов международной научной конференции для студентов и аспирантов, сс. 152–155. ХНУ, Харків (2007)
13. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Диагностический анализ кривых оседания эритроцитов: экспериментальные данные и теоретическая модель. В: Жолткевич Г. М. (ред.) Тараповські читання, Харків, 21–25 квітня 2008 р. Збірник матеріалів міжнародної наукової школи-конференції, сс. 142–145. ХНУ, Харків (2008)
14. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Теоретическое и экспериментальное исследование оседания эритроцитов как агрегирующихся частиц в неоднородном поле сил. В: Александров В. М. и др. (ред.) Современные проблемы механики сплошной среды, Ростов-на-Дону, 12–15 октября 2009 г. Труды XIII Международной конференции, том II, сс. 98–102. Изд-во ЮФУ, Ростов-на-Дону (2009)
15. **Cherevko, V.A.**, Kizilova, N.N.: Particle aggregation and sedimentation in non-uniform fields for evaluation the suspension stability. В: Тропіна А. А.

та ін. (ред.) Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки, Харків, 10–25 травня 2013 р. Матеріали Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, pp. 3–6. Екограф, Харків (2013)

16. Kizilova, N., **Cherevko, V.**: Mathematical modeling of particle aggregation and sedimentation in concentrated suspensions. In: Leniowska L., Korzynski M. (eds.) *Mechanika w Medycynie* 12, Rzeszow, Poland, 25–26 wrzesnia 2014 r. XII Miedzynarodowe Seminarium Naukowe “Mechanika w Medycynie”, pp. 43–52. Wyd. Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszow (2014)
17. **Баранец, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Обзор дискретных моделей динамики наночастиц в суспензиях. В: Азаренков М.О. та ін. (ред.) *Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики (МДОЗМФ-2017)*, Харків, 26–27 червня 2017 р. Праці XVIII Міжнародного симпозіуму, сс. 39–42. ХНУ імені В. Н. Каразіна, Харків (2017)

Тези доповідей на наукових конференціях:

18. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Моделирование агрегации и оседания частиц суспензий в трубках в поле гравитационных и центробежных сил. В: Тезисы докладов XV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 25–31 травня 2007 р.
19. Черевко, В.А.: Исследование динамических кривых оседания эритроцитов в трубках разной длины. В: Тези доповідей міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених «Актуальні питання в сучасній медицині», Харків, 26–28 березня 2007 р.

20. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Исследование показателей оседания эритроцитов крови в норме и патологии. В: Тезисы докладов 24 симпозиума по реологии, Карачарово, 3–7 июня 2008 г.
21. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Моделирование оседания эритроцитов крови. В: Тезисы докладов Всероссийской конференции «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение», Новосибирск, 23–28 апреля 2009 г.
22. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Исследование оседания эритроцитов в однородном и неоднородном поле сил: эксперименты и трехфазная модель суспензии агрегирующих частиц. В: Тезисы докладов X Всероссийской конференции «Биомеханика-2010», Саратов, 17–22 мая 2010 г.
23. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Исследование оседания и агрегации эритроцитов с учетом влияния неоднородного поля центробежных сил. В: Тези доповідей IV наукової конференції для студентів і аспірантів «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 14–15 травня 2010 р.
24. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Механизмы агрегации и их влияние на оседание частиц агрегирующих суспензий в неоднородном внешнем поле. В: Тези доповідей міжнародної конференції, присвяченої 50-річчю механіко-математичного факультету, «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 17–22 квітня 2011 р.
25. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Математическое моделирование суспензий агрегирующих частиц. В: Тези доповідей VI наукової конференції для студентів і аспірантів «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 24–26 квітня 2012 р.

26. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Агрегация и оседание эритроцитов крови в условиях гипер- и гипогравитации. В: Тезисы докладов 8-й Всероссийской школы-семинара «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», Ростов-на-Дону, 27–31 мая 2013 г.
27. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Моделирование кинетики агрегации эритроцитов крови. В: Тези доповідей III Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки», Київ, 27–29 серпня 2015 р.
28. **Cherevko, V.**, Kizilova, N.: Second order velocity slip boundary conditions and Fahraeus-Lindqvist effect in nanofluids and microfluids. In: Abstracts of the 7th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems”, Київ, 27–31 травня 2016 р.
29. **Cherevko, V.**, Kizilova, N.: Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids between coaxial tubes. In: Book of abstracts of the 4-th International research and practice conference «Nanotechnology and Nanomaterials NANO-2016», Львів, 24–27 серпня 2016 р.
30. Черевко, В.А.: Течение несмешивающихся нано и микрожидкостей между вращающимися коаксиальными цилиндрами. В: Тези доповідей 5-ї Міжнародної наукової онлайн-конференції «Тараповські читання», Харків, 1–15 березня 2016 р.
31. Batyuk, L.V., Kizilova, N.N., **Baranets, V.A.**: Dielectric properties of micro/nanoparticle suspensions at low and room temperatures: a thermodynamic approach. In: Abstracts book and Conference program of IX International Conference for Professionals and Young Scientists “Low Temperature Physics” dedicated to 100th anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, Харків, 4–8 червня 2018 р. *Особистий внесок здобувача: Розрахунки та аналіз результатів.*

**Наукові праці, які додатково відображають наукові результати
дисертації:**

32. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Математические модели агрегации частиц в биокolloидах и суспензиях. В: Ефименко А. В. (ред.) Ученый, Учитель, Человек. К 85-летию со дня рождения И. Е. Тарапова, сс. 299–320. Новое слово, Харьков, (2011)
33. **Cherevko, V.A.**, Kizilova, N.N.: Particle aggregations and sedimentation in non-uniform fields for evaluation of the suspension stability. В: Тропіна А.А. (ред.) Математичне моделювання в науці та техніці. Збірник наукових праць, **1**, сс. 41–43. Харків, (2014)
34. Kizilova, N.M., **Cherevko, V.O.**: Modeling of red blood cell aggregation during the test on allergy. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки». Спецвипуск, 287–292 (2015)
35. Кізілова, Н.М., **Черевко, В.О.**: Спосіб діагностики медикаментозної та харчової алергії. Україна Патент 57165, 10 лютого 2011

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	29
ВСТУП	31
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД НАУКОВОЇ ЛІТЕРАТУРИ ТА ВИБІР НАПРЯМУ ДОСЛІДЖЕННЯ	40
1.1. Рівняння кінетики агрегації	41
1.2. Механізм агрегації еритроцитів крові	46
1.3. Континуальні моделі крові з урахуванням агрегації еритроцитів	50
1.4. Моделі суспензій частинок, що осідають у похилих трубках	53
1.5. Дискретні моделі динаміки мікро- і наночастинок в суспензіях	57
Висновки до розділу 1	61
РОЗДІЛ 2. ДОСЛІДЖЕННЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ОСІДАННЯ ЧАСТИНОК СУСПЕНЗІЇ, ЩО АГРЕГУЮТЬ, У ВЕРТИКАЛЬНИХ ТРУБКАХ В НЕОДНОРІДНОМУ ПОЛІ СИЛ (ДВО- ТА ТРИФАЗНА МОДЕЛІ)	63
2.1. Дослідження гіперболічних квазілінійних систем	63
2.2. Двофазна модель суспензії частинок, що агрегують, у вертикальних трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил	70
2.2.1. Постановка задачі	70
2.2.2. Аналіз властивостей системи та її розв'язків	74
2.3. Трифазна модель суспензії частинок, що агрегують, у вертикальних трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил	76
2.3.1. Постановка задачі	78
2.3.2. Аналіз властивостей системи та її розв'язків	81
2.3.3. Чисельний розв'язок задачі та аналіз результатів	86

2.4.	Дослідження процесів агрегації та осідання методом динаміки частинок	93
	Висновки до розділу 2	97
РОЗДІЛ 3.	ДОСЛІДЖЕННЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ОСІДАННЯ ЧАСТИНОК СУСПЕНЗІЇ, ЩО АГРЕГУЮТЬ, У ПОХИЛИХ ТРУБКАХ В НЕОДНОРІДНОМУ ПОЛІ СИЛ (ДВО- ТА ТРИФАЗНА МОДЕЛІ)	99
3.1.	Двофазна модель суспензії частинок, що агрегують, у похилих трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил	99
3.1.1.	Постановка задачі	99
3.1.2.	Одновимірне наближення для малих кутів нахилу	101
3.1.3.	Двовимірна постановка для довільних кутів нахилу	105
3.2.	Трифазна модель суспензії частинок, що агрегують, у похилих трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил	106
3.2.1.	Постановка задачі	106
3.2.2.	Одновимірне наближення для малих кутів нахилу	107
3.3.	Аналіз чисельних результатів	111
	Висновки до розділу 3	114
РОЗДІЛ 4.	ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕЧІЙ МІКРО- ТА НАНОРІДИН	116
4.1.	Аналіз особливостей течій мікро- та нанорідин	117
4.2.	Граничні умови прослизання на стінці 1-го і 2-го порядку	119
4.3.	Аналітичні розв'язки для класичних ламінарних течій Пуазейля і Куєтта з урахуванням граничних умов прослизання 2-го порядку	125
4.4.	Тришарова ламінарна течія незмішуваних мікро/нанорідин між рухомими пластинами	135
4.4.1.	Постановка і розв'язок задачі	135
4.4.2.	Чисельні розрахунки та аналіз результатів	137
4.5.	Тришарова течія мікро/нанорідин між двома	

коаксіальними циліндрами, що обертаються з різною кутовою швидкістю	141
4.5.1. Постановка і розв’язок задачі	141
4.5.2. Чисельні розрахунки та аналіз результатів	143
Висновки до розділу 4	146
РОЗДІЛ 5. ДОСЛІДЖЕННЯ СЕДИМЕНТАЦІЇ МІКРОЧАСТИНОК В СТАНДАРТНИХ І МІКРОКАПІЛЯРАХ	149
5.1. Аналіз основних методів проведення тесту ШОЕ та його модифікацій	149
5.2. Проведення тесту ШОЕ на виявлення алергії	152
5.3. Аналіз результатів проведених експериментів	155
Висновки до розділу 5	158
ВИСНОВКИ	160
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	163
ДОДАТКИ	182

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

В роботі використовуються наступні умовні позначення:

φ – швидкість утворення агрегатів;

H – об’ємна концентрація агрегатів;

C – масова концентрація частинок в агрегатах (без врахування захопленої рідини);

N – числова концентрація агрегатів;

u^α – швидкості руху фаз ($\alpha = 1,2,3$);

p^α – гідростатичні тиски ($\alpha = 1,2,3$);

θ^α – швидкості міжфазового масообміну;

R^α – об’ємні сили міжфазової взаємодії;

ρ^α – ефективні густини ($\alpha = 1,2,3$);

ρ_s, ρ_f – істинні густини частинок і рідини;

F – коефіцієнт Стоксового опору агрегату, що рухається в рідині;

D – коефіцієнт, який описує проникність пористого каркаса осілих агрегатів;

$G(x)$ – поле відцентрових сил;

w – середній об’єм агрегату;

L – довжина трубки;

R – радіус трубки;

d – діаметр трубки;

Kn – число Кнудсена;

u_w – швидкість стінки;

$\mu_{1,2,3}$ – в'язкості рідин;

$U_{1,2}$ – швидкості руху пластин;

$\Omega_{1,2}$ – кутові швидкості обертання циліндрів;

$t_{\max}$ – час досягнення максимальної швидкості осідання;

ШОЕ – швидкість осідання еритроцитів.

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження.

В останній час активно розвивається дослідження моделей агрегації макро- та наночастинок в біологічних і технічних суспензіях [24], [37], [52], [112]. Агрегація частинок відбувається в різних дисперсних системах та описує процес утворення агрегатів внаслідок їх зближення і зіткнення. Вона призводить до зміни в'язкості, тепло- і електропровідності рідини, її оптичних властивостей, тому теоретичне і експериментальне дослідження процесів агрегатоутворення і пов'язаних з ним змін реології має велике значення для цілей медичної діагностики, управління мікробіологічними реакторами, очищення води, оцінки ступеня «старіння» суспензій та ін. Поряд з дискретними моделями, що описують суспензії частинок, є їх континуальні аналоги, які дозволяють розглядати властивості рідин як в'язкопружних суцільних середовищ. Крім того, у зв'язку з великим інтересом до кінетичних процесів і фізичних властивостей суспензій широко використовуються методи молекулярної динаміки [51], [62].

До біологічних рідин відноситься і кров, яка є суспензією еритроцитів. Однією з властивостей, притаманних даним частинкам, є їх склеювання між собою з подальшим утворенням агрегатів. Швидкість агрегації еритроцитів є важливим діагностичним показником, по якому можна оцінювати стан здоров'я людини [133], [137].

Дослідженням суспензій займалися відомі вчені, серед яких Б. Я. Кантор та Є. Я. Хруслов. Великий вклад у вивчення суспензій частинок крові внесли І. Т. Селєзов, І. Я. Сігал, Є. Ю. Таран. Значний внесок у дослідження реології крові зробили С. А. Регієр, В. А. Левтов та Н. Х. Шадріна. Так, С. А. Регієр у своїх роботах [151], [152], [167], [168] побудував континуальну модель крові з урахуванням неоднорідності її структури внаслідок утворення і руйнування агрегатів.

Пізніше задачу для крові як трифазної суспензії частинок, що агрегують, розглядав Є. С. Лосєв [153], [154], [155]. Він отримав рівняння трьох сімейств характеристик та умови на них у випадку однорідного поля сил. Н. М. Кізілова вивчала агрегацію та осідання еритроцитів при наявності зовнішнього магнітного поля [139], [140], [142]. На відміну від існуючих моделей, в даній роботі досліджується квазілінійна модель осідання частинок суспензії, що агрегують, в неоднорідному полі зовнішніх сил, де розв'язок знаходиться в області, яка має дві рухомі границі з різними крайовими умовами на них. Однією з основних є проблема еволюційності (стійкості) сильних розривів, що виникають. Розв'язання цієї проблеми пов'язано з аналізом співвідношень для характеристичних швидкостей і швидкості переміщення поверхні розриву. Також на основі даної моделі доречним є проведення експериментальних досліджень та зіставлення їх результатів з теорією в цілях використання у медичній діагностиці, зокрема для виявлення алергії та медичні препарати та продукти харчування.

Окрім осідання у вертикальних трубках, великий інтерес представляє дослідження агрегації та осідання частинок в похилих трубках у зв'язку з ефектом Бойкотта та його численними застосуваннями [1], [90], [116], [120]. В даній роботі проводиться узагальнення ефекту Бойкотта на випадок концентрованих суспензій частинок, що агрегують. Актуальною є задача дослідження залежності швидкості осідання від кута нахилу трубки, а також пошук нового методу оцінки суспензійної стійкості на основі отриманих результатів.

Ще однією областю теоретичних та експериментальних досліджень, яка активно розвивається протягом останнього десятиріччя, є нанонауки і нанотехнології, що пов'язано з розробкою нових матеріалів з унікальними фізико-хімічними властивостями, створенням штучних клітин і тканин, лікуванням хвороб на клітинному рівні, нанооптики та інших перспективних нанобіотехнологій [17], [39], [48], [54], [55]. Мікро- та нанофлюїдика займаються створенням та дослідженням течій мікро- та нанорідин, які є

розбавленими суспензіями мікро- та наночастинок відповідно. Мікрорідинами є розчини і розплави полімерів, суспензії бактеріальних та інших клітин і мікроорганізмів. Частіше за все досліджуються суспензії природних і штучних наночастинок, які мають унікальні термомеханічні, електричні і магнітні властивості. В багатьох роботах показано невідповідність теоретичних розрахунків, проведених на основі класичних моделей механіки суспензій, серед яких [54], [78], [84], [105]. Основна причина розбіжностей пов'язана з наявністю дифузного розсіювання частинок мікро- і нанорідин на стінках каналів, розміри шорсткостей поверхні яких не є малими у порівнянні з розмірами частинок та довжиною їх вільного пробігу в базовій рідині. Тому особливості руху мікро- та нанорідин та ступінь їх невідповідності класичній теорії становлять значний теоретичний та практичний інтерес. Актуальним є питання дослідження ламінарних течій частинок суспензій в мікро- та нанотрубках, які використовуються у різних мікроелектромеханічних системах для проведення медичної діагностики, очищення мікрооб'ємів рідин або високооднорідного змішування різних рідин.

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження квазілінійних моделей осідання частинок суспензії, що агрегують, у вертикальних та похилих трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил; отримання аналітичних розв'язків задач про тришарову ламінарну течію незмішуваних мікро- та нанорідин між рухомими пластинами та коаксіальними циліндрами, що обертаються з різною кутовою швидкістю.

Об'єкт дослідження – дво- та трифазна моделі суспензії частинок, що агрегують; біологічні рідини, насамперед кров; мікро- і нанорідини.

Предметом дослідження дисертаційної роботи служать властивості суспензії частинок, що агрегують у прямих та похилих трубках; властивості квазілінійних рівнянь та еволюційності; властивості ламінарних течій мікро- та нанорідин з урахуванням умов прослизання першого та другого порядку.

Задачі дослідження:

- дослідити квазілінійні системи двох та трьох диференціальних рівнянь гіперболічного типу, які описують осідання частинок суспензії, що агрегують, у вертикальних трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил;
- дослідити умови існування різних типів розв'язків задачі про осідання частинок трифазної суспензії у вертикальних трубках та провести аналіз еволюційності (стійкості) сильних розривів;
- дослідити квазілінійні системи двох та трьох диференціальних рівнянь гіперболічного типу, які описують осідання частинок суспензії, що агрегують, у похилих трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил; встановити зв'язок між кутом нахилу трубки та швидкістю осідання;
- отримати розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса для ламінарних течій суспензій мікро/наночастинок між паралельними пластинами та коаксіальними циліндрами, що обертаються, з урахуванням граничних умов прослизання першого та другого порядку на шорстких поверхнях;
- отримати розв'язок задачі про тришарову ламінарну течію незмішуваних мікро- та нанорідин між рухомими пластинами; отримати розв'язок задачі про тришарову ламінарну течію незмішуваних мікро- та нанорідин між двома коаксіальними циліндрами, що обертаються з різною кутовою швидкістю;
- проаналізувати експериментальні дані та порівняти з теоретичними результатами, отриманими на основі математичних моделей осідання дво- та трифазних суспензій частинок, що агрегують;
- дослідити і обґрунтувати показник $t_{\max}$ часу досягнення максимальної швидкості осідання еритроцитів для виявлення алергії на харчові продукти та лікарські препарати;
- дослідити осідання частинок крові в мікротрубках з метою запропонування нового експрес-методу медичної діагностики на малих об'ємах крові.

Методи дослідження. В дисертаційній роботі використано загальні методи механіки суцільних середовищ для дослідження осідання концентрованих суспензій частинок, що агрегують. Для отримання результатів другого розділу був використаний метод характеристик для гіперболічної системи двох і трьох рівнянь в частинних похідних і метод динаміки частинок. Крім того, ряд виразів був отриманий методами теорії розмірностей. Для побудови характеристик використано власне програмне забезпечення, яке було написане в середовищі C++. В третьому розділі результати отримані за допомогою методу усереднених значень і методу характеристик. Результати четвертого розділу отримані з використанням підходу, який був розроблений в [8], [83], [84], [191]. У п'ятому розділі експериментальні результати отримані за допомогою методу Панченкова та його модифікації з використання мікрокапілярів.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист, наступні:

1. Досліджено квазілінійні моделі осідання частинок дво- та трифазної суспензій, що агрегують, у вертикальних трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил, де розв'язок знаходиться в області, яка має дві рухомі границі з різними крайовими умовами на них. Проаналізовано різні режими процесу осідання та досліджено сильні розриви на еволюційність.

2. Проведено чисельні розрахунки кривих осідання та їх зіставлення з результатами експериментальних вимірювань. Вперше на основі трифазної моделі досліджено розмір та динаміку розмитої границі між зонами чистої плазми крові та агрегатів, що осідають, яка з'являється, наприклад, при алергії на медичні препарати. Отримані результати перевірено чисельними розрахунками методом динаміки частинок.

3. Отримано вирази для швидкості агрегації в рамках континуальної та дискретної моделей кінетики агрегації частинок.

4. Досліджено квазілінійні моделі осідання частинок дво- та трифазної суспензій, що агрегують, у похилих трубках в неоднорідному полі зовнішніх

сил. Проведено узагальнення ефекту Бойкотта на випадок суспензій, що агрегують. Отримано оптимальний кут нахилу, при якому частинки осідають з максимальною швидкістю.

5. Отримано розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса для ламінарних течій суспензій мікро/наночастинок між паралельними пластинами та коаксіальними циліндрами, що обертаються, з урахуванням граничних умов прослизання першого та другого порядку на шорстких поверхнях. Отримано розв'язки задач про тришарову ламінарну течію незмішуваних мікро- та нанорідин між рухомими пластинами та коаксіальними циліндрами, що обертаються з різними кутовими швидкостями і мають різні шорсткості. Проведено узагальнення розрахункових формул для ротаційного віскозиметра для вимірювання в'язкості мікро- і нанорідин.

6. Вперше запропонований і обґрунтований показник $t_{\max}$ часу досягнення максимальної швидкості осідання еритроцитів для виявлення алергії на харчові продукти та лікарські препарати. Досліджено осідання частинок крові в мікротрубках з метою використання його як нового експрес-методу медичної діагностики на малих об'ємах крові.

Практичне значення отриманих результатів. До основних результатів, які мають практичний характер, належать:

- отримання нового показника $t_{\max}$ (часу досягнення максимальної швидкості осідання еритроцитів крові) з метою використання в медичній діагностиці для виявлення алергії на медикаменти та харчові продукти. На основі отриманих результатів зареєстрований патент на корисну модель;
- отримання нового експрес-методу на малих об'ємах крові з використанням мікрокапілярів;
- пояснення на основі трифазної моделі крові феномену виникнення та еволюції розмитого стовпця рідини на границі між зоною чистої плазми крові та еритроцитами, що осідають, під час проведення тесту ШОЕ;

- отримання оптимального кута нахилу трубки, при якому частинки суспензії осідають з максимальною швидкістю, з метою використання у медицині, промисловості та на виробництві;
- отримання результатів, за допомогою яких можна проектувати та контролювати роботу мікро- і нанорідинних пристроїв.

Особистий внесок здобувача. Результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. Зі статей, які опубліковані у співавторстві, у дисертації містяться тільки ті результати, які належать автору. Робота [175] написана без співавторів, роботи [3], [126], [143], [184] написані у співавторстві з науковим керівником, якому належить постановка задач та загальний план дослідження. Результати автора, отримані у роботах [4], [21], [58], [129] та [143], представлені у розділі 2, а матеріали робіт [3], [132] – у розділі 3. Особистий внесок здобувача у роботі [149] – це розв’язок та аналіз квазілінійної гіперболічної системи рівнянь, підготовка коду C++ для чисельного розв’язання задачі, а також дослідження картини характеристик. У роботі [4] автору належить дослідження гіперболічності та властивостей розв’язків континуальних моделей агрегації та седиментації частинок у концентрованих суспензіях. Матеріали робіт [20], [126], [146] та [184] увійшли до розділу 4, а в розділі 5 викладені результати робіт [60], [175] і [178]. Зокрема, у статті [60] автору належать результати експериментальних досліджень та отримання залежності швидкості агрегації від швидкості осідання частинок. Результати, які належать співавторам, згадуються за необхідністю для повноти викладу та супроводжуються відповідними посиланнями.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на Науковій конференції для студентів та аспірантів «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях» (Харків, 2007 р.); XV Міжнародній конференції з механіки та сучасним прикладним програмним системам (Москва, Росія, 2007 р.); Міжнародній науковій конференції студентів та

молодих вчених «Актуальні питання в сучасній медицині» (Харків, 2007 р.); Міжнародній науковій школі-конференції «Тараповські читання» (Харків, 2008 р.); 24-му симпозиумі з реології, (Москва, Росія, 2008 р.); Міжнародній науковій конференції «Нові математичні моделі механіки суцільних середовищ: побудова і вивчення» (Новосибірськ, Росія, 2009 р.); XIII Міжнародній конференції «Сучасні проблеми механіки суцільних середовищ» (Ростов-на-Дону, Росія, 2009 р.); X Всеросійській конференції «Біомеханіка – 2010» (Саратов, Росія, 2010 р.); наукових конференціях для студентів та аспірантів «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях» (Харків, 2010 р., 2011 р., 2012 р.); семінарі з біомеханіки (Лодзь, Польща, 2012 р.); Всеросійській школі-конференції «Математичне моделювання і біомеханіка у сучасному університеті» (Ростов-на-Дону, Росія, 2013 р.); Міжнародній науково-технічній конференції «Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки» (Харків, 2013 р.); семінарі з прикладних задач механіки суцільних середовищ (Кілі, Німеччина, 2013 р.); III Міжнародній конференції «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 2015 р.); Міжнародній конференції «Фізика рідких матеріалів: сучасні проблеми» (Київ, 2016 р.); Міжнародній конференції «Нанотехнології і наноматеріали» (Львів, 2016 р.); Міжнародній конференції «Тараповські читання – 2016» (Харків, 2016 р.); IX Міжнародній конференції для спеціалістів та молодих учених «Фізика низьких температур», присвяченій 100-літтю NASU (Харків, 2018 р.); Міжнародній конференції «Біомеханіка – 2018» (Зелена Гора, Польща, 2018 р.)

Публікації. Всі основні результати роботи опубліковані повною мірою в фахових журналах, пройшли апробацію на семінарах та наукових конференціях. За темою дисертації у фахових виданнях України опубліковано 6 статей автора [3], [4], [126], [129], [131], [143]. Статті [132], [146], [184] є публікаціями у зарубіжних спеціалізованих виданнях. Статті [20], [22], [58], [59], [130], [149], [175], [178] опубліковані у матеріалах

фахових вітчизняних і міжнародних наукових конференцій, серед яких статті [20], [58] – у виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази Scopus. Статті [21], [60], [180] додатково відображають наукові результати дисертації. За темою дисертаційної роботи опубліковано 14 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях [7], [19], [23], [144], [145], [147], [148], [174], [176], [177], [179], [181], [182], [183]. Крім того, за результатами дослідження зареєстровано патент України на корисну модель [127].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, змісту, умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків до дисертації, списку використаних джерел, який налічує 186 найменувань, та одного додатка. Повний обсяг роботи – 188 сторінок. Обсяг основної частини дисертації – 156 сторінок.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано на кафедрі прикладної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри та в рамках державної науково-дослідної роботи за темою «Оптимальне керування, стійкість і стабілізація динамічних систем складної природи» (номер державної реєстрації: 0119 U002530).

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД НАУКОВОЇ ЛІТЕРАТУРИ ТА ВИБІР НАПРЯМУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження моделей агрегації суспензій макро- та наночастинок представляє великий інтерес. Агрегація частинок відбувається в різних дисперсних системах біологічної та небіологічної природи. Вона визначає структуру і властивості композиційних матеріалів, одержуваних із колоїдів, оскільки особливості агрегації впливають на структурну організацію дисперсної фази, угруповання частинок, їх взаємодію між собою і з дисперсійним середовищем. Зрештою кінетика агрегації позначається на загальних фізико-хімічних властивостях одержуваних композитів. Так агрегація призводить до зміни тепло- і електропровідності рідини, її в'язкості та оптичних властивостей. Саме тому теоретичне і експериментальне дослідження процесів агрегатоутворення і пов'язаних з ним змін має велике значення для багатьох галузей, в тому числі медицини.

Об'єднання частинок дисперсної фази в одну при їх зближенні і стиканні (зіткненні) лежить в основі утворення агрегатів (коагуляції, коалесценції). Зіткнення частинок і їх злипання або злиття (у разі рідких частинок і бульбашок газу) можуть бути обумовлені різними ефектами: випадковим (броунівським або турбулентним) блуканням, зближенням під дією електричних, магнітних, гравітаційних, гідродинамічних та інших сил. Випадкові зіткнення не завжди призводять до злипання частинок, оскільки в дисперсійній фазі вони набувають однойменні поверхневі електричні заряди і відштовхуються. Слід зазначити, що агрегація лежить в основі процесів старіння дисперсних систем, розшаровування їх на тверду і рідку фази, випадання осаду або перехід із золю в гель (застуднення). Дослідження коагуляції частинок актуально і досліджується в хімічних технологіях, метеорології, біофізиці, астрономії, при розв'язуванні проблеми очищення від аерозольних або колоїдних забруднень [160], [163], [164].

В теорії агрегації виділяють дві складові:

а) мікрофізичну теорію, яка досліджує рух частинок до зіткнення, а також процеси зіткнення і злиття (злипання) з метою визначення ймовірності їх сполюки;

б) кінетичну теорію, яка досліджує еволюцію розподілу частинок по масах при заданій ймовірності їх сполюки.

Так, широке застосування кінетична теорія коагуляції знаходить в метеорології в теорії формування крапель і граду. Коагуляція грає важливу роль в еволюції хмарної мікроструктури і в формуванні рідких опадів, в основі чого лежить гравітаційне зближення [134]. Агрегація еритроцитів крові як концентрованої суспензії визначає її в'язкість, неньютонівські властивості і особливості руху по судинах [152]. Агрегація феромагнітних частинок в колоїдах в зовнішньому магнітному полі широко досліджується у зв'язку з численними технічними та медичними застосуваннями феромагнітних рідин (ФМР).

У Харківському університеті властивості ФМР досліджувалися експериментально в лабораторії електродинаміки суцільних середовищ, організованої І. Є. Тараповим, а також в циклі робіт його учнів: М. Ф. Пацегона, А. І. Федоненка, В. І. Смірнова [162], [172], [173].

У даному розділі наведено результати досліджень процесів агрегації, розпочаті відомим польським вченим М. Смолуховським [110], [111]. Розглядаються різні механізми агрегації біологічних частинок, зокрема, еритроцитів крові. Велика увага приділяється вивченню наявних математичних моделей осідання та агрегації частинок у вертикальних та похилих трубках. Крім того, досліджуються дискретні моделі динаміки наночастинок в суспензіях.

1.1 Рівняння кінетики агрегації

Дискретний варіант кінетичного рівняння коагуляції вперше сформулював відомий польський вчений М. Смолуховський [110], [111], розглядаючи броунівську коагуляцію в колоїдах. Передбачалося, що

дисперсна система просторово однорідна. У початковий момент часу є агрегати різної маси, кратній масі однієї частинки m_0 . Якщо агрегат складається із k частинок, то його маса $m_k = km_0$. Під дією броунівських флуктуацій агрегати зближуються, стикаються і з певною ймовірністю злипаються, утворюючи нові частинки з масою, яка дорівнює сумі мас частинок, що зіткнулись. Дисперсна система передбачається настільки слабкоконцентрованою, щоб можна було розглядати лише парні зіткнення, а потрійними і вищого порядку – знехтувати. Також передбачалося, що на ймовірність зближення, зіткнення і злипання двох агрегатів дуже мало впливає присутність інших агрегатів. Парні зіткнення можуть призводити до утворення агрегату з k частинок, якщо стикаються і злипаються агрегати із $k-p$ і p частинок (Рис. 1.1а), але можуть сприяти і зникненню агрегату з класу k -часткових, якщо він злипається з агрегатом із p частинок (Рис. 1.1б). Таким чином, в кінетичному рівнянні Смолуховського вводяться позитивні і негативні джерела:

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k-1} K(k-p, p) n_{k-p} n_p - \sum_{p=1}^{\infty} K(k, p) n_k n_p, \quad (1.1)$$

де $K(k-p, p) = K(p, k-p)$ – ядро кінетичного рівняння коагуляції, відповідне ймовірності зіткнення і злипання агрегатів з $k-p$ і p частинок, що визначається мікрофізикою руху і взаємодією агрегатів в дисперсійній фазі.

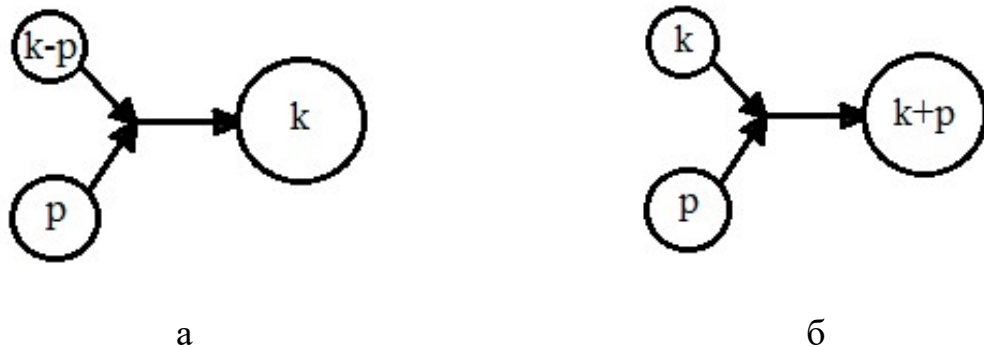


Рис. 1.1 Кінетика утворення агрегатів внаслідок злипання частинок: а – утворення агрегатів із k -частинок, б – зникнення агрегатів із k -частинок

Якщо ввести числову концентрацію n_j агрегатів, що складаються із j частинок, в одиниці об'єму середовища, то повну числову N і об'ємну H концентрації агрегатів з довільного числа частинок $j = 1, 2, \dots$ можна обчислити як

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} n_j, \quad H = \sum_{j=1}^{\infty} n_j w_j,$$

де w_j – об'єм агрегату, що містить j частинок. Взагалі кажучи, $w_j \geq j \cdot w_0$, де w_0 – об'єм однієї частинки, оскільки агрегат може містити в собі частину дисперсійної фази, захоплену всередині агрегату і утримувану в ньому внаслідок адсорбції, хімічних зв'язків, електричними, магнітними силами та іншими. Точно так же в реальних дисперсних системах на відміну від припущень моделі Смолюховського можлива ситуація $m_k \geq km_0$.

Крім цього, в залежності від природи частинок і взаємодій між ними можливі інші механізми утворення агрегатів: внаслідок розпаду великих агрегатів (Рис. 1.2) і шляхом обмінних взаємодій (Рис. 1.3). Рівняння Смолюховського (1.1) прийме в цих випадках вид [135], [180]:

$$\frac{dn_k}{dt} = \sum_{p=1}^{k+p-1} L(k, p) n_k n_p - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k-1} L(k-p, p) n_{k-p} n_p \quad (1.2)$$

$$\frac{dn_k}{dt} = \sum_{p,m=1}^{\infty} M(k+p, m, k) n_{k+p} n_m - \sum_{\substack{p,m=1 \\ m < p}}^{\infty} M(k, p, k+m) n_k n_{k+m} \quad (1.3)$$

відповідно, де $L(k, p)$ – ймовірність розпаду агрегату з $k+p$ частинок на два агрегати, що складаються з k і p частинок, $M(k+p, m, k)$ – ймовірність злиття агрегатів з $k+p$ і m частинок з подальшим відщепленням агрегату з k частинок. При розпаді агрегатів іноді вважають, що другий доданок в (1.2) лінійно залежить від n_p і не залежить від n_{k-p} , що можливо при деяких мікрофізичних умовах. Подібні складні взаємодії при утворенні агрегатів дуже ймовірні в концентрованих суспензіях [134], [151], [152].

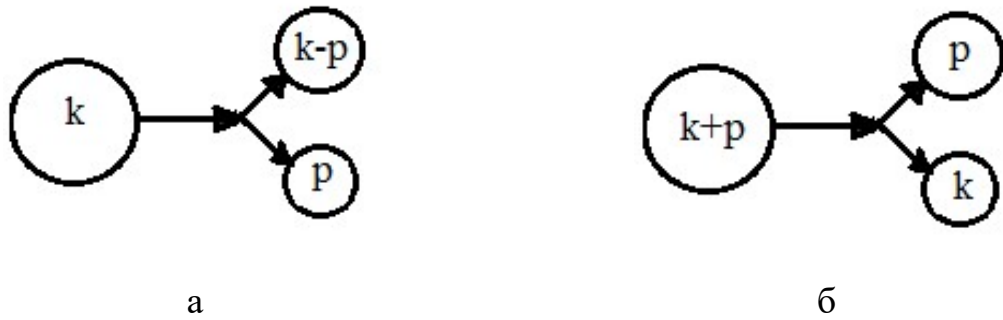


Рис. 1.2 Кінетика утворення агрегатів внаслідок розпаду частинок: а – зникнення агрегатів із k -частинок, б – утворення агрегатів із k -частинок

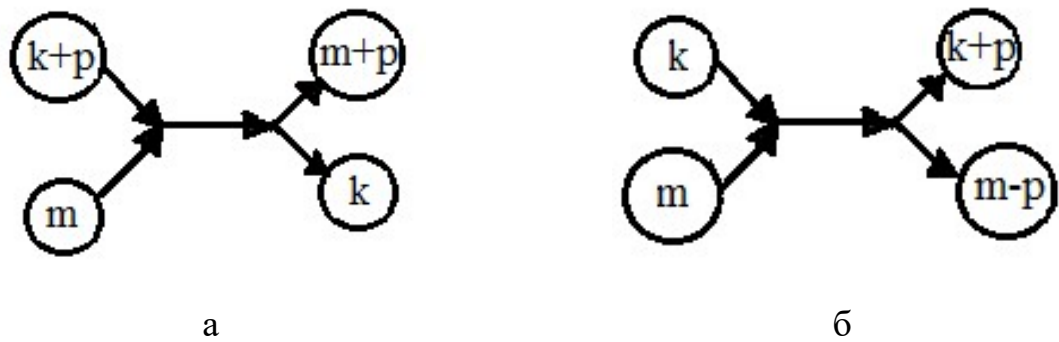


Рис. 1.3 Кінетика утворення агрегатів внаслідок обмінних взаємодій: а – утворення агрегатів із k -частинок, б – зникнення агрегатів із k -частинок

При наявності в суспензії всіх видів взаємодій має місце рівняння виду (1.1), в якому ядра коагуляції $\Gamma^\pm$ представлені сумами з правих частин (1.1)–(1.3) [165], [180]:

$$\frac{dn_k}{dt} = \Gamma_{k(K)}^+ - \Gamma_{k(K)}^- + \Gamma_{k(L)}^+ - \Gamma_{k(L)}^- + \Gamma_{k(M)}^+ - \Gamma_{k(M)}^- - \text{div} \vec{J}_k, \quad (1.4)$$

де знаки $\pm$ відповідають позитивним і негативним джерелам, індекси $(K), (L), (M)$ відповідають ядрам з (1.1), (1.2), (1.3), $\vec{J}_k$ – вектор дифузійного потоку агрегатів із k частинок.

В роботі [160] було проведено узагальнення рівняння Смолуховського на випадок наявності розподілених джерел і стоків частинок. Задача про вплив потужного дискретного стоку великих частинок для ядер з монодисперсним початковим розподілом була розв'язана в [164], а для

полідисперсних початкових розподілів – в [134]. Рівняння коагуляції з джерелом і стоком частинок має вигляд:

$$\frac{dn}{dt}(p,t) = S(p,t) + I(p,t) - \frac{1}{\tau}n(p,t),$$

де $S(p,t)$ – оператор Смолюховського:

$$S(p,t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} G(i, p-i) n(p-i, t) n(i, t) - n(p, t) \sum_{i=1}^{\infty} G(p, i) n(i, t);$$

τ – середній час перебування частинок в розглянутому об'ємі коагуляційної дисперсної системи, $n(p,t)\Delta t/\tau$ і $I(p,t)\Delta t$ – число частинок масою pm_0 , що пішли/надійшли в одиницю об'єму системи за час Δt .

Модифікація моделі Смолюховського для полімерних розчинів враховує утворення трьох груп агрегатів: маленьких, середніх і великих, які називають мономерами {1}, димерами {2} і тримерами {3} відповідно. Виникнення і руйнування агрегатів в полімерному розчині описуються наступними процесами [163], [180]:

1. Злипання мономеру з димером з утворенням тримеру або розпад тримеру на мономер і димер $\{1\} + \{2\} \xrightleftharpoons{p_{12}, q_3} \{3\}$.

2. Злипання мономеру і тримеру з подальшим утворенням двох димерів або злипання двох димерів з утворенням мономеру і тримеру $\{2\} + \{2\} \xrightleftharpoons{p_{22}, p_{13}} \{1\} + \{3\}$.

3. Злипання двох мономерів з утворенням димеру або розпад димеру на два мономери $\{1\} + \{1\} \xrightleftharpoons{p_{11}, q_2} \{2\}$.

У наведених кінетичних схемах p_{ij} – коефіцієнти злипання, а q_i – розпаду. Для них можна записати систему кінетичних рівнянь, що описують зміну числових концентрацій агрегатів в дисперсній системі:

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = 2q_2n_2 + q_3n_3 - p_{12}n_1n_2 - p_{13}n_1n_3 - 2p_{11}n_1n_1 + p_{22}n_2n_2 \\ \dot{n}_2 = -q_2n_2 + q_3n_3 - p_{12}n_1n_2 + 2p_{13}n_1n_3 + p_{11}n_1n_1 - 2p_{22}n_2n_2 \\ \dot{n}_3 = -q_3n_3 + p_{12}n_1n_2 - p_{13}n_1n_3 + p_{22}n_2n_2, \end{cases} \quad (1.5)$$

де n_1 , n_2 і n_3 – числові концентрації мономерів, димерів і тримерів, причому $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = N$ – повне число мономерів в полімерному розчині.

Розв’язок системи (1.5) існує не за будь-яких значень констант p_{ij} і q_i . Ці коефіцієнти визначаються експериментально для кожного досліджуваного полімеру. Через нелінійність рівнянь система (1.5) може описувати складну динамічну поведінку полімерного розчину, що агрегує, з утворенням патернів, хаотичною динамікою і т.д. Оскільки в біологічних суспензіях полімеризація деяких молекул впливає на агрегацію більших частинок і клітин, то кінетичні рівняння (1.5) можуть використовуватися разом з рівняннями агрегації вигляду (1.1), причому в цьому випадку $Z = Z(v - v', v', n_j)$ і обидві системи повинні розв’язуватись спільно. Наприклад, в крові агрегація еритроцитів пов’язана з наявністю білка фібриногену, а полімеризація фібрину і утворення тривимірної фібринової структури лежить в основі тромбоутворення [152].

1.2 Механізм агрегації еритроцитів крові

Агрегація нормальних дископодібних (двоякоувігнутих) форм еритроцитів у витягнуті агрегати (ланцюжки або «монетні стовпчики») відбувається внаслідок контакту ущільнених (двоякоувігнутих) поверхонь клітин, зворотна і є нормальною властивістю крові людини та багатьох тварин [151], [152]. Агрегати руйнуються при течії крові або іншому механічному впливі, що визначає тиксотропні властивості крові. У нерухомій крові ланцюжки можуть утворювати більш складні агрегати. Агрегація еритроцитів в артеріях визначає опір судин кровотоку, масоперенос кисню і вуглекислого газу [24]. Форма еритроцитів також впливає на їх зближення і подальшу агрегацію [97]. При різних зовнішніх умовах дископодібні еритроцити переходять у сфероцити або сфери з шипами (ехіноцити). В умовах гіпогравітації [108] і гіпергравітації [26] форма еритроцитів змінюється і їх агрегаційна здатність теж.

Швидкість агрегації еритроцитів є важливим діагностичним показником і вимірюється шляхом проведення лабораторних тестів. Найбільш поширеним є вимірювання швидкості осідання еритроцитів (ШОЕ) проби крові у довгій вертикальній трубці в полі сили тяжіння [152]. Існують варіації тесту, які пов'язані з його проведенням в неоднорідному магнітному полі [139], [140], [142], схрещених магнітному та електричному полях, полі відцентрових сил [66], [137], [137], [143], [149]. Підвищена агрегація еритроцитів корелює зі збільшенням швидкості переміщення границі розділу зон чистої плазми крові у верхній частині седиментаційної трубки і зони агрегатів, що осідають, в її центральній частині. ШОЕ є неспецифічним показником, оскільки, як і підвищена температура тіла, не вказує на конкретну патологію. Збільшення ШОЕ пов'язано зі зниженням поверхневого заряду клітин, наявності в крові нейтральних або позитивно заряджених частинок – молекул, продуктів розпаду тканин та інших. Велику роль відіграють зміни проникності мембран еритроцитів [128]. На початкових етапах утворюються ланцюжки, а потім – складні сферичні [36] або іншої форми агрегати, які осідають значно швидше, ніж поодинокі клітини.

Мікроскопічні методи оцінки швидкості агрегації засновані на прямому підрахунку середнього числа еритроцитів в ланцюжках: на сухому мазку краплі крові, нанесеному на предметне скло; в порції сильно розведеної крові в гематологічній камері, піпетці або кюветі, а також у проточній камері за допомогою мікрофотографування [151], [152]. Крім цього, популярні оптичні методи, засновані на закономірностях розсіювання світла колоїдними системами і суспензіями [12], [152]. Для нормальних еритроцитів, які утворюють монетні стовпчики, приймається кінетична схема, відповідна моделі (1.13), але з утворенням витягнутого агрегату у вигляді монетного стовпчика (Рис. 1.4) [12].

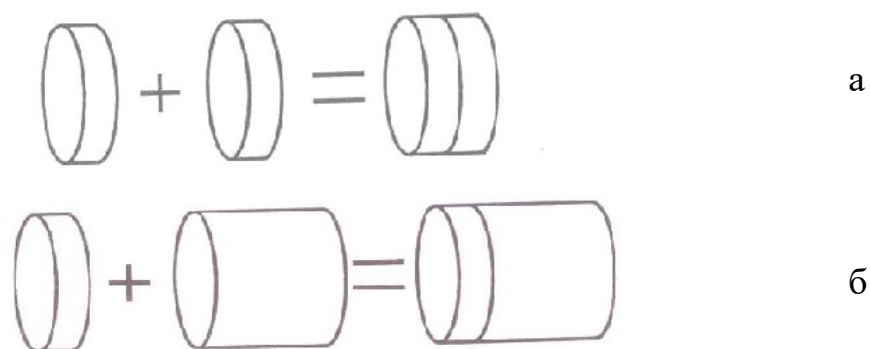


Рис. 1.4 Кінетика агрегації дископодібних еритроцитів в ланцюжки

Електронномікроскопічні дослідження показали, що для агрегації еритроцитів необхідна присутність мостикових молекул, які адсорбуються своїми кінцями на поверхнях клітин, що агрегують, зшиваючи їх разом. Велике число містків забезпечує досить міцний зв'язок, проте який руйнується при невеликих зсувних деформаціях. У нормальній крові роль містків грає фібриноген, проте в експериментах можна використовувати різні витягнуті молекули. На електронномікроскопічних фотографіях ширина проміжку між поверхнями клітин в точності відповідає довжині молекул, що використовувалися для утворення містків (декстрини, полілізин, фібриноген та ін.) [152]. При фізіологічних значеннях рН поверхні еритроцитів заряджені негативно. Якщо мостикові молекули заряджені позитивно, то агрегація визначається електростатичним тяжінням, а якщо нейтрально або негативно, то силами Ван-дер-Ваальса і водневими зв'язками, тоді агрегати менш стійкі до деформацій. Сили, що розвиваються в містках, достатні, щоб після зближення клітин на відстані ≤ 25 нм викликати їх деформацію і відносні переміщення, що сприяють взаємному переміщенню ущільнених поверхонь до утворення «монетного стовпчика». Таким чином, мікрофізичні теорії агрегації еритроцитів будуються на теорії подвійного електричного шару клітин і взаємодії клітинних поверхонь та мостикових молекул [11], [24].

В моделях динаміки частинок кров розглядається як суспензія частинок радіуса R , що взаємодіють між собою у зсувній течії, так що рівняння руху

частинок має вигляд рівнянь Ньютона зі складною правою частиною [85], [182]:

$$m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \sum_{i \neq j} \bar{f}_{ij} + \bar{f}_i^h, \quad (1.6)$$

де m_i – маса i -ї частинки, $\bar{v}_i$ – її швидкість, $\bar{f}_{ij}$ – сила, яка діє на частинку i з боку частинки j , $\bar{f}_i^h$ – гідродинамічна сила.

Внаслідок пружної деформації поверхонь частинок, які зблизились, виникає сила $\bar{f}_{ij}^e$, що перешкоджає їх агрегації. Сумарна сила має вигляд $\bar{f}_{ij} = \bar{f}_{ij}^a + \bar{f}_{ij}^e$, причому

$$\bar{f}_{ij}^e = \begin{cases} k(2R - d_{ij})^{3/2} \bar{n}_{ij} & \text{якщо } d_{ij} \leq 2R \\ 0 & \text{якщо } d_{ij} > 2R, \end{cases} \quad (1.7)$$

де d_{ij} – відстань між відносними центрами i -ї та j -ї частинки, $\bar{n}_{ij}$ – одиничний вектор, спрямований від j -ї частинки до i -ї. Таким чином, сила відштовхування пов'язана із фізичною зайнятістю простору і пружною взаємодією частинок як пружнодеформованих оболонок.

Енергія взаємодії двох частинок (потенціал Морсу)

$$\Phi_{ij} = D \left(e^{2B(\delta_0 - \delta_{ij})} - 2e^{B(\delta_0 - \delta_{ij})} \right)$$

залежить від коефіцієнта D , що характеризує властивості поверхні, відстані між частинками $\delta_{ij} = (d_{ij} - 2R)$ ($\delta = \delta_0$ при $d_{ij} < 2R$) і від скалярного множника B , який знаходиться у зворотній залежності від товщини подвійного електричного шару. Тоді сила $\bar{f}_{ij}^e$ частинок може бути записана у вигляді:

$$\bar{f}_{ij}^e = -\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \delta_{ij}} A = 2DAB \left(e^{2B(\delta_0 - \delta_{ij})} - e^{B(\delta_0 - \delta_{ij})} \right) \bar{n}_{ij}, \quad (1.8)$$

де A – площа поверхні зіткнення частинок. Значення параметрів B, δ_0, D знаходяться в результаті обчислень для ідеальних заряджених сфер і порівняння розрахунків з експериментами.

Гідродинамічна сила зазвичай оцінюється на підставі формули Стокса обтікання твердої частинки при малих числах Рейнольдса:

$$\vec{f}_i^h = k\mu R(\vec{v}_i - \vec{v}_\infty), \quad (1.9)$$

де μ – динамічна в'язкість рідини, R – радіус частинки, $\vec{v}_i$ і $\vec{v}_\infty$ – швидкості руху частинки і потоку рідини, що набігає, k – параметр форми частинки. Для сфери $k = 6\pi$.

Для концентрованих суспензій в'язкість залежить від концентрації частинок C і швидкості зсуву $\dot{\gamma}$: $\mu = \mu(C, \dot{\gamma})$. При осіданні в центрифугі виникають відхилення від закону опору через відставання по кутовій швидкості між частинками і рідиною. Більш точні моделі враховують також поправку на кривизну профілю швидкості, інерцію частинок і рідини, силу Магнуса і в'язкі ефекти при нестационарному русі, так що замість (1.9) записують відповідно [152]:

$$\begin{aligned} \vec{f}_i^h = & k\mu R(\vec{v}_i - \vec{v}_\infty) + k_1\mu\Delta\vec{v}_\infty - k_2\rho R^3 \frac{d}{dt}(\vec{v}_i - \vec{v}_\infty) + \\ & + k_3\rho R^3 (\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_\infty) \times (\vec{v}_i - \vec{v}_\infty) + k_4\sqrt{\mu\rho} R^2 \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau}(\vec{v}_i - \vec{v}_\infty) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

де $\vec{\omega}_i$ і $\vec{\omega}_\infty$ – кутова швидкість обертання частинки і рідини, k_{1-4} – коефіцієнти, що залежать від форми частинки.

Таким чином, мікрофізика взаємодії описується на основі моделі (1.6), (1.8), (1.10) і деякі якісні оцінки по ній проведені в [152]. Розрахунки для моделі еритроцита як в'язкопружної оболонки, заповненої в'язкою рідиною, з урахуванням сил (1.8), (1.10) показують, що навіть відбуватимуться деформації клітини потоком і, отже, зміна її форми.

1.3 Континуальні моделі крові з урахуванням агрегації еритроцитів

Континуальна модель крові з урахуванням неоднорідності її структури внаслідок утворення і руйнування агрегатів була побудована в роботах А. С. Попеля і С. А. Регіра [167], [168], [169]. В роботі [167] розглядалася тиксотропна рідина, що складається із твердих деформівних частинок, зв'язаних в нестисливій неньютонівській рідині. Зміни структури внаслідок

утворення агрегатів описувалися двома макроскопічними параметрами: числовою концентрацією агрегатів N і об'ємною концентрацією агрегатів з урахуванням захопленої в них рідкої фази H , або середнім об'ємом агрегату $w = H / N$. Рівняння руху суміші в цілому зводилися до вигляду [183]:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div}(2\mu\hat{\mathbf{e}}) \quad (1.11)$$

$$\frac{dN}{dt} = \Gamma(N, I_e), \quad (1.12)$$

де $\hat{\mathbf{e}}$ – тензор швидкостей деформацій, I_e – другий інваріант тензору швидкостей деформацій, $\mu = \mu(I_e)$, Γ – сумарна швидкість утворення і розпаду агрегатів, що враховує механізми, пов'язані зі злипанням, розпадом і обмінними взаємодіями агрегатів, кінетика яких описується правими частинами (1.1)–(1.3).

Вираз для Γ конструювався на основі експериментальних даних з агрегації при заданих умовах течії, мікрофізичної теорії і теорії розмірностей [161], [186]. Наприклад, в [161] для опису квазістаціонарної течії, що пульсує, тиксотропної рідини в циліндричній трубці прийнято:

$$\Gamma = -\alpha^+ I_e N_0 n^{1-\gamma^+} + \alpha^- I_e N_0 n^{1-\gamma^-} (1-n) \chi(1-n) f\left(\frac{2\mu I_e}{\sigma}\right), \quad (1.13)$$

де $n = N/N_0$, N_0 – початкова концентрація частинок, $\alpha^\pm$ – позитивні сталі величини, $\gamma^\pm$ – коефіцієнти форми агрегатів ($\gamma^\pm = 0$ для сфер), σ – напруження, що руйнує агрегати, χ – функція Хевісайда, f – монотонна функція, що не убуває.

На основі моделі (1.11)–(1.13) були досліджені течії тиксотропних рідин в трубках і каналах, стійкість течій, умови агрегаційної рівноваги і наближеного розв'язання методом збурень [186]. Більш детальна модель враховує захоплення рідини агрегатами і її подальше вивільнення під дією гідродинамічних і зовнішніх сил (гравітація при седиментації, відцентрові сили при центрифугуванні і ін.) [169]. Вона описується рівняннями (1.11), а

замість (1.12) вводяться рівняння балансу для числової, масової та об'ємної концентрацій агрегатів:

$$\frac{dN}{dt} = -\text{div}\vec{J}_N + \Gamma_N, \quad \frac{dH}{dt} = -\text{div}\vec{J}_H + \Gamma_H, \quad \frac{dC}{dt} = -\text{div}\vec{J}_C, \quad (1.14)$$

де Γ_H – швидкість захоплення рідини в агрегатах, $\vec{J}_{N,H,C}$ – відповідні дифузійні потоки, які є лінійними функціями градієнтів, наприклад

$$\vec{J}_H = -D_{HH}\nabla H - D_{HC}\nabla C - \frac{D_{HN}}{N}\nabla N - \frac{D_{HI}}{I_e}\nabla I_e \quad (1.15)$$

До нелінійних в'язкопружних моделей належить і модель Леонова:

$$\tau_{ik} = 2\mu v_{ik} + T_{ik}, \quad (1.16)$$

де T_{ik} задовольняє рівнянню:

$$\lambda \frac{\partial T_{ik}}{\partial t} + T_{ik} + \frac{\lambda}{2\tilde{\mu}} v_{ij} v_{jk} = 2\tilde{\mu} v_{ik}. \quad (1.17)$$

Спрощені постановки задачі (1.11)–(1.14) і аналіз коефіцієнтів в (1.15) наведені в [168]. Модель (1.11)–(1.14) не дозволяє проаналізувати фракційний склад середовища, тому її можна узагальнити шляхом введення числових, масових і об'ємних концентрацій N_i, C_i, H_i агрегатів з i частинок. Тоді система (1.14) збереже свій вигляд, тільки в третьому рівнянні з'явиться джерельний член і відповідні дифузійні потоки. Джерельні складові повинні бути також записані з індексом i й будуть, взагалі кажучи, відрізнятися для агрегатів із різної кількості частинок [151]. В рамках такої моделі може бути, наприклад, досліджена кінетична схема, наведена на рис. 1.4, і оцінений показник полідисперсності суспензії залежно від кінетики агрегації.

Термодинамічна модель крові як суспензії частинок, що агрегують, побудована в роботах [167], [169]. Кров розглядається як двофазне середовище з еритроцитів і плазми крові. На основі даної моделі були розв'язані задачі про осідання еритроцитів у вертикальній трубці [153], про угруповання частинок суспензії в полі звукової хвилі, що стоїть [158], про течію суспензії в плоскому каналі з пористими стінками [159], про взаємодію гравітаційного осідання і зсувної дифузії частинок суспензії при зсувній течії

у вертикальній щілині [157], про осідання частинок в полі відцентрових сил [137], [137] і цілий ряд інших завдань, постановки яких з'явилися у зв'язку з біомедичними додатками (центрифугування, віскозиметрія, течія в апаратах екстракорпорального кровообігу, оксигенаторах, мікроциркуляторних осередках).

Методами нерівноважної термодинаміки побудована модель трифазної суспензії, що враховує захоплення рідини в агрегатах [154]. Суспензія містить одну тверду (частинки) і дві рідкі (вільна і захоплена рідина) фази. Таким чином, захоплення і вивільнення рідини при утворенні, ущільненні або руйнуванні агрегатів супроводжується масообміном між рідкими і твердою фазами. На основі даної моделі та проведеного дослідження була запропонована методика виявлення лікарської і харчової алергії по розбіжностях швидкості осідання і протяжності середньої зони в інтактній крові і в порціях крові з малими добавками потенційних алергенів [127].

Отже, математичні моделі, що використовуються при описі процесів агрегації, структуроутворення і поділу фаз в біоколоїдах і суспензіях, які засновані на дискретному рівнянні Смолуховського, його неперервному аналогу або їх модифікаціях, що враховують особливості кінетики агрегації і властивості твердої і рідкої фаз, досить добре описують процеси, які протікають у суспензіях органічних макромолекул, крові та інших біологічних рідинах, бактеріальних суспензіях, включаючи активне переміщення бактерій відповідно до градієнтів концентрації аттрактантів та репелентів [168]. Загальні термодинамічні моделі, які були розроблені відомими механіками [151], [152], [153], [154], [157], [158], [159], [160], [161], [186], й сьогодні успішно використовуються для опису поведінки біологічних суспензій та колоїдів.

1.4 Моделі суспензій частинок, що осідають у похилих трубках

Вплив нахилу трубки вперше був виявлений Артуром Бойкоттом в 1920 році при седиментації еритроцитів в тонкій довгій похилій трубці під дією сили тяжіння і зараз відомий як ефект Бойкотта [14]. На той час даний

тест з осіданням еритроцитів був визнаний найпотужнішим медичним діагностичним методом загальної патології.

На сьогодні ця техніка осідання широко використовується для очищення стічних вод, питної води, обробки сумішей у промисловості та виробництві. Але для успішного перероблення потрібні високі резервуари або глибокі свердловини, що значно ускладнює процес, оскільки осідання частинок у високих контейнерах обмежено їх шириною. Своєю чергою, нахил резервуару або свердловини збільшує ефективну площину седиментації та зменшує відстань, яку кожна частинка повинна проходити до удару об стінку, а, отже, на порядок підвищує швидкість осідання [3], [81].

Ефект Бойкотта застосовується у нафтовій промисловості, оскільки при певних кутах нахилу ($40\text{--}50^\circ$) трубки спостерігається найчіткіше відокремлення нафти від додаткових суспензій [45]; для змішування гранульованих речовин [34]. Крім того, внаслідок дії даного ефекту відбувається розподілення специфічного осаду по похилому океанському дну в умовах стратифікації води [90], а також формування структур на похилих поверхнях піщаних дюн [81]. Слід відзначити, що всі суспензії осідають швидше в похилих трубках і демонструють чіткий поділ шарів різної оптичної густини, але проблема визначення оптимальних кутів для осідання в загальному випадку довільної суспензії залишається невирішеною.

Експериментальні дослідження ефекту Бойкотта на суспензіях, що містять легкі і важкі частинки з концентраціями C_b , C_h в похилих каналах, виявили значний вплив кута нахилу на відокремлення частинок вздовж похилої стінки [72]. Для кожного набору концентрацій $\{C_b, C_h\}$ оптимальним був кут нахилу θ^* , коли відокремлення найчіткіше, а при більших кутах $\theta > \theta^*$ воно малопомітне. Залежність $\theta^* (C_b, C_h)$ виявилася досить складною.

Залежність швидкості осідання еритроцитів h' від кута нахилу θ була продемонстрована в численних експериментальних дослідженнях. Значення h вимірюється як висота чистої плазми крові у верхній частині седиментаційної трубки. Експерименти на суспензіях еритроцитів з

концентраціями $C = 10\text{--}50\%$ і кутами нахилу $\theta = 0\text{--}80^\circ$ показали наближення седиментаційних кривих у вигляді $h(t) = a(1 - \exp(-bt))$, де $a(\theta)$ – функція, що зростає, $b(\theta) = k \sin(\theta)$, $k \approx \text{const}$ [3], [38].

Грунтуючись на підході механіки суцільних середовищ, було показано [1], що швидкість осідання в прямокутному резервуарі визначається числом Рейнольдса Re і параметром Λ , який є відношенням числа Грасгофа до Re :

$$Re = \frac{\rho_f H u_0}{\mu_f}, \quad \Lambda = \frac{(\rho_s - \rho_f) H^2 g C_0}{u_0 \mu_f}, \quad (1.18)$$

де ρ_s і ρ_f – густини твердих і рідких матеріалів, μ_f – в'язкість рідини, C_0 – концентрація частинок, g – прискорення сили тяжіння, u_0 – характерна швидкість осідання одиничної частинки з діаметром a у рідині, яка може бути записана у вигляді формули Стокса [64]:

$$u_0 = \frac{2(\rho_s - \rho_f) a^2 g}{9\mu_f}. \quad (1.19)$$

Використовуючи (1.19), (1.18) перепишемо у вигляді:

$$Re = \frac{2\rho_f(\rho_s - \rho_f) H a^2 g}{9\mu_f^2}, \quad \Lambda = \frac{9C_0}{2} \left(\frac{H}{a} \right)^2. \quad (1.20)$$

При низьких числах Re величини Λ високі, а при $\Lambda \rightarrow \infty$ швидкість Q продукції чистого розчинника (верхній шар суспензії, який не має частинок) можна описати кінематичною формулою Пондера–Накамура–Куроода (ПНК) [82], [92]:

$$Q = u_0 f(C) B (\cos(\theta) + \tan(\theta) H / B), \quad (1.21)$$

де функція $f(C)$ залежить від розміру частинок, форми, матеріалу, поверхневого заряду та інших властивостей.

Як видно з (1.20), наближення (1.21) підходить у випадку, якщо

$$H \gg a \sqrt{\frac{2}{9C_0}}, \quad (1.22)$$

що дає для еритроцитів з $a = 5 \cdot 10^{-6}$ м, $C_0 = 35\text{--}48$ % нереалістичні оцінки $H \sim (3.5\text{--}4) \cdot 10^6$ м. Крім того, добра відповідність формули ПНК (1.21) експериментам доведена лише при низьких концентраціях $C_0 \leq 0.1$ [3], [81].

Підхід механіки суцільних середовищ, оснований на двофазній теорії, застосовувався до осідання в похилих трубках у випадку нев'язкої [46] і в'язкої рідини [69], [93], [102]. На основі цих досліджень було запропоновано поділ на три зони осідання (прозора рідина (I), суспензія (II), осад (III)). Теорія граничного шару використовувалася для визначення профілів швидкості в зонах I–III [1]. У випадку твердих сфер, що не агрегують, згідно з теорією сумішей, були отримані наступні формули [1]:

$$\delta = \left(\frac{2a^2 U \tan(\theta y)}{3C_0 u_0} \right)^{1/3}, \quad V = \frac{9\delta^2 C_0 u_0 \cos(\theta)}{2a^2} \left(\frac{x}{\delta} - \frac{x^2}{2\delta^2} \right), \quad (1.23)$$

де U – швидкість осідання суспензії, що і у випадку вертикальних трубок.

Експериментальні дослідження еритроцитів, що не агрегують, показали, що шар I починає формуватися після $t = 8$ хв і 1,8 хв при кутах нахилу $\theta = 10^\circ$ і $\theta = 40^\circ$ відповідно [116]. Результати вимірювань висоти верхнього шару суспензії демонструють гарну згоду з розрахунками.

Не так давно технологія похилого каналу була використана в мікрорідинних приладах для поділу крові за допомогою відцентрових і Коріолісових сил з ефектом Цвайфаха–Фунга (Ц–Ф) [17], [123]. У цій конструкції еритроцити виштовхуються на дно криволінійного каналу внаслідок ефекту відцентрових і Коріолісових сил і потім збираються на дні каналу внаслідок ефекту Ц–Ф, а плазма крові відбирається з верхньої частини каналу.

Таким чином, осідання еритроцитів в похилих трубках є перспективною технологією для біології, медицини, мікрофлюїдики і нанотехнологій, а теоретичний опис динаміки системи обмежується суспензіями з низькими концентраціями частинок $C_0 < 0.1$, низькими числами Рейнольдса $Re < 1$ і нереалістично високими трубками. Динаміка частинок,

що агрегують, була вивчена за допомогою моделювання решітки Больцмана [120]. Результати дослідження підтвердили існування загального конвекційного руху частинок та їх агрегатів, які прагнуть посилити процес осідання. Встановлено, що менші переривчасті вихори, сформовані зі слідів груп осілих частинок, відіграють важливу роль в процесі осідання.

В представленій роботі застосовується підхід механіки суцільних середовищ для осідання концентрованих суспензій частинок, що агрегують. Показано, що динаміка осідання у похилих трубках є більш складною, ніж у вертикальних, а додаткові підшари осідання з'являються подібно випадку вертикальної трубки [58].

1.5 Дискретні моделі динаміки мікро- і наночастинок в суспензіях

Останнім часом активно розвиваються мікро- і наногідромеханіка – розділ механіки рідин, що вивчає фізичні властивості і закономірності течій мікро- і нанорідин, тобто розбавлених і концентрованих суспензій мікрочастинок ($d_p \sim 1-100$ мкм) і наночастинок ($d_p \sim 1-100$ нм). Мікрорідинами можуть розглядатися розчини і розплави полімерів, біологічні рідини і суспензії бактеріальних та інших клітин і мікроорганізмів, наприклад, в біореакторах. Нанорідини є суспензіями наночастинок Al_2O_3 , CuO , SiO_2 , ZnO ($d_p = 20-60$ нм) на основі води, гліцерину, етиленгліколю та ін., а також суспензії фулеренів ($d_p = 1.6-1.8$ нм), нанотрубок ($d_p = 5-100$ нм) та інших частинок. Найчастіше досліджуються слабкоконцентровані суспензії ($C < 5-10$ %), які володіють унікальними термомеханічними, електричними і магнітними властивостями і малими динамічними в'язкостями [44]. Проте, для розв'язання практичних задач потрібні також концентровані мікро- і нанорідини, для яких стають істотними локальні взаємодії частинок, а внутрішнє тертя між шарами з різною концентрацією частинок може призводити до нових реологічних властивостей таких рідин [130], [184].

Нанорідини широко використовуються як охолоджувачі для мікропристроїв і мікросистем з великими потоками тепла [62]. Додавання всього 1,8 % наночастинок Al_2O_3 в рідину призводить до збільшення відведення тепла від мікропроцесора на 32 %. Водночас питання про оптимальну концентрацію наночастинок в поєднанні з їх фізичними властивостями, розмірами і формою для забезпечення максимальної ефективності охолоджувача в заданому діапазоні чисел Re залишається недостатньо дослідженим. В огляді [62] наведені залежності ефективності різних нанорідин в діапазоні $Re = 1-1200$.

Іншою областю використання частинок є рідкі та порошкові мастила [62]. Наночастинки істотно знижують тертя між твердими поверхнями шляхом заповнення мікротріщин і щілин, формування захисних плівок і трансформації тертя ковзання в тертя кочення внаслідок обертання наночастинок між поверхнями, що труться. Додавання надміцних алмазних наночастинок ($d_p = 5$ нм) в концентрації $C_p = 1$ % призводило до істотного зниження тертя між поверхнями внаслідок полірування поверхонь, що труться [62].

При течії нанорідин по трубках у стінок труб внаслідок ефекту Фареуса–Ліндквіста утворюються шари зі зниженою концентрацією частинок, які виконують роль мастильних, що призводить до істотного збільшення об'ємної витрати рідини в порівнянні з течією базової рідини [184].

Агрегація наночастинок в порошках і суспензіях призводить до змін їх в'язких [52] і термомеханічних [112] властивостей. Для запобігання агрегації і подальшої гравітаційної седиментації наночастинки стабілізують електростатично (шляхом варіації рН базової рідини) або стерично (шляхом адсорбції довгих молекул на їх поверхнях) [122].

На частинки нанорідин діють наступні сили [52], [62], [112], [146]:

- 1) броунівські сили, пов'язані з хаотичними дискретними зіткненнями:

$$\vec{F}_B = \sqrt{\frac{2k_B T}{3\pi^3 \mu_{bf} d_p}} m_p \vec{r}_0,$$

де m_p – маса частинки, μ_{bf} – в'язкість базової рідини, k_B – стала Больцмана, T – температура, $\vec{r}_0$ – випадковий вектор з нульовим середнім;

2) масові сили, які дорівнюють різниці сили тяжіння та Архімедової сили:

$$\vec{F}_g = \frac{\pi}{6} d_p^3 (\rho_p - \rho_{bf}) \vec{g} n,$$

де ρ_p, ρ_{bf} – густини частинок і рідини, $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння, n – перевантаження (при проведенні експериментів у центрифугі);

3) термофоретичні сили:

$$\vec{F}_T = -3\pi\mu_{bf}^2 d_p k_p \frac{\nabla T}{\rho_{bf} T_\infty}, k_p = k_p(C, k_p, k_{bf}, Kn),$$

де k_p, k_{bf} – коефіцієнти теплопровідності частинок і рідини, Kn – число Кнудсена;

4) сила Стокса:

$$\vec{F}_S = -3\pi\mu_{bf} d_p (\vec{v}_p - \vec{v}_{bf}),$$

де $\vec{v}_p, \vec{v}_{bf}$ – швидкості частинок і рідин;

5) сили Ван-дер-Ваальса з потенціалом:

$$\Psi = -\frac{A_H}{12} \left(\frac{1}{(l+1)^2} + \frac{1}{l(l+1)} + 2 \ln \frac{l(l+2)}{(l+1)^2} \right),$$

де A_H – постійна Гамакера, $\lambda = h/d_p$, d_p – діаметр частинки, $h = h(C, d_p)$ – відстань між центрами частинок;

6) сили відштовхування з потенціалом:

$$\Phi = 32\pi k_B T d_p \rho_i \kappa^{-2} h^2 \left(\frac{\rho_i \varphi_0}{4k_B T} \right) e^{-\kappa h},$$

що виникають при зближенні частинок внаслідок гамакерівської взаємодії їх іонних хмар, k – стала Дебая, ρ_i, φ_0 – густина електричного заряду і потенціал подвійного шару на поверхні частинки.

Рух і взаємодію частинок в нанорідині можна описати рівняннями Ньютона для дискретної системи наночастинок:

$$m_{pi} \frac{d\vec{v}_{pi}}{dt} = \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij} + \vec{f}_i^h, \quad (1.24)$$

де i, j – номери частинок, $\vec{f}_{ij}$ – сили 1), 5), 6), що діють на частинку i з боку частинки j , $\vec{f}_i^h$ – сили 2)–4).

Використовуючи рівняння (1.24) методу динаміки частинок з урахуванням всіх перерахованих вище парних сил, що діють між частинками, а також об'ємних і поверхневих сил, що діють з боку рідини, можна обчислити розподіл частинок в послідовні моменти часу i , таким чином, розрахувати поле їх масових концентрацій [51].

Після визначення поля концентрацій можна визначити ефективну в'язкість μ_{eff} нанорідини, яка, таким чином, стає неоднорідною внаслідок ефекту агрегації наночастинок [130]:

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\mu_{\text{bf}}}{1 - \alpha (d_p / d_f)^{-0.3} C_p^{1.03}},$$

де M_{bf} і $d_f = (6M_{\text{bf}} / \pi N_A \rho_{\text{bf}})^{1/3}$ – молекулярна маса і еквівалентний діаметр базової рідини, N_A – число Авогадро, $\alpha = \text{const}$.

У зсувному потоці суспензії на тверді сферичні частинки діє сила Магнуса $\vec{f}_p$ [152]:

$$\vec{f}_p = -6\pi\mu a(\vec{v}_p - \vec{v}_\infty) + \pi\mu a^3 \Delta \vec{v}_\infty - \pi\rho a^3 (\vec{\omega}_p - \vec{\Omega}_\infty) \times (\vec{v}_p - \vec{v}_\infty) - \frac{2\pi\rho a^3}{3} \left(\frac{d(\vec{v}_p - \vec{v}_\infty)}{dt} + \frac{9}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\pi\rho}} \int_{-\infty}^t \frac{d(\vec{v}_p - \vec{v}_\infty)}{d\tau} \times \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \right),$$

де перший доданок відповідає силі опору Стокса, другий – поправці на кривизну профілю швидкості за відсутністю частинок $\vec{v}_\infty$, третій – силі Магнуса, що діє на частинку, яка обертається в потоці рідини, четвертий – інерції рідини, п'ятий – в'язкому тертю при нестационарному обтіканні частинок рідиною, де $\vec{\Omega}_\infty = \text{rot}(\vec{v}_\infty)$ [130].

Внаслідок сили Магнуса частинки виштовхуються із пристінного шару і, таким чином, поблизу стінок утворюється шар з малою концентрацією частинок, який, відповідно, має меншу в'язкість, ніж ядро течії, яке містить більшу кількість частинок. Отже, течії нанорідин можна розглядати як багат шарові течії, де уздовж стінок каналів розташовані шари з малою концентрацією частинок і меншою в'язкістю, ніж в ядрі течії. Аналогічний ефект для суспензій мікрочастинок відомий як ефект Фареуса-Ліндквіста [23], [152]. Присутність цього ефекту в нанорідинах також підтверджена експериментально [54]. Течії нанорідин як багат шарові розглядалися в роботах [19], [20], [184] для випадків течій між коаксіальними трубками кругового перерізу [184] і в течії Куетта між рухомими паралельними пластинами [19]. Огляд моделей для однорідних течій суспензій наведено в [20].

Висновки до розділу 1

В даному розділі розглянуто математичні моделі, які використовуються при описі процесів агрегації, структуроутворення і розділення фаз у біоколоїдах і суспензіях та оснований на рівнянні Смолуховського, його неперервному аналогу і їх численних модифікаціях, що базуються на врахуванні особливостей кінетики агрегації та властивостей твердої і рідкої фаз, достатньо добре описують процеси, що протікають у суспензіях органічних макромолекул, крові та інших біологічних рідинах. Досліджено різні механізми агрегації еритроцитів крові. Крім того, в роботі наведено огляд математичних моделей суспензій частинок, які осідають в похилих трубках, а також розглянуто підхід механіки суцільних середовищ, оснований на двофазній теорії.

Наведено огляд моделей руху і взаємодії мікро- і наночастинок в суспензіях з урахуванням парних сил взаємодії між частинками, а також зовнішніх об'ємних і масових сил, що діють з боку рідини. На основі цих моделей можна визначити ефективну в'язкість і теплопровідність мікро- і

наносуспензії. У моделі можуть бути також враховані електростатичні і магнітні сили.

До основних результатів цього розділу належать:

- Дослідження математичних моделей агрегації, основаних на рівнянні Смолуховського і його модифікаціях.
- Дослідження різних механізмів агрегації біологічних частинок, зокрема, еритроцитів крові.
- Опис континуальних моделей крові з урахуванням агрегації еритроцитів.
- Дослідження математичних моделей суспензій частинок, що осідають у похилих трубках.
- Опис дискретних моделей, які описують динаміку мікро- і наночастинок в суспензіях.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора: [3], [130], [146], [180].

РОЗДІЛ 2

ДОСЛІДЖЕННЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ОСІДАННЯ ЧАСТИНОК СУСПЕНЗІЇ, ЩО АГРЕГУЮТЬ, У ВЕРТИКАЛЬНИХ ТРУБКАХ В НЕОДНОРІДНОМУ ПОЛІ СИЛ (ДВО- ТА ТРИФАЗНА МОДЕЛІ)

2.1 Дослідження гіперболічних квазілінійних систем

В даному розділі досліджуються квазілінійні системи двох і трьох диференціальних рівнянь гіперболічного типу, які описують осідання частинок суспензії, що агрегують. Концентрована суспензія, що складається з твердих частинок та базової рідини, поміщена в тонку довгу трубку в неоднорідному уздовж трубки полі зовнішніх сил. Закони збереження маси та імпульсу у випадку одновимірного осідання в трубці можна сформулювати у вигляді системи квазілінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} = B_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (2.1)$$

де $A_{ij}(t, x, u_1, \dots, u_n)$ і $B_i(t, x, u_1, \dots, u_n)$ – матриця коефіцієнтів і вектор правих частин системи. Рівняння $\det|A_{ij} - \lambda I_{ij}| = 0$, де I_{ij} – одинична матриця, має різні дійсні корені $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ (характеристики).

Як відомо із загальної теорії, якщо яacobіан $J_A(\vec{u}) = |\partial A_{ij}(\vec{u}) / \partial x_j|_{i,j=1, \dots, n}$ має дійсні власні значення і діагональний вид, система (2.1) є гіперболічною. Коли власні значення є різними, (2.1) – сильно гіперболічна, а при недіагональному J_A – слабо гіперболічна і можуть виникати поодинокі розриви [6].

Гіперболічні системи можуть мати розривні розв'язки навіть тоді, коли граничні умови гладкі [170]. Такі розриви називаються кінематичними і повинні задовольняти умовам стрибка та умові ентропії (умові допустимості) [6], [131]. Залежно від типу гіперболічності (2.1), можуть спостерігатися різні типи осідання (Рис. 2.1а,б).

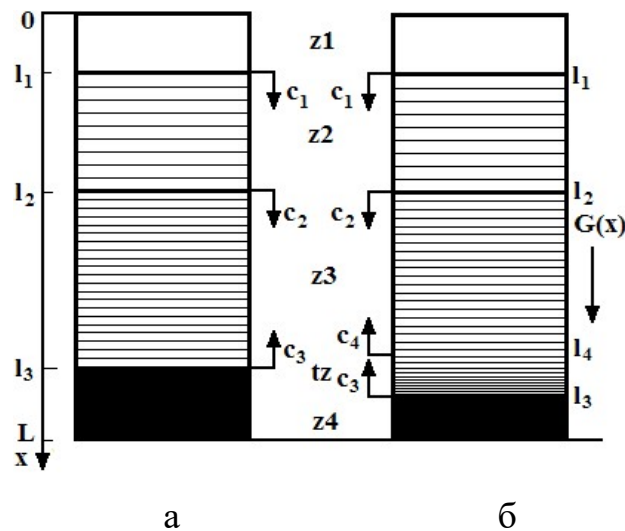


Рис. 2.1 Ескіз різних типів осідання: тип I (а), типи II, III (б); пояснення – у тексті

Тип осідання I відповідає різкій границі $l_1(t)$, яка відокремлює зону базової рідини (z_1) від зони частинок, що осідають (z_2) (Рис. 2.1а), тоді як типи осідання II і III (Рис. 2.1б) ще мають перехідну зону (tz) між зоною агрегатів, які осідають (z_3), і компактною зоною (z_4). У перехідній зоні концентрація агрегатів постійно збільшується у напрямку вниз. Тип осідання II показує стрибок між зоною z_3 та перехідною зоною tz , тоді як у типі III стрибок відсутній. Границі розповсюджуються як кінематичні хвилі, а динаміка суспензії розбивається на два режими (Рис. 2.1а,б): в одному домінантними є лише гідродинамічні взаємодії між частинками (z_2, z_3), а в іншому – взаємодії між частинками, як твердими тілами (z_3, z_4) [6], [131].

Системи рівнянь типу (2.1) описують розповсюдження хвиль у багатофазних [67] і неньютонівських рідинах [37], фільтрацію у пористих середовищах з суфозією [150], кінематичні хвилі в каналах і порожнинах [109], а також седиментацію частинок в полідисперсних суспензіях [3], [6], [154]. Для концентрованих суспензій було показано, що в одновимірному випадку система рівнянь, яка описує розподіл концентрацій та об'ємів частинок, що осідають та агрегують (коагулюють) [6], [154] залишається гіперболічною, якщо коефіцієнт Стоксового опору залежить від розміру і

форми агрегату, при осіданні в полі неоднорідної сили, та при ряді інших ускладнень вихідної одновимірної моделі. Дослідження можливості розв'язування задач теорії коагуляції являє великий інтерес для теорії диференціальних рівнянь [28], а також для сучасних нанонаук, біо- і нанотехнологій [48].

Постановка задачі (2.1) у випадку двофазної суспензії включає рівняння балансу маси частинок з масовою концентрацією C і базової рідини з концентрацією $1-C$ у вигляді [3], [16], [152]:

$$\frac{\partial(1-C)}{\partial t} + \frac{\partial(1-C)u^1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial Cu^2}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

де u^1 і u^2 – швидкості рідини і частинок.

Сума рівнянь (2.2) з урахуванням непротікання суспензії через дно трубки дає співвідношення:

$$u^2 = -(1-C)u_s, \quad (2.3)$$

де $u_s = u^2 - u^1$ – швидкість руху рідини щодо агрегату [154].

Швидкості u^1 і u^2 можуть бути знайдені із рівнянь балансу імпульсів рідини і частинок [153], дискретних рівнянь динаміки частинок [157], або шляхом введення апроксимацій для коефіцієнта $u_s(C)$ з урахуванням ускладнення обтікання частинок, що осідають, в зоні II. Беручи до уваги відому показникову апроксимацію для в'язкості концентрованої суспензії [158]

$$\mu_{eff} = \mu_0(1-C)^{1-n}, \quad (2.4)$$

де μ_0 – в'язкість базової рідини, n – емпіричний коефіцієнт, для $u_s(C)$ приймалося [33]:

$$u_s(C) = \begin{cases} -u_{s0}(1-C)^n, & C \leq C^* \\ 0, & C > C^*, \end{cases} \quad (2.5)$$

де $u_{s0} = 2(\rho_s - \rho_f)gR^2/9\mu_0$ – швидкість осідання сферичних частинок радіуса R при їх Стоксовому обтіканні базовою рідиною, ρ_s, ρ_f – густини частинок і рідини відповідно, g – прискорення вільного падіння, C^* – критична

концентрація, при якій частинки утворюють квазітвердий в'язкопружний каркас і не можуть осідати ($u_s = 0$, а зона z3 переходить в зону z4); тобто на границі між цими зонами виконується умова $C = C^*$, причому часто для простоти приймається, що $C^* = 1$, так що в зоні z4 рух базової рідини також відсутній [33].

У цьому простому випадку обидві характеристики є лініями розриву концентрацій частинок [63]:

$$\frac{dC}{dT} = 0 \quad \text{вздовж} \quad \frac{dX}{dT} = \gamma(C) = \frac{\partial E}{\partial C}, \quad (2.6)$$

де $\gamma(C)$ – рівняння характеристик, $E = Cv^2(C)$ – масовий потік частинок, $X = x/L$ і $T = Lu_{s0}/h$ – безрозмірні поздовжня координата і час, L – висота седиментаційної трубки, а швидкості ліній розриву є (умова Rankine-Hugoniot):

$$Z = \frac{E(C^+) - E(C^-)}{C^+ - C^-} \quad (2.7)$$

де C^+, C^- – концентрації частинок вище і нижче лінії розриву.

Перша характеристика, що відокремлює зони z1 і z2, рухається зі швидкістю $c_1 < 0$ при будь-якому наборі матеріальних параметрів [63]. Вона визначає швидкість седиментації частинок, вимірюваної в експериментах [3], [37], [67], [109], [152], [154]. При низьких концентраціях $c_0 < c^{**}$, де c^{**} є критичним значенням, поперечний переріз характеристик 1-го та 2-го сімейств має позитивну швидкість $c_3 > 0$ (Рис. 2.2а).

Нелінійний потік (2.7) може генерувати центральну хвилю розрідження, що виходить знизу (Рис. 2.2б). Ця хвиля може бути інтерпретована як шар, що складається із перехідної зони, яка виникає над осадом під час процесу осідання [4]. При деяких параметрах режиму і малих зовнішніх силах шар перехідної зони виникає при $t = 0$ і формується набором тонких шарів з поступово підвищеними (від $x = l_4(t)$ до $x = l_3(t)$) концентраціями від $C = C^*$ в z3 до $C = 1$ в z4 (Рис. 2.1б). Наявність або

відсутність розриву при $x=l_4$ визначається додатковою умовою, яку можна задовольнити різними наборами параметрів суспензії та зовнішньою силою.

Коли агрегація досить висока і зовнішня сила монотонно зростає, зона z_4 формується швидко і з'являється інша картина розподілу зон (Рис. 2.2в). Хвиля розрідження представлена віялом кусково-постійних значень, розділених на фронти розповсюдження [4]. У деяких комбінаціях параметрів моделі розрив при $x = l_1+l_2+l_3$ (тип осідання III) також представлений у вигляді структури віяла, що належить хвилі розрідження (Рис. 2.2в). У сильно неоднорідних полях утворюється додатковий стрибок при $x = l_1+l_2+l_4$ (тип осідання II) (Рис. 2.2г). Незважаючи на наш випадок, в рівномірному гравітаційному полі ця структура також рівномірна з підшарами поступово зменшуваних концентрацій, а отже, і густини.

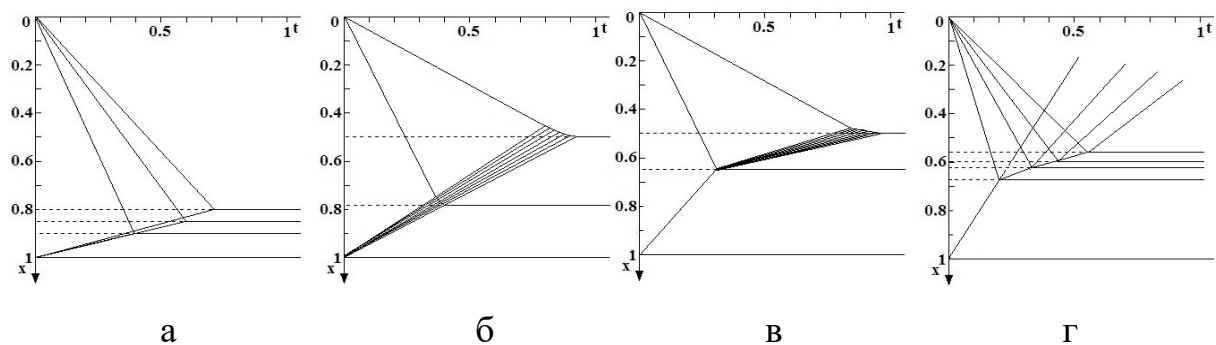


Рис. 2.2 Характеристики першого і другого сімейств характеристик для низьких значень $C_0 = 0,1; 0,15; 0,2$ (а) та високих $C_0 = 0,35; 0,5$ (б), у полі малої (в) та високої (г) інтенсивності зовнішніх сил при $C_0 = 0,4$

Аналогічні варіанти сімейств характеристик були отримані для бідисперсної суспензії [99]. Як було показано в недавно опублікованій статті [124], дискретні рівняння динаміки частинок з урахуванням всіх можливих сил близької взаємодії між ними після усереднення дають рівняння Нав'є-Стокса двофазної суспензії. Аналогічні розрахунки на дискретних моделях суспензії частинок, що осідають та агрегують [129], показали хорошу відповідність континуальним моделям [3], [152], [154].

У більш складних випадках, коли частинки суспензії при агрегації можуть захоплювати частину базової рідини, яка потім у міру осідання поступово фільтрується через пористу поверхню агрегату, задача зводиться до гіперболічної системи із трьох диференціальних рівнянь для масової C та об'ємної H концентрацій агрегатів і середнього об'єму w агрегату (Рис. 2.3а). Подібні властивості проявляють багато біологічних мікрочастинок, наприклад, еритроцити крові (Рис. 2.3б), полімери, наночастинки [37], [109] та ін.

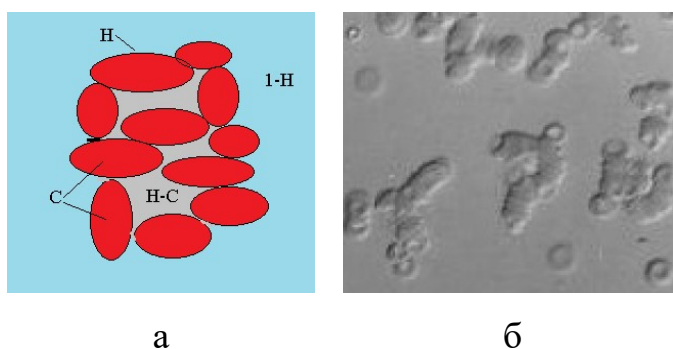


Рис. 2.3 Схема будови агрегату в трифазній рідині (а) на прикладі еритроцитів крові (б)

При цьому в гіперболічних системах виду (2.1), (2.2) для невідомих $\{C, H, w\}$ з'являється третє сімейство характеристик, нахил якого може бути як позитивним, так і негативним, залежно від параметрів моделі [3]. В цьому випадку вивільнення захопленої рідини всередині зони z_t створює складніші структури конструкцій віяла (тип осідання III) з можливістю складних розривів з додатковими структурами (тип осідання II) у кожному підшарі (рис. 2.4) залежно від співвідношень між параметрами моделі. Ці подвійні структури утворені перетинами трьох сімейств характеристик [4].

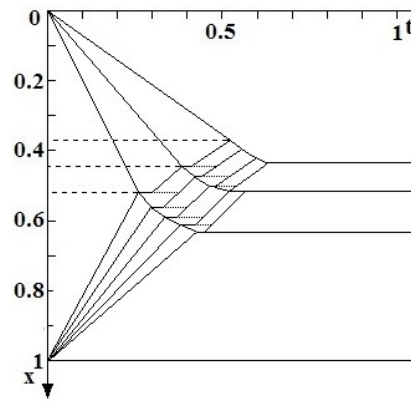


Рис. 2.4 Розподіл 3 сімейств характеристик для трифазних суспензій з високою швидкістю захоплення базової рідини в агрегатах

Для випадку осідання частинок, які агрегують, в похилих трубках у полі неоднорідних сил було показано, що до можливих картин характеристик (Рис. 2.2а–г) можуть додаватися й інші варіанти розташування сімейств характеристик $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ [161], що також підтверджується чисельними розрахунками по вихідній гіперболічній системі континуальної моделі [3], [4] методом кінцевих об'ємів [103]. Оскільки осідання частинок в похилих трубках при певних кутах нахилу призводить до істотного прискорення осідання і розділення сумішей (ефект Бойкотта) і широко використовується в нафтогазових [90], біологічних [30], [121], [152] і нанотехнологіях [37], [109], дослідження таких задач представляє інтерес не тільки для теорії гіперболічних диференціальних рівнянь, а й для розв'язування багатьох прикладних задач. Проведення седиментації в неоднорідному полі відцентрових сил дозволяє пришвидшити процес осідання з утворенням осадів різної змінної густини, які можуть використовуватися для додаткової медичної діагностики в медико-біологічних додатках або для утворення різних наноструктурованих зразків particle-based матеріалів в нанотехнологіях.

2.2 Двофазна модель суспензії частинок, що агрегують, у вертикальних трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил

2.2.1 Постановка задачі

Розглядається модель двофазного середовища, яке складається із твердої і рідкої фаз [167], [169]. В процесі осідання вся область розділяється на чотири різні зони (Рис. 2.5) [152]. У верхній частині трубки є зона, що складається тільки з фази базової рідини (зона I), вільної від частинок, а в нижній – тільки з твердої фази осілих частинок (зона IV). Центральна частина трубки зайнята областю агрегатів, що осідають, в якій присутні обидві фази. Границя розділу між зонами чистої рідини та частинок, що осідають, візуально помітна, в той час, як між середньою і нижньою зонами – практично ні. Слід зазначити, що бувають випадки, коли границя між верхньою та середньою зонами дещо розмита, так що центральну зону візуально і за допомогою оптичної апаратури можна поділити ще на дві зони (Рис. 2.5): зона агрегатів, що осідають (зона II), в якій частинки починають формувати невеликі агрегати з подальшим їх укрупненням. В цій зоні спостерігаються низхідні та висхідні потоки базової рідини з агрегатами. Інша зона – це зона агрегатів, що ущільнюються (III), в якій осідання повільніше, а агрегати не переміщуються з потоками базової рідини, а розташовані у вигляді остову з частинок, при ущільненні якого в полі сили тяжіння рідина фільтрується і спрямовується у зону II. Присутність і протяжність зон дуже залежить від початкової концентрації частинок в суспензії [152].

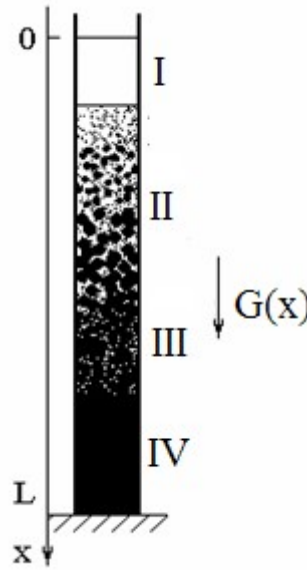


Рис. 2.5 Розподіл окремих зон при осіданні частинок суспензії у вертикальній трубці

Припустимо, що процеси агрегації характеризуються функцією розподілу частинок в одиниці об'єму суспензії $f(v, w, t, \vec{r})$. Тоді $f(v, w) dv dw$ – це число агрегатів з об'ємом $W \in [w, w + dw]$. При такому описі числова N і об'ємна H концентрації агрегатів будуть, відповідно [154]:

$$N(t, \vec{r}) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(t, \vec{r}, v, w) dv dw,$$

$$H(t, \vec{r}) = \int_0^\infty \int_0^\infty w \cdot f(t, \vec{r}, v, w) dv dw.$$

Для кожної із фаз можемо записати рівняння балансу маси, імпульсу і числової концентрації агрегатів N [167], [169]:

$$\frac{\partial \rho^1}{\partial t} + \frac{\partial \rho^1 u^1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho^2}{\partial t} + \frac{\partial \rho^2 u^2}{\partial x} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\rho^1 du^1}{dt} = -\frac{\partial p^1}{\partial x} + \rho^1 G + R^1, \quad \frac{\rho^2 du^2}{dt} = -\frac{\partial p^2}{\partial x} + \rho^2 G + R^2, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial Nu^2}{\partial x} = \varphi, \quad (2.10)$$

де індекси 1 і 2 відносяться до рідкої і твердої фаз, ρ^1, ρ^2 і u^1, u^2 – ефективні густини і швидкості фаз, R^1, R^2 – сили міжфазової взаємодії, p^1, p^2 – гідростатичні тиски.

Процес осідання частинок розглядається у полі відцентрових сил. В цьому випадку $G(x)$ має вигляд:

$$G(x) = \omega^2(x + a) = 4\pi^2\nu^2(x + a),$$

де ω – кутова швидкість, ν – частота обертання центрифуги, a – відстань від центру обертання до пазів з трубками.

Ефективні густини частинок та базової рідини можна записати як:

$$\rho^1 = (1 - H)\rho_f, \rho^2 = H\rho_s, \quad (2.11)$$

де ρ_s, ρ_f – справжні густини. Будемо вважати, що протягом всього процесу осідання температура постійна, а частинки не деформуються. Тоді компоненти тензорів напружень і сил міжфазової взаємодії набувають вигляду [137], [153]:

$$\begin{aligned} p^1 &= (1 - H)p, \quad p^2 = Hp, \\ R^2 &= -R^1 = -F(u^2 - u^1) + p \frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

де p – невизначений множник, що має зміст і розмірність тиску; F – феноменологічний коефіцієнт, загальний вигляд якого можна отримати із теорії розмірностей. Припустимо, що F залежить від трьох розмірних параметрів: характерного лінійного розміру l агрегатів, утворених з частинок, в'язкості базової рідини η_f та числової концентрації N , а також, можливо, від безрозмірних параметрів, що характеризують геометричні властивості агрегатів. У цьому випадку, з огляду на те, що $H \cong Nw_s \cong Nl^3$, будемо мати:

$$F = \eta_f N (H / N)^{1/3} f(H). \quad (2.13)$$

Безрозмірну функцію $f(H)$ на підставі результатів віскозиметрії можемо записати наступним чином [152]:

$$f(H) = (1-H)^{-2/5}.$$

Рівняння (2.8) з урахуванням (2.11) запишемо у вигляді:

$$-\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(1-H)u^1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu^2}{\partial x} = 0. \quad (2.14)$$

Оскільки на дні седиментаційної трубки виконується умова непротікання, отримаємо швидкість осідання частинок:

$$u^1 = -\frac{H}{1-H} u^2 \quad (2.15)$$

Враховуючи (2.8), (2.12) і (2.15), рівняння руху для фази частинок набуде вигляду:

$$\left[(1-H)\rho_s + H\rho_f \right] \frac{dHu^2}{dt} = (1-H)H(\rho_s - \rho_f)4\pi^2 v^2 (x+a) - Fu^2 / (1-H). \quad (2.16)$$

У зв'язку з тим, що характерний час, протягом якого встановлюється квазістаціонарне осідання, для частинок має порядок 10^{-6} с [155], що вкрай мало в порівнянні з часом осідання, похідною за часом у (2.16) можна знехтувати. Враховуючи це, отримаємо вираз для швидкості осідання твердої фази [137], [153]:

$$u^2 = \frac{(1-H)^{2,4} H (\rho_s - \rho_f) 4\pi^2 v^2 (x+a)}{\eta_f N (H/N)^{1/3}}. \quad (2.17)$$

Вираз для швидкості агрегації частинок ϕ , що входить до (2.10), із теорії коагуляції крапель має вигляд [155]:

$$\phi = -kN^2. \quad (2.18)$$

Перепишемо вираз для швидкості осідання твердої фази, враховуючи, що середній об'єм агрегату $w = H/N$:

$$u^2 = \frac{(1-H)^{2,4} w^{2/3} (\rho_s - \rho_f) 4\pi^2 v^2 (x+a)}{\eta_f}. \quad (2.19)$$

Рівняння балансу (2.10) набуде вигляду:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u^2 \frac{\partial w}{\partial x} = kH \quad (2.20)$$

Враховуючи (2.19), (2.20), а також рівняння нерозривності для фази частинок, отримуємо систему квазілінійних рівнянь першого порядку в

частинних похідних [137]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} + u^2 \frac{\partial w}{\partial x} &= kH; \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu^2}{\partial x} &= 0; \\ u^2 &= \frac{(1-H)^{2,4} w^{2/3} (\rho_s - \rho_f) 4\pi^2 v^2 (x+a)}{\eta_f}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Початкові і граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned}H(0, x) &= H_0, w(0, x) = w_0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq L; \\ u^2(t, L) &= 0 \quad \text{при } t \geq 0,\end{aligned}\tag{2.22}$$

де L – початкова висота стовпця частинок, що осідають.

2.2.2 Аналіз властивостей системи та її розв’язків

Оскільки $G = G(x)$, то швидкість $u^2 = u^2(H, w, x)$. Тоді в матричній формі система (2.21) запишеться так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w \\ H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^2 & 0 \\ H \frac{\partial u^2}{\partial w} & u \left(1 + \frac{H}{u^2} \frac{\partial u^2}{\partial H} \right) \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kH \\ -\zeta H \end{pmatrix},\tag{2.23}$$

$$\text{де } \zeta = \frac{\partial u^2}{\partial x}.$$

Система (2.21) є гіперболічною, тому її розв’язок може бути знайдений методом характеристик. Спочатку введемо безрозмірні величини:

$$\begin{aligned}X &= x / L, \quad T = tu_0 / L, \quad W = w / w_0, \quad K = kL / (w_0 u_0), \\ V &= \frac{u^2}{u_0} = (1-H)^{4,5} W^{2/3} 4\pi^2 v^2 L (X + a / L),\end{aligned}\tag{2.24}$$

де $u_0 = \delta \rho w_0^{2/3} / \eta_f$ – швидкість осідання одиничної частинки у базовій рідині, а w_0 – об’єм одиничної частинки. Власні значення λ_1, λ_2 матриці даної системи є дійсними величинами:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (1-H)^{4,5} W^{2/3} 4\pi^2 v^2 L (X + a / L), \\ \lambda_2 &= (1-5.5H)(1-H)^{3,5} W^{2/3} 4\pi^2 v^2 L (X + a / L).\end{aligned}$$

Тоді отримаємо рівняння характеристик та умови на них:

$$\begin{aligned}
I. \quad \left(\frac{dX}{dT} \right)_I &= (1-H)^{4.5} W^{2/3} 4\pi^2 v^2 L(X+a/L); \\
II. \quad \left(\frac{dX}{dT} \right)_{II} &= (1-5.5H)(1-H)^{3.5} W^{2/3} 4\pi^2 v^2 L(X+a/L).
\end{aligned}
\tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
I. \quad \left(\frac{dW}{dT} \right)_I &= KH; \\
II. \quad \left(\frac{dH}{dT} \right)_{II} &= -H(1-H)^{4.5} W^{2/3} 4\pi^2 v^2 L.
\end{aligned}
\tag{2.26}$$

Система (2.21) допускає два розриви, умови на яких можна записати у вигляді:

$$W^I = W^{II}, \quad H^I (Z(H^I) - Z) = H^{II} (Z(H^{II}) - Z) \quad \text{на першому розриві};$$

$$W^{III} = W^{IV}, \quad H^{III} (Z(H^{III}) - Z) = H^{IV} (Z(H^{IV}) - Z) \quad \text{на другому розриві},$$

де Z – швидкість розриву, а індекси I, II, III, IV відповідають номерам зон. Пояснення щодо розміщення границь, які розділяють різні зони осідання, детально викладені на початку даного розділу.

На основі двофазної математичної моделі в роботі [153] було отримано вираз для часу досягнення максимальної швидкості осідання частинок $t_{\max}$:

$$t_{\max} = \frac{1}{kH_0} \left[\left(\frac{5kH_0 f(H_0)}{3[1-\gamma(H_0)](1-H_0)^2} + 1 \right)^{0.6} - 1 \right], \tag{2.27}$$

де $\gamma(H) = 1 + (H/w) / (\partial w / \partial H)$.

За допомогою чисельних розрахунків отримано залежності $t_{\max}(H_0)$ і $t_{\max}(\varphi)$ при різних фізіологічних значеннях H_0 і φ (Рис. 2.6). Як можна бачити, показник $t_{\max}$ слабо залежить від концентрації частинок і агрегатів у вихідній пробі суспензії, а визначається, в основному, агрегаційною можливістю частинок, величина якої значно змінюється при захворюваннях.

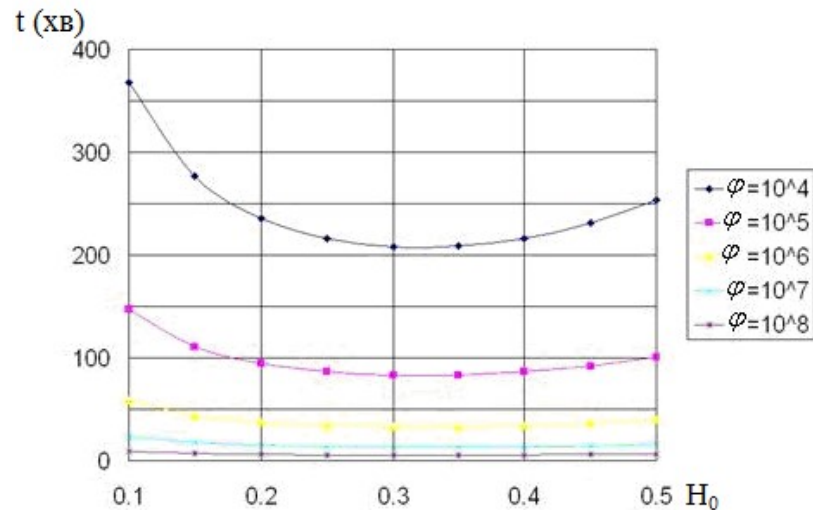


Рис. 2.6 Залежність показника $t_{\max}$ від швидкості агрегації частинок φ при різних значеннях початкової концентрації агрегатів H_0

Крім того, були проведені порівняння показника $t_{\max}$, отриманого за допомогою формули (2.27), з часом досягнення максимальної швидкості осідання за даними експериментів [143], [149], [178]. Результати показали добру відповідність між ними. Отже, на основі даної моделі можна проводити оцінку різних фізіологічних величин.

2.3 Трифазна модель суспензії частинок, що агрегують, у вертикальних трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил

Двофазна модель суспензії (2.21) не враховує захоплену всередині агрегату базову рідину, яка утримується в ньому внаслідок адсорбції. Наприклад, в суспензії крові навіть після центрифугування в утвореному осаді еритроцитів міститься 2–4 % захопленої плазми крові. При гравітаційному осіданні частка захопленої базової рідини може бути значно вище, залежно від поверхневого заряду та адгезивних властивостей клітинної поверхні. Агрегати, що містять велику частку захопленої рідини, істотно відрізняються від компактних агрегатів, що містять незначний об'єм рідини, в тому числі за оптичними властивостями. Саме тому з метою детального дослідження осідання та агрегації частинок з урахуванням захоплення

базової рідини в агрегатах будемо розглядати трифазну модель суспензії частинок, що агрегують, у неоднорідному полі сил. Відповідний термодинамічний підхід був запропонований в роботі [154]. Але відмінність математичної постановки даної задачі від відомих полягає в тому, що система рівнянь розв'язується в області, яка має дві рухомі границі з крайовими умовами на них, що розрізняються. Крім того, в даній роботі зачіпається одна з основних проблем, а саме дослідження еволюційності (стійкості) сильних розривів, що виникають. Розв'язання цієї проблеми пов'язано з аналізом співвідношень для характеристичних швидкостей і швидкості переміщення поверхні розриву [136], [185].

У випадку трифазної суспензії до концентрацій N і H додається істинна об'ємна (без врахування захопленої рідини) концентрація агрегатів C , яка визначається як $C = W - V$, де $V \in [v, v + dv]$ – об'єм частинок [154]:

$$C(t, \vec{r}) = \int_0^\infty \int_0^\infty (w - v) \cdot f(t, \vec{r}, v, w) dv dw.$$

При цьому рівняння балансу маси, імпульсів та кінетики процесів агрегації мають вигляд [154], [165], [169]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^\alpha \vec{u}^\alpha) &= \theta^\alpha, \\ \rho^\alpha \frac{d\vec{u}^\alpha}{dt} &= -\nabla p^\alpha + \rho^\alpha \vec{F}^\alpha + \vec{R}^\alpha, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N \vec{u}^2) = -\varphi, \quad (2.29)$$

де φ – швидкість утворення агрегатів (негативна функція, оскільки припускаючи, що в початковий момент числова концентрація агрегатів $N = N_0$, де N_0 – число одиничних частинок, то в процесі агрегації N зменшується), значення $\alpha = 1, 2, 3$ відповідають фазам базової рідини, частинок і захопленої рідини відповідно, $\vec{u}^\alpha$ – швидкості руху, p^α – гідростатичний тиск фаз; θ^α – швидкості міжфазового масообміну ($\theta^2 = 0, \theta^3$ – швидкість захоплення рідини в агрегатах, $\theta^1 = -\theta^3$); $\vec{F}^\alpha$ – густини зовнішніх масових сил; $\vec{R}^\alpha$ – об'ємні сили міжфазової взаємодії.

Запропонований підхід до опису агрегації і термодинамічна модель суспензії [165], [169] використовувалися при розрахунках утворення агрегатів еритроцитів в полі звукової хвилі, що стоїть [155], гравітаційного осідання агрегатів у зсувному потоці [156], течії суспензії в каналі з проникними стінками [159], осідання намагнічуваних частинок, що агрегують у зовнішньому однорідному і неоднорідному магнітному полях [141] і ряді інших задач. Було показано добру відповідність теоретичних розрахунків з результатами експериментів за течією крові в щілині ротаційного віскозиметра [156], апаратах для штучної оксигенації крові [159] і численним експериментам з агрегації та осідання клітин крові в зовнішніх електромагнітних полях [141].

2.3.1 Постановка задачі

Розглядається осідання частинок суспензії під дією відцентрових сил у квазіодновимірній постановці. Оскільки трубка, в якій знаходиться досліджувана суспензія, тонка ($d \ll L$), припускаємо осідання лише вздовж осі θx (Рис. 2.5).

Запишемо рівняння балансу маси в одновимірній формі. Враховуючи (2.29), отримаємо [154], [165], [169]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(1-H)u^1}{\partial x} &= -\theta, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial Cu^2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(H-C)}{\partial t} + \frac{\partial(H-C)u^3}{\partial x} &= \theta, \end{aligned} \quad (2.30)$$

де $\theta = \theta^3 / \rho_f$. На відміну від рівнянь (2.14), у (2.30) входить рівняння балансу маси для фази 3, а також враховується масообмін між фазами базової і захопленої в агрегатах рідини [144], [147].

Додаємо рівняння (2.30) і отримуємо умову нестисливості суспензії:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((1-H)u^1 + Cu^2 + (H-C)u^3 \right) = 0. \quad (2.31)$$

Записуючи (2.31) в проекції на вісь $0x$ і враховуючи умову непротікання суспензії крізь дно трубки, отримаємо зв'язок між швидкостями фаз:

$$(1-H)u^1 + Cu^2 + (H-C)u^3 = 0. \quad (2.32)$$

Рівняння балансу маси для повного числа агрегатів N має вигляд:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial Nu^2}{\partial x} = -\varphi, \quad (2.33)$$

а рівняння імпульсів в проекції на вісь $0x$ записуються у формі [148], [179]:

$$\begin{aligned} -(1-H)\frac{\partial p}{\partial x} + F(u^2 - u^1) + (1-H)\rho_f G(x) &= 0, \\ -C\frac{\partial p}{\partial x} - F(u^2 - u^1) - D(u^2 - u^3) + C\rho_s G(x) &= 0, \\ -(H-C)\frac{\partial p}{\partial x} + D(u^2 - u^3) + (H-C)\rho_f G(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

де F – коефіцієнт Стоксового опору агрегату, що рухається в рідині, D – коефіцієнт, який описує проникність пористого каркаса осілих агрегатів для рідини, що фільтрується через нього, $G(x)$ – поле відцентрових сил.

Додаємо рівняння (2.34) для фаз і отримуємо рівняння імпульсів для суспензії:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = ((1-C)\rho_f + C\rho_s)G(x).$$

Осідання частинок суспензії розглядається в неоднорідному полі сил, а саме в полі відцентрових сил при обертанні центрифуги для автоматичного вимірювання швидкості осідання частинок. В цьому випадку $G(x) = \omega^2(x+a) = 4\pi^2\nu^2(x+a)$, де ω – кутова швидкість, ν – частота обертання центрифуги, a – відстань від центру диску, через який проходить вісь обертання, до пазів з трубками. В разі гравітаційного осідання $G = g$.

З (2.32), (2.34) отримуємо вирази для швидкостей фаз, які виражаються у явному вигляді через змінні x , w , H , C :

$$\begin{aligned}
u^1 &= \left[-\frac{H(1-H)}{F} + \frac{(H-C)^2}{D} \right] C(\rho_s - \rho_f) 4\pi^2 v^2 (x+a), \\
u^2 &= \left[\frac{(1-H)^2}{F} + \frac{(H-C)^2}{D} \right] C(\rho_s - \rho_f) 4\pi^2 v^2 (x+a), \\
u^3 &= \left[\frac{(1-H)^2}{F} - \frac{(H-C)(1-H+C)}{D} \right] C(\rho_s - \rho_f) 4\pi^2 v^2 (x+a).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Підставляючи (2.35) в (2.30), отримаємо систему квазілінійних рівнянь відносно концентрацій C, H, N .

Введемо замість числової концентрації N середній об'єм агрегату $w = C/N$. Тоді отримаємо систему квазілінійних рівнянь відносно C, H та w :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} + u^2 \frac{\partial w}{\partial x} &= \varphi \frac{w^2}{C}, \\
\frac{\partial H}{\partial t} + \gamma_{11} \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_{12} \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_{13} \frac{\partial w}{\partial x} &= \theta + k_1 (1-H), \\
\frac{\partial C}{\partial t} + \gamma_{21} \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma_{22} \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_{23} \frac{\partial w}{\partial x} &= -k_2 C, \\
\gamma_{11} = u^1 - (1-H) \frac{\partial u^1}{\partial H}, \quad \gamma_{12} = -(1-H) \frac{\partial u^1}{\partial C}, \quad \gamma_{13} = -(1-H) \frac{\partial u^1}{\partial w}, \\
\gamma_{21} = C \frac{\partial u^2}{\partial H}, \quad \gamma_{22} = u^2 + C \frac{\partial u^2}{\partial C}, \quad \gamma_{23} = C \frac{\partial u^2}{\partial w}, \quad k_{1,2} = \frac{\partial u^{1,2}}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Вид залежностей F, D, φ, θ від C, H, w може бути визначено, наприклад, за допомогою теорії розмірностей, а безрозмірні коефіцієнти оцінені на основі емпіричних даних [141], [155], [156], [159]. Для подальшого розв'язку конкретизуємо вид F і D , виходячи з міркувань теорії розмірностей. Будемо вважати, що F залежить від двох розмірних параметрів: середнього об'єму агрегатів v , в'язкості рідини η_f , а також від концентрацій H, C і безрозмірних параметрів χ_i , що характеризують геометричні властивості агрегатів. Аналогічно D залежить від двох розмірних параметрів: η_f , об'єму одиничної частинки w_0 , а також від H, C і безрозмірних параметрів ξ_i , що характеризують геометричні властивості частинок і структуру агрегатів [154], [155], [156], [159], [169].

В результаті аналізу розмірностей отримаємо:

$$\begin{aligned} F &= \eta_f v^{-2/3} \phi_1(H, C, \chi_i), \\ D &= \eta_f w_0^{-2/3} \phi_2(H, C, \xi_i), \end{aligned} \quad (2.38)$$

де ϕ_1, ϕ_2 – безрозмірні функції. Далі будемо вважати:

$$\phi_1 = \alpha H (1-H)^{-\eta_1}, \quad \phi_2 = \beta C (1-C/H)^{-\eta_2}$$

де $\alpha, \beta, \eta_1, \eta_2$ – постійні позитивні коефіцієнти. Тоді після заміни $w = Hv/C$ вирази (2.38) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} F &= \alpha \eta_f H (1-H)^{-\eta_1} (H/C)^{2/3} w^{-2/3}, \\ D &= \beta \eta_f C (1-C/H)^{-\eta_2} w_0^{-2/3}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Початкові і граничні умови задачі (2.36) мають вигляд:

$$\begin{aligned} t=0: \quad H(0, x) &= H_0, \quad C(0, x) = C_0, \quad w(0, x) = w_0 \\ x=L, t \geq 0: \quad u^{1,2}(t, L) &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.3.2 Аналіз властивостей системи та її розв'язків

Запишемо систему (2.36) у матричній формі:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w \\ H \\ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ \gamma_{13} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{23} & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ H \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\phi w^2}{C} \\ \theta + k_1(1-H) \\ -k_2 C \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Дана система гіперболічна при характерних значеннях визначальних параметрів. Тому для її аналізу і розв'язання ефективним виявляється метод характеристик. Власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матриці в системі (2.41) є дійсними величинами:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u^2, \\ \lambda_{2,3} &= \frac{(\gamma_{11} + \gamma_{22}) \pm \sqrt{(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + 4\gamma_{12}\gamma_{21}}}{2}. \end{aligned}$$

Тоді характеристичні швидкості та умови вздовж характеристик виражаються у вигляді:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 &= u^2, \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{2,3} &= \frac{(\gamma_{11} + \gamma_{22}) \pm \sqrt{(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + 4\gamma_{12}\gamma_{21}}}{2}; \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dt}\right)_1 &= \varphi \frac{w^2}{C}, \\ \left(\left(\frac{dH}{dt}\right)_{2,3} - \theta - k_1(1-H)\right) &\left(\frac{(\gamma_{11} + \gamma_{22}) \pm \sqrt{(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + 4\gamma_{12}\gamma_{21}}}{2} - \gamma_{22}\right) + \\ &+ \gamma_{12} \left(k_2 C + \left(\frac{dC}{dt}\right)_{2,3}\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} u_s &= (1-H)^2 C(\rho_s - \rho_f) 4\pi^2 v^2 (x+a) / F, \\ u_f &= (H-C)^2 C(\rho_s - \rho_f) 4\pi^2 v^2 (x+a) / D. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Тоді $u^1 = -Hu_s / (1-H) + u_f$, $u^2 = u_s + u_f$. Згідно (2.37) маємо:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= u_s + u_f + H \frac{\partial u_s}{\partial H} - (1-H) \frac{\partial u_f}{\partial H}, \\ \gamma_{12} &= H \frac{\partial u_s}{\partial C} - (1-H) \frac{\partial u_f}{\partial C}, \\ \gamma_{21} &= C \frac{\partial u_s}{\partial H} + C \frac{\partial u_f}{\partial H}, \\ \gamma_{22} &= u_s + u_f + C \frac{\partial u_s}{\partial C} + C \frac{\partial u_f}{\partial C}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Підставляючи ці вирази в (2.42) і (2.43), а також враховуючи (2.44), отримаємо рівняння характеристик і умови на них:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 &= u_s + u_f, \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{2,3} &= u_s + u_f + \frac{1}{2} A \left(1 \pm \sqrt{1 - B / A^2}\right); \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \varphi \frac{w^2}{C}, \\ \frac{1}{2} \left[A_1 (1 \pm \sqrt{1 - B / A^2}) - A_2 (1 \mp \sqrt{1 - B / A^2}) \right] &\left(\left(\frac{dH}{dt}\right)_{2,3} - \theta - k_1(1-H)\right) + \\ &+ \gamma_{12} \left(k_2 C + \left(\frac{dC}{dt}\right)_{2,3}\right) = 0, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\text{де } A_1 = H \frac{\partial u_s}{\partial H} - (1-H) \frac{\partial u_f}{\partial H}, A_2 = C \frac{\partial u_s}{\partial C} + \frac{\partial u_f}{\partial C}, A = A_1 + A_2, B = 4C \left(\frac{\partial u_s}{\partial H} \frac{\partial u_f}{\partial C} - \frac{\partial u_s}{\partial C} \frac{\partial u_f}{\partial H} \right).$$

З (2.44) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial H} &= -\frac{1+(3\eta_1+5)H}{2H(1-H)} u_s, & \frac{\partial u_s}{\partial C} &= \frac{1}{3C} u_s, \\ \frac{\partial u_f}{\partial H} &= \frac{2+3\eta_2 C/H}{H-C} u_f, & \frac{\partial u_f}{\partial C} &= -\frac{2+\eta_2}{H-C} u_f. \end{aligned}$$

Звідси з урахуванням (2.44) отримаємо коефіцієнти, що входять у вирази (2.46), (2.47), у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1+(3\eta_1+5)H}{3(1-H)} u_s - \frac{(2+\eta_2 C/H)(1-H)}{H-C} u_f, \\ A_2 &= \frac{1}{3} u_s - \frac{(2+\eta_2)C}{H-C} u_f, \\ A &= -\frac{(\eta_1+2)H}{1-H} u_s - \left[\frac{2(1-H+C)+\eta_2 C/H}{H-C} \right] u_f, \\ B &= \frac{4C}{H-C} \left[\frac{1+(3\eta_1+5)H}{3H(1-H)} (2+\eta_2) - \frac{(2+\eta_2 C/H)}{3C} \right] u_s u_f, \\ \gamma_{12} &= \frac{H}{3C} u_s + \frac{(1-H)(2+\eta_2)}{H-C} u_f. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Ми маємо нестандартну гіперболічну задачу з границями, що рухаються. Їх рухливість значно ускладнює процедуру пошуку розв'язку. Рівняння першого сімейства характеристик збігаються з рівняннями траєкторій частинок твердої фази (аналогічно контактним характеристикам в газовій динаміці), а криві мають негативний нахил. Тому границя, яка відокремлює зону частинок, що осідають, від області, зайнятої нерухомою чистою рідиною, рухається зі швидкістю u^2 тих частинок (агрегатів), які на ній знаходяться (крива 1 на рис. 2.7). При цьому ефективні густини і швидкості фаз на даній границі зазнають розриву.

Відповідно до системи (2.36)–(2.37) умови на даному розриві мають вигляд:

$$Z_{I-II} = u_{II}^2, \quad (1-H_{II})u_{II}^1 = -H_{II}u_{II}^2, \tag{2.49}$$

де римські індекси позначають параметри з різних сторін розриву, а Z_{I-II} – швидкість розповсюдження розриву між зонами I і II. Умови для w і C не ставимо, оскільки у зоні I $w = 0$, $C = 0$.

У третього сімейства характеристик нахил позитивний $(dx/dt)|_3 > 0$. На відміну від границі між зонами I та II, зовсім інакша справа з постановкою крайових умов на границі компактної зони. Залежно від співвідношень між характеристичними швидкостями та швидкістю переміщення цієї границі, можуть реалізовуватися різні режими.

Якщо дана границя (крива 5 на рис. 2.7) є сильним розривом, то на ній повинні бути виконані відповідні умови для граничних значень величин при підході до розриву з одного та іншого боку:

$$\begin{aligned} w_{III} &= w_{IV}, \quad (1 - H_{IV})Z_{III-IV} = (1 - H_{III})(Z_{III-IV} - u_{III}^1) \\ Z_{III-IV}C_{IV} &= (Z_{III-IV} - u_{III}^2)C_{III}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

де Z_{III-IV} – швидкість розповсюдження розриву.

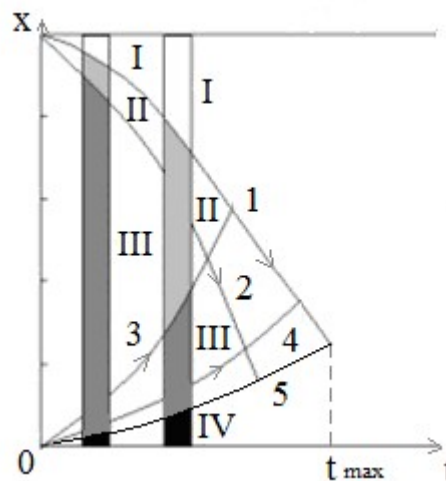


Рис. 2.7 Різні типи динаміки осідання, 1–4 – номери сімейств характеристик, 5 – лінія сильного розриву, I–IV – номери зон суспензії частинок, що осідають

Нахил характеристик другого сімейства $(dx/dt)|_2$ може бути як позитивним, так і негативним, залежно від значень параметрів системи (криві 2 і 3 на рис. 2.7). У першому випадку динаміка процесу осідання описується

характеристиками 1, 3, 4 (Рис. 2.7). У другому – визначається характеристиками 1, 2, 4.

Дослідимо розрив між зонами III та IV на еволюційність. Відповідно до загальної теорії розривних (узагальнених) розв’язків систем квазілінійних рівнянь [136], [185], саме існування еволюційного (що не розпадається на систему хвиль) розриву забезпечується наступною умовою. Число характеристик, що приходять до однієї й тієї ж точки на розриві, має бути таким, щоб в задачі про малі збурення з умов уздовж цих характеристик і заданих умов на розриві однозначно визначалися збурення всіх шуканих величин. Наприклад, якщо по обидва боки від розриву задовольняється одна і та ж гіперболічна система із n квазілінійних рівнянь, то число характеристик, які приходять з одного та іншого боку, має дорівнювати в точності $n+1$. Дійсно, в цьому випадку кількість невідомих дорівнює $2n+1$ (по n невідомих функцій з кожного боку від розриву плюс невідома заздалегідь швидкість розриву), а значить і рівнянь для їх визначення має бути стільки ж. Якщо ж на розриві задаються якісь додаткові умови, то число характеристик, що приходять до розриву, має бути зменшено на їх кількість.

У даній задачі ситуація дещо інша. Основна система рівнянь (2.36)–(2.37) «працює» тільки по одну сторону від розриву, а по іншу стан всіх фаз вважається заданим (маються на увазі густина упакування агрегатів і об’ємний вміст рідини в компактній зоні, тобто величини H_{IV} і C_{IV}). Невідомою в компактній зоні залишається тільки величина w_{IV} , але вона задовольняє умові $w_{IV} = w_{III}$.

Тому для еволюційності розриву необхідно, щоб до розриву приходили характеристики двох сімейств, і тільки характеристики одного сімейства відходили. Відповідно, характеристичні швидкості і швидкість розриву Z_{III-IV} повинні задовольняти наступним нерівностям:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_3 < Z_{III-IV} < \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 \quad (2.51)$$

Якщо цю умову порушено, то сильний розрив на границі з компактною зоною відсутній, оскільки для нього дана умова еволюційності не виконується і він не може бути стійким. Але тоді структура розв'язку має бути іншою. Замість сильного розриву перехід із зони III в зону IV повинен здійснюватися складнішим чином. В нашій задачі процес осідання, що описується характеристиками 1, 2, 4, задовольняє умові (2.51), а тому розрив 5 є еволюційним (Рис. 2.8а). Своєю чергою у випадку з характеристиками 1, 3, 4 дана умова не працює (Рис. 2.8б).

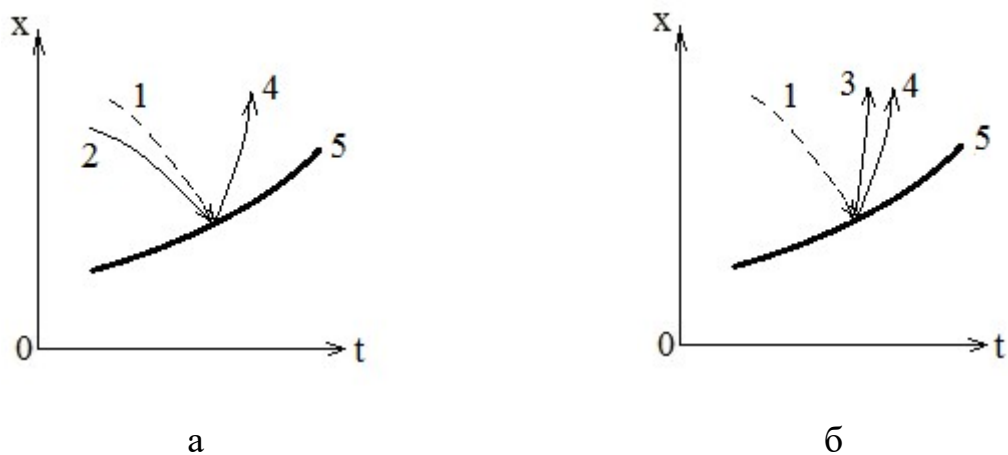


Рис. 2.8 Розташування характеристик щодо лінії сильного розриву: 1, 2, 3, 4 – характеристики, 5 – лінія сильного розриву

Отже, розглянувши властивості розв'язків квазілінійної гіперболічної системи диференціальних рівнянь (2.36)–(2.37), що описують процес осідання і агрегації частинок в умовах неоднорідного поля зовнішніх сил, досліджено умови існування різних типів розв'язків задачі. Ці дані дають можливість дослідити розриви на еволюційність. Отримані результати можуть бути застосовані для розв'язання різних прикладних задач, зокрема, в галузі медицини.

2.3.3 Чисельний розв'язок задачі та аналіз результатів

Результати досліджень показали, що якщо нахил другого сімейства характеристик позитивний, зона агрегатів, що осідають (зона II), з самого

початку процесу осідання має велику протяжність. В ході осідання розмір цієї зони монотонно зменшується, а розмір зони агрегатів, що ущільнюються (зона III на рис. 2.7), збільшується. У випадку негативного нахилу розмита зона II із самого початку осідання невелика, в ході процесу осідання її розмір збільшується, а розмір зони III зменшується. Таким чином, протяжність дифузної розмитої області і динаміка її зміни дозволяє отримати додаткову інформацію, яка може використовуватись у цілях клінічної діагностики.

В силу великого набору розмірних параметрів було отримано ряд різних виразів для швидкості агрегації $\varphi = \varphi(\rho_s, \delta\rho, g, \eta_f, N, E_f, \omega, \xi_i)$, яка залежить від зближення в полі відцентрових сил. В цьому випадку має місце флуктуаційний механізм зближення, для врахування якого вводиться енергія флуктуації E_f . Залежність φ від g додається у зв'язку з особливостями конструкції центрифуги, яка була використана для експериментальних досліджень осідання. В цій центрифугі седиментаційні трубки розташовані в радіальних прорізах диску, який обертається у вертикальній площині. Поле відцентрових сил $G(x)$ може досягати значень $G \sim 600\text{--}2500g$, тоді як сила гравітації складає малий доданок, величина якого залежить від кута нахилу θ трубки до напрямку вектора $\vec{g}$, так що вертикальна компонента цієї сили $f_x(t) = g \cos(\theta(t))$ періодично змінюється від g до $-g$ [177]. В рівняннях руху цією силою можна знехтувати в порівнянні з $G(x)$, але під час агрегації вона може буди додатковим механізмом зближення та агрегатоутворення внаслідок малих збурень суспензії.

В результаті застосування методів теорії розмірностей було отримано досить велику кількість виразів для швидкості агрегації, з яких для детальніших розрахунків були вибрані лінійні та квадратичні залежності по ω :

$$\varphi_1 = \frac{\delta\rho \cdot g}{\eta_f} N^{2/3} f(\xi_j, \Pi_j), \quad \varphi_2 = \frac{\rho_s g N^{1/3} \omega}{\eta_f} f(\xi_j, \Pi_j), \quad \varphi_3 = \frac{N^{5/3} E_f \omega}{\eta_f} f(\xi_j, \Pi_j)$$

$$\varphi_4 = \frac{\delta\rho^{4/3} g^{2/3} N^{2/3} E_f \omega^2}{\eta_f^{7/3}} f(\xi_j, \Pi_j), \quad \varphi_5 = \frac{\delta\rho g^{1/2} N^{5/6} E_f \omega^2}{\eta_f^2} f(\xi_j, \Pi_j),$$

$$\text{де } \Pi_1 = \frac{E_f N}{\delta\rho \cdot g}, \Pi_2 = \frac{g N^{1/3}}{\omega^2}, \Pi_3 = \frac{\delta\rho \omega}{\eta_f N^{2/3}}, \Pi_4 = \frac{E_f N^{5/3}}{\delta\rho \cdot \omega^2}.$$

Отримані результати показують, що з ростом показника при числовій концентрації N швидкість агрегації збільшується. На рис. 2.9а,б наведені сімейства характеристик, розраховані для деяких наборів параметрів задачі. Вертикальна вісь – безрозмірна координата, яка відраховується вздовж трубки від її нижнього перерізу, а горизонтальна вісь – безрозмірний час. При використанні виразів φ_{1-3} і φ_{4-5} отримані лінійні (Рис. 2.9а) і нелінійні (Рис. 2.9б) криві сімейств характеристик. Відповідно до [138] значення часу, при яких лінійні криві сходяться в одній точці, а похідні по часу від нелінійних досягають максимуму, використовуються для оцінки агрегації. Шляхом зіставлення чисельних розрахунків з результатами експериментів з осідання показано, що залежність φ краще за все відповідає кінетиці осідання клітин крові здорової людини [132].

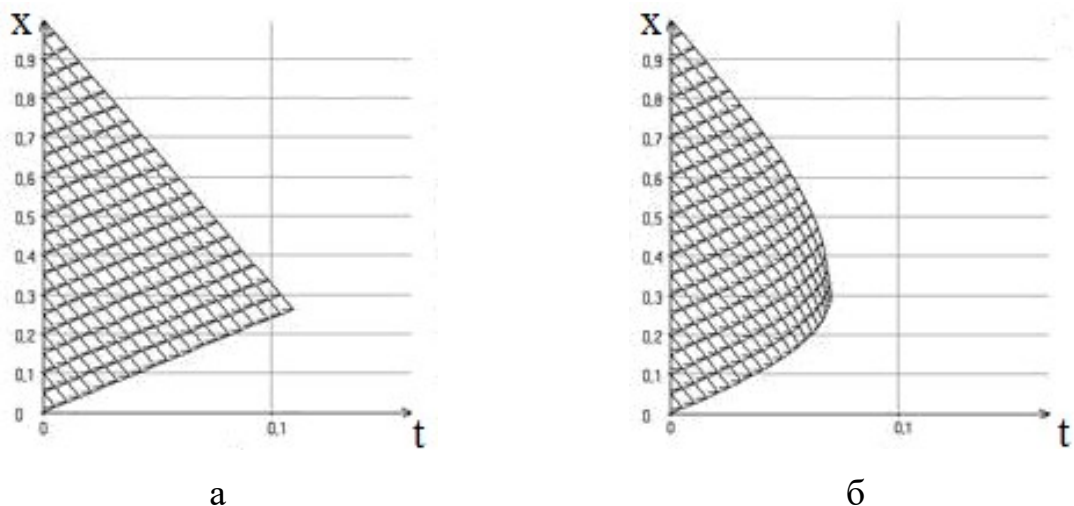


Рис. 2.9 Сімейства лінійних (а) і нелінійних (б) кривих характеристик в координатах (x, t)

Обчислення за системою (2.36)–(2.37) проводилось для моделі крові з такими параметрами [21], [22], [163]:

$$\begin{aligned} H_0 &= 30 \div 50\%, \eta_f = (1.1 \div 1.7) \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, G = g, \\ \rho_f &= 1030 \div 1080 \text{ кг} / \text{м}^3, \rho_s = 1050 \div 1150 \text{ кг} / \text{м}^3, \\ w_0 &= 80 - 95 \cdot 10^{-15} \text{ л}, v = 80 \cdot 10^{-15} - 100 \cdot 10^{-13} \text{ л}, \\ x &= 0,05 - 0,08 \text{ м}, a = 0,01 \text{ м}, v = 25 - 40 \text{ г}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Програмне забезпечення дозволило розрахувати концентрації і швидкості в кожній зоні на основі методу характеристик. Сітка, що складається з трьох сімейств характеристик, зображена на рис. 2.10. Збіжність була досягнута дуже швидко, починаючи з поділу довжини на 20 сегментів. Розташування точки перетину ($t_{\max}$) визначається параметрами моделі [21], [22].

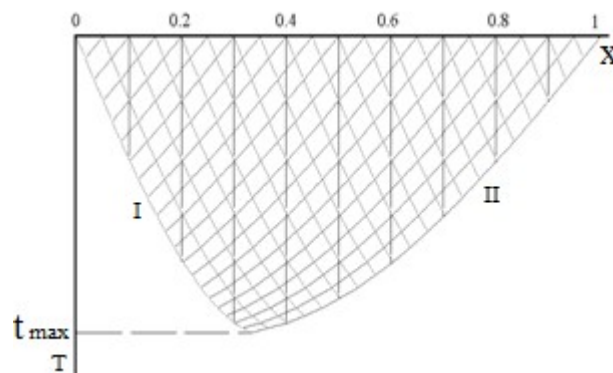
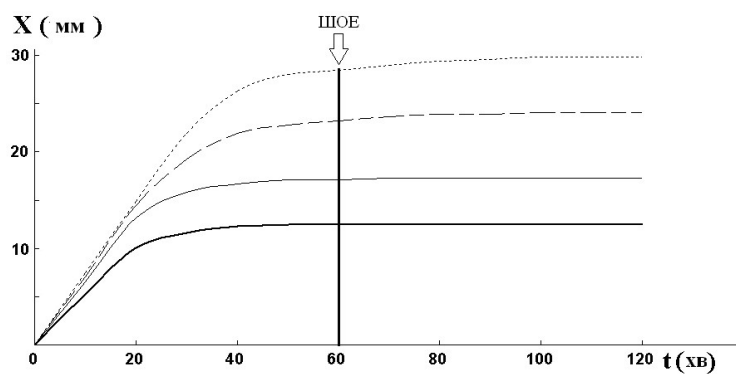
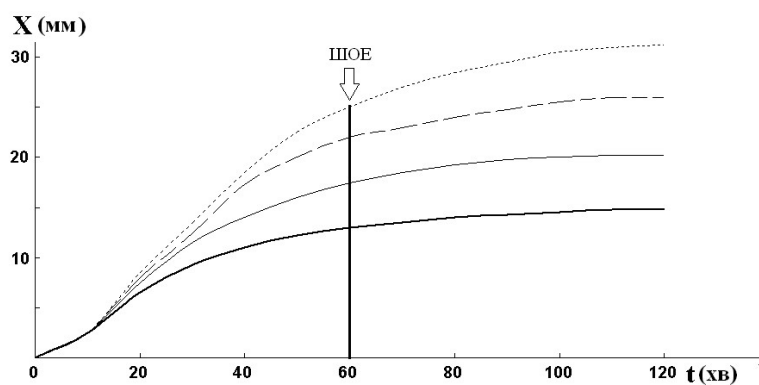


Рис. 2.10 Два сімейства (I і II) характеристик і визначення $t_{\max}$

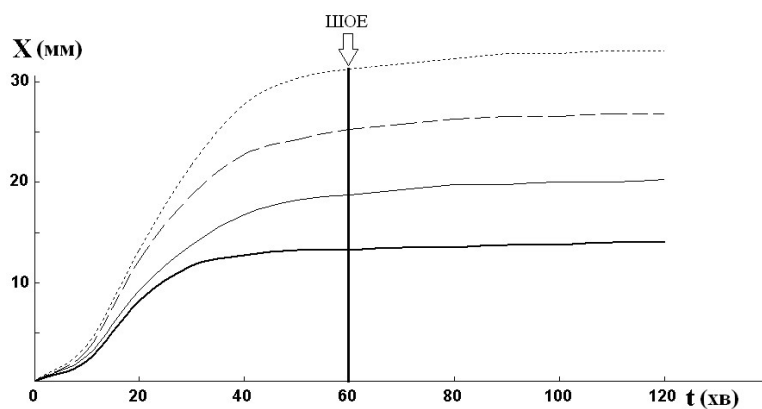
Деякі чисельні результати представлені на рис. 2.11а–в. Спостерігається три типи динаміки седиментації. При деяких комбінаціях модельних параметрів ШОЕ майже лінійно зростає протягом перших 20–35 хв осідання, а потім седиментація практично припиняється (Рис. 2.11а). В інших випадках криві ШОЕ мають S-подібну форму з початковою повільною ШОЕ, що замінюється швидшим осіданням, яке потім сповільнюється до постійної швидкості (Рис. 2.11в). Коли початкове прискорення нелінійне, але без типової S-форми, криві ШОЕ класифікуються як проміжні (Рис. 2.11б).



а

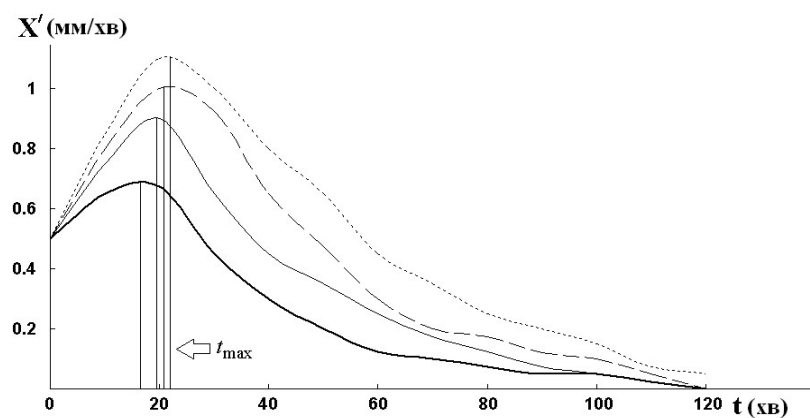


б

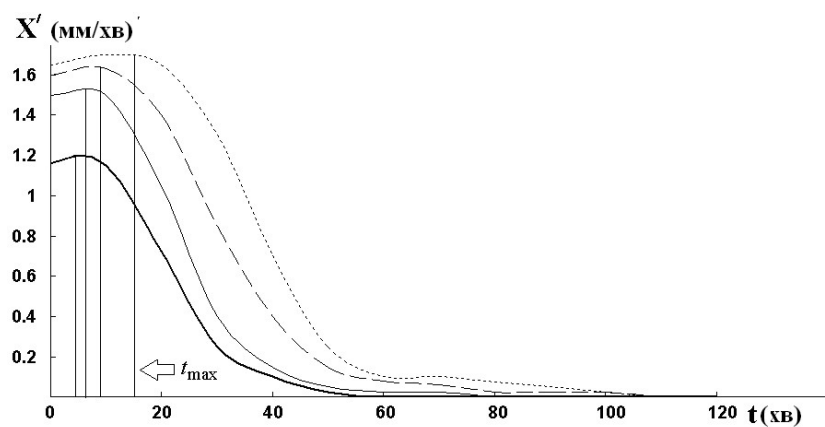


в

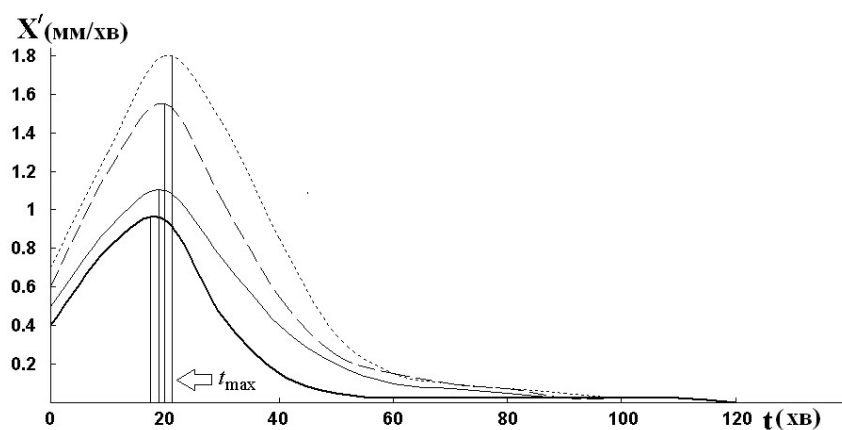
Рис. 2.11 Криві $X(t)$: при $H_0 = 30\%$, $\eta_f = 5 \times 10^{-3} \text{ Pa} \times \text{s}$ (а), $H_0 = 40\%$, $\eta_f = 4 \times 10^{-3} \text{ Pa} \times \text{s}$ (б), $H_0 = 48\%$, $\eta_f = 3 \times 10^{-3} \text{ Pa} \times \text{s}$ (в); при $\varphi = 10^5$ (товста лінія), $\varphi = 10^6$ (тонка лінія), $\varphi = 10^7$ (великопунктирна лінія), $\varphi = 10^8$ (пунктирна лінія)



а



б



в

Рис. 2.12 Криві ШОЕ $X'(t)$: при $H_0 = 30\%, \eta_f = 5 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ (а),
 $H_0 = 40\%, \eta_f = 4 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ (б), $H_0 = 48\%, \eta_f = 3 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ (в); при $\varphi = 10^5$ (товста
 лінія), $\varphi = 10^6$ (тонка лінія), $\varphi = 10^7$ (великопунктирна лінія), $\varphi = 10^8$
 (пунктирна лінія)

Основними факторами, що впливають на початкове прискорення седиментації, є початкова концентрація H_0 , в'язкість η_f і швидкість агрегації еритроцитів φ . При малих концентраціях ($H_0 \leq 35\%$) спостерігається повільне лінійне збільшення $h_1(t)$ (Рис. 2.11а). Значення 60 хв для $h_1(t)$ відповідають зразкам здорових людей при $\varphi = 10^5 - 10^6$, а $\varphi = 10^7 - 10^9$ – значенням $h_1(t)$, що відповідають пневмонії, помірним запаленням та ряду інших захворювань [5], [87]. При низьких початкових концентраціях і підвищеній в'язкості частинок чи/та густині спостерігаються проміжні випадки (Рис. 2.11б). Виходячи з даних обчислень, значення $t_{\max}$ були знайдені з диференціальних кривих $h'(t)$ (Рис. 2.12а–в).

Чисельні розрахунки показали, що характерні значення швидкості агрегації еритроцитів φ , виміряні на контрольній групі, знаходяться в діапазоні $\varphi \in [1.2 \cdot 10^5, 2.9 \cdot 10^7]$, а у пацієнтів з алергією $\varphi \in [9.3 \cdot 10^8, 7.9 \cdot 10^9]$ [21], [59], [132]. Тому можна впевнено стверджувати, що час досягнення максимальної швидкості осідання еритроцитів є важливим діагностичним показником для використання у медичній діагностиці.

На основі трифазної математичної моделі запропоновано новий апаратно-програмний комплекс для автоматичної реєстрації, обробки та аналізу седиментаційних кривих з метою використання в багатьох галузях, в тому числі і медичній діагностиці [131], [181]. Комплекс складається з центрифуги, яка створює неоднорідне поле сил, що прискорюють процес осідання. Реєстрація седиментаційних кривих як висоти стовпчика агрегатів в нижній частині трубки проводиться за допомогою оптичних датчиків. Криві можуть зніматися багаторазово з додаванням чи без додавання різних речовин, зберігатися і оброблятися в базі даних. Тестування цього методу і зіставлення зі стандартними методами підтвердило його ефективність на великому масиві даних [131].

2.4 Дослідження процесів агрегації та осідання методом динаміки частинок

Результати методу характеристик були підтверджені числовими розрахунками дискретним методом динаміки частинок (Particle dynamics method, PDM) або методом молекулярної динаміки (Molecular dynamics method) [129]. Цей метод являє собою дискретну математичну модель, в якій окремі частинки розглядаються як тверді сфери, взаємодія яких визначається законами класичної механіки. При цьому тимчасова еволюція системи частинок, що взаємодіють, визначається шляхом інтегрування рівнянь динаміки Ньютона з урахуванням всіх парних взаємодій на малих проміжках часу. Сили взаємодії між частинками розглядаються у вигляді класичних потенційних сил, але і непотенціальні сили, наприклад, тертя та інші непружні взаємодії сфер, також можуть бути взяті до уваги [129].

Відповідно до даного методу рух і взаємодія частинок в рідині описуються рівняннями Ньютона для дискретної системи частинок:

$$m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij} + \vec{g}_j, \quad (2.53)$$

де i, j – номери частинок, $\vec{f}_{ij}$ – сили парних взаємодій, що діють на частинку j з боку частинки i , $\vec{g}_j$ – сили, що діють тільки на частинку j зі сторони базової рідини і зовнішніх полів.

Існує велика кількість різних видів софту для проведення розрахунків за допомогою PDM в рамках Lattice Boltzmann methods або інших, наприклад, XMD [100] для моделювання процесів в металах і кераміці, LAMMPS (Large-scale Atomic / Molecular Massively Parallel Simulator) [65], і багато інших [35].

Перший етап моделювання пов'язаний з генерацією певного набору координат $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=1}^N$ центрів сферичних частинок, рівномірно розподілених в заданому об'ємі, де $N = V \cdot C / V_0$, V – об'єм рідини, V_0 – об'єм частинки. Після задання зовнішніх сил, властивостей частинок і базової

рідини проводяться ітеративні розрахунки індивідуальних траєкторій частинок по (2.53) в наступному порядку:

1) Для кожної частинки (x_j, y_j, z_j) визначаються ті координати із загального набору $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=1}^N$, положення яких задовольняє умові $|\vec{r}_{ij}| \leq 2h$, а парні взаємодії більш віддалених частинок вважаються несуттєвими [96].

2) Для поточного положення кожної з частинок та її найближчого оточення проводяться обчислення всіх сил, що входять в праву частину (2.53), а потім рівняння інтегрується, наприклад, з використанням алгоритму Верле (L. Verlet, 1967):

$$\vec{r}_j(t + \Delta t) = 2\vec{r}_j(t) - \vec{r}_j(t - \Delta t) + \vec{a}_j(t)(\Delta t)^2, \quad (2.54)$$

де Δt – крок за часом, $\vec{a}_j$ – прискорення j -ї частинки, що розраховується по правій частині (2.53). Метод другого порядку точності стійкий, але вимагає наявності значень координат на двох попередніх етапах за часом, тому на першому кроці для інтегрування використовується менш точна схема першого порядку:

$$\vec{r}_j(t + \Delta t) = \vec{r}_j(t) + \vec{a}_j(t)\Delta t. \quad (2.55)$$

3) Для розрахованих нових положень центрів частинок для кожної пари перевіряються умови $|\vec{r}_{ij}(t + \Delta t)| \geq (d_i + d_j)/2$; якщо умова не виконується і має місце перекриття об'ємів частинок, чого фізично не може бути, проводиться корекція положень їх центрів з урахуванням Дебаєвського (для молекул) або пружного (для частинок) відштовхування. Аналогічна корекція проводиться за умови наявності твердої стінки (судини, трубки, контейнера). При наявності агрегації частинок і виконанні умови $|\vec{r}_{ij}(t + \Delta t)| \leq (d_i + d_j)/2$, дві частинки замінюються на одну з еквівалентною сумарною масою і координатою центру $(m_i \vec{r}_i(t + \Delta t) + m_j \vec{r}_j(t + \Delta t))/2$.

4) Після визначення нових координат всіх частинок проводиться розрахунок поля концентрацій методом кінцевих об'ємів. При цьому об'єм

рідини, що розглядається, ділиться на задане число рівних малих об'ємів $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, в кожному з яких підраховується загальна маса частинок, що потрапили, і концентрація в точці (інфінітезимальному об'ємі середовища). По полю концентрацій визначається нова ефективна в'язкість μ_{eff} рідини, яка стає неоднорідною внаслідок ефекту агрегації мікрочастинок:

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_{bf}}{1 - \alpha(d_p / d_f)^{-0.3} C^{1.03}}, \quad (2.56)$$

де M_{bf} і $d_f = (6M_{bf} / \pi N_A \rho_{bf})^{1/3}$ – молекулярна маса та еквівалентний діаметр базової рідини, N_A – число Авогадро, $\alpha = const$ – коефіцієнт форми частинок, для сферичних частинок $\alpha = 2,5$. Обчислене поле в'язкостей рідини використовується для розрахунку локальних сил Стокса і броунівських сил.

Відповідно до описаного алгоритму були проведені чисельні розрахунки для крові як суспензії мікрочастинок з діаметрами $d_p \sim 5-10$ мкм [129]. Оскільки алгоритм вимагає випадкового початкового розподілу частинок, для набору значень проводилися повторні розрахунки при концентраціях $C = 5; 10; 15; 20; 30$ % по 20 початкових випадкових розподілів для кожної концентрації. В результаті отримано седиментаційні криві $h(t)$ (Рис. 2.13). При осіданні в похилих трубках спостерігається більш швидке початкове осідання з подальшим уповільненням (Рис. 2.13б), яке пов'язане з накопиченням осілих агрегатів на нижній поверхні трубки і їх повільним ковзанням уздовж неї на дно. Зі збільшенням кута нахилу трубки швидкість осідання зростає при $\theta < 45^\circ$, а при великих кутах – зменшується, причому відразу після початку осідання.

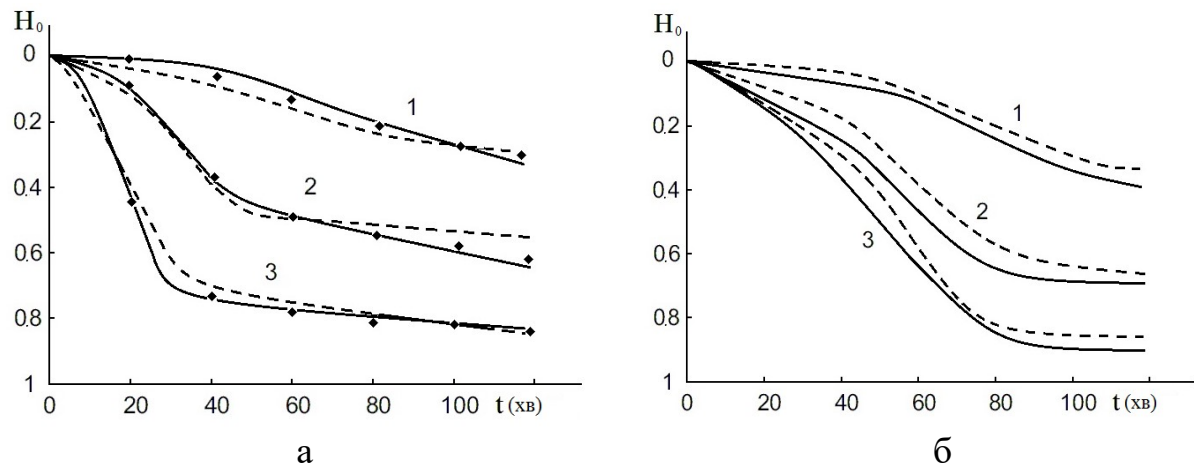


Рис. 2.13 Седиментаційних криві в прямій (а) і похилій (б) трубках; криві 1–3 відповідають концентраціям $C_0 = 0,05; 0,15; 0,3$; точки позначають експериментальні значення

При проведенні розрахунків для 20 різних початкових випадкових розподілів частинок був виявлений розкид кривих $h(t)$ (Рис. 2.14а,б). Аналогічне явище було виявлено в експериментах з осідання суспензій клітин крові в мікрокапілярах [58], [143], що пояснювалося суспензійною нестабільністю крові [57].

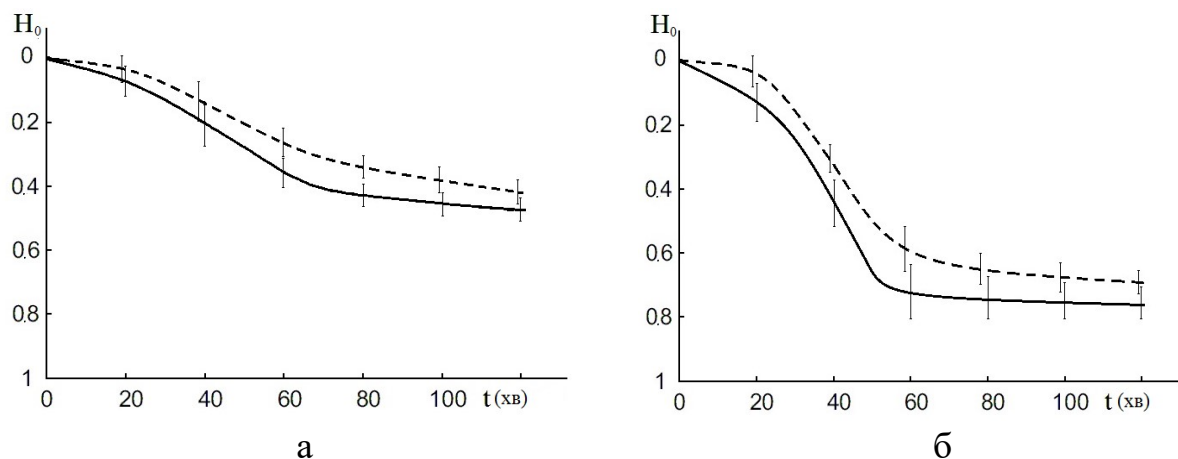


Рис. 2.14 Седиментаційні криві в прямій (а) і похилій (б) трубках для 20 різних початкових розподілів частинок при $C_0 = 0.1$

Таким чином, дискретний метод динаміки частинок показав свою ефективність в проведенні комп'ютерних симуляцій при будь-якій геометрії і

розташуванні трубки, а також розміру і форми частинок, ґрунтуючись тільки на фізичних законах взаємодії частинок і їх геометрії.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі досліджено квазілінійні моделі осідання частинок дво- та трифазної суспензій, що агрегують, в неоднорідному полі зовнішніх сил, де розв'язок знаходиться в області, яка має дві рухомі границі з різними крайовими умовами на них. Методом характеристик знайдено розв'язки задач. Досліджено умови існування різних типів розв'язків задачі про осідання частинок трифазної суспензії та проведено аналіз еволюційності (стійкості) сильних розривів, що виникають. Дискретним методом динаміки частинок отримано чисельні розрахунки, які підтверджують результати, знайдені методом характеристик.

Проведено чисельні розрахунки при варіації параметрів моделі відповідно до фізіологічних даних. Методами теорії розмірностей отримано набори виразів для різних швидкостей агрегації для лінійної і квадратичної залежностей від кутової швидкості ω . Досліджено розмір та динаміку розмитої границі між зонами чистої рідини та частинок, що осідають, яка може бути використана як додаткова інформація для діагностики.

На основі трифазної моделі проаналізовані експериментальні дані кривих осідання частинок у тонкій вертикальній трубці, які дають можливість дослідити різні режими седиментаційного процесу, вплив параметрів моделі на швидкість осідання та оцінити агрегаційну здатність частинок суспензії для постановки діагнозу за цими кривими.

До основних результатів цього розділу належать:

- Постановка та розв'язання задач про осідання частинок дво- та трифазної суспензій, що агрегують, у вертикальних трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил, де розв'язок знаходиться в області, яка має дві рухомі границі з різними крайовими умовами на них.

- Аналіз різних режимів процесу осідання та дослідження сильних розривів на еволюційність.
- Отримання та обґрунтування різних виразів для швидкості агрегації частинок φ .
- Пояснення на основі трифазної моделі суспензії виникнення розмитої границі між зоною чистої рідини та частинок, що осідають.
- Перевірка отриманих результатів чисельними розрахунками методом динаміки частинок.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора: [3], [4], [21], [59], [127], [129], [131], [132], [143], [149], [178].

РОЗДІЛ 3

ДОСЛІДЖЕННЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ОСІДАННЯ ЧАСТИНОК СУСПЕНЗІЇ, ЩО АГРЕГУЮТЬ, У ПОХИЛИХ ТРУБКАХ В НЕОДНОРІДНОМУ ПОЛІ СИЛ (ДВО- ТА ТРИФАЗНА МОДЕЛІ)

3.1 Двофазна модель суспензії частинок, що агрегують, у похилих трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил

3.1.1 Постановка задачі

Розглядається стаціонарне осідання частинок у вузькому каналі шириною R і довжиною L ($R/L \ll 1$), нахиленому під кутом θ (Рис. 3.1). Канал відповідає прорізу між стінками ротаційного віскозиметра конусоподібного типу або прямокутній місткості з глибиною $D \gg R$. Використовується двофазний підхід до суспензії частинок, які агрегують [58], [143].

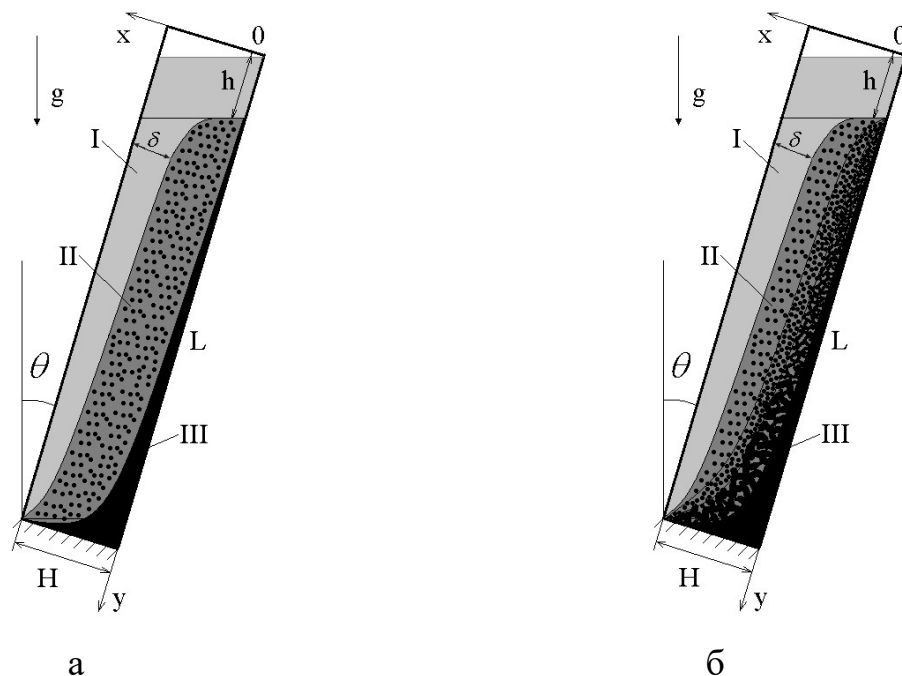


Рис. 3.1 Ескіз осідання частинок в похилій трубці для частинок, які не агрегують (а) та які агрегують (б)

Нехтуючи силами інерції в порівнянні з в'язкими силами, рівняння квазістійкого руху запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Nu_x^1 + \frac{\partial}{\partial y} Nu_y^1 = \varphi, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Hu_x^1 + \frac{\partial}{\partial y} Hu_y^1 = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [Hu_x^1 + (1-H)u_x^2] + \frac{\partial}{\partial y} [Hu_y^1 + (1-H)u_y^2] = 0, \quad (3.3)$$

$$H \frac{\partial p}{\partial y} = -F(u_y^1 - u_y^2) + H \rho_s G \cos(\theta), \quad (3.4)$$

$$(1-H) \frac{\partial p}{\partial y} = F(u_y^1 - u_y^2) + (1-H) \rho_f G \cos(\theta), \quad (3.5)$$

$$H \frac{\partial p}{\partial x} = -F(u_x^1 - u_x^2) + H \rho_s G \sin(\theta), \quad (3.6)$$

$$(1-H) \frac{\partial p}{\partial x} = F(u_x^1 - u_x^2) + (1-H) \rho_f G \sin(\theta), \quad (3.7)$$

де (u_x^1, u_y^1) і (u_x^2, u_y^2) – складові векторів швидкості для частинок (фаза 1) і рідини (фаза 2), (Oxy) – декартова система координат, ρ_s, ρ_f – густини твердих і рідких матеріалів, p – гідростатичний тиск, H і N – об'ємна і числова концентрації агрегатів, F – феноменологічний коефіцієнт для сил в'язкого опору, що діють на частинку зі сторони в'язкої рідини, φ – швидкість агрегації, G – масова сила, яка може бути записана як $G = ng$, де n – коефіцієнт збільшення, коли осідання відбувається у центрифугі [143].

Рівняння (3.7) описує кінетику агрегації частинок завдяки зіткненню, розпаду або обмінним взаємодіям [58]. Умови неперервності маси для фаз (3.8), (3.9) і проекції рівнянь імпульсу для фаз на координатній осі (3.10)–(3.13) дають систему диференціальних рівнянь в частинних похідних для швидкостей, тисків і числової концентрації агрегатів. Така ж сама модель в одновимірній постановці була використана для моделювання осідання еритроцитів у вертикальних трубах, в тонких прорізах між стінками ротаційного віскозиметра циліндроподібного типу [154] і в полі відцентрової

сили [138]. У двовимірній постановці вона застосовувалась до осідання еритроцитів у кругових трубках у зовнішньому магнітному полі [57]. Систему (3.1)–(3.17) можна розв'язати чисельними методами, але для отримання більш придатних напіваналітичних оцінок в роботі отримана спрощена одновимірна модель шляхом усереднення рівнянь (3.1)–(3.17) по поперечній координаті x .

3.1.2 Одновимірне наближення для малих кутів нахилу

Виходячи із теорії розмірностей, вирази для F і φ були знайдені у вигляді [58], [138], [142], [154]:

$$F = \eta_f H (1 - H)^{-2.5} w^{-2/3}, \quad \varphi = -k H^2 w^{-2}, \quad (3.8)$$

де $w = H / N$ – середній об'єм агрегату, k – емпірична стала, що визначає утворення агрегатів.

Виключаючи тиск із (3.4)–(3.7) і використовуючи умову непротікання на дні трубки $x = L$, отримаємо:

$$\begin{aligned} u_x^1 &= -\Theta(H) \sin(\theta), \quad u_y^1 = \Theta(H) \cos(\theta), \\ u_x^2 &= \frac{H\Theta(H)ng\delta\rho \sin(\theta)}{(1-H)F}, \quad u_y^2 = -\frac{H\Theta(H)ng\delta\rho \cos(\theta)}{(1-H)F}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

де $\Theta(H) = H(1-H)^2 \delta\rho G / F(H)$, $\delta\rho = \rho_s - \rho_f$.

При $\theta = 0$ (3.9) збігається з відповідними виразами для поля неоднорідної відцентрової сили $ng(x) = ax + b$, що діє на клітини крові у вертикальних трубках [138]. При $\theta = 0$ і $n = 1$ (3.9) збігається з виразами для гравітаційного осідання частинок суспензії, розрахованого у [143], [154].

Припустимо, що агрегація внаслідок бокового руху частинок є істотною, якщо протягом часу T осідання частинок на відстані L їх радіальне зміщення δ буде порядку величини R . Оскільки $\delta \approx |u_x^1|T$, $T \approx L/|u_y^1|$, ця умова, врахована для (3.9), може бути записана як

$$\frac{\delta}{R} \approx \frac{L|u_x^1|}{R|u_y^1|} = \frac{L}{R} \tan(\theta). \quad (3.10)$$

Розглянемо δ/R як безрозмірний параметр, що характеризує агрегацію внаслідок бокового руху в напрямку похилої нижньої стінки трубки. Оскільки це призведе до швидшого зближення та агрегації частинок, цей параметр повинен враховуватися у виразі для швидкості агрегації (3.8) у вигляді [57]:

$$\varphi = -kN^2w^{-2}(1 + O(\delta/R)). \quad (3.11)$$

Наприклад, у [138] була використана наступна оцінка:

$$\varphi = -\frac{kN^2}{w^2} \left(1 - 2\frac{\delta}{R} + \frac{\delta^2}{R^2} \right)^{-1}. \quad (3.12)$$

Як впливає із (3.10), членом другого порядку у (3.12) можна знехтувати для досить малих кутів нахилу. Наприклад, в лабораторних віскозиметрах при проведенні тесту з кров'ю значення $L/R \sim 1,7 - 2,5$, так що при кутах $\theta \leq 10^\circ$ дійсний спрощений підхід $\delta/R \ll 1$ і може бути прийнято $\varphi = -kN^2w^{-2}(1 + 2\delta/R)$.

З метою усереднення введемо наступні позначення: $x \in [0; x_s]$, де x_s – координата поверхні поділу між шарами I і II (Рис. 3.16):

$$N(t, x, y) = \begin{cases} N(t, y), & x \leq x_s \\ 0, & x_s < x \leq s \end{cases}, \quad H(t, x, y) = \begin{cases} H(t, y), & x \leq x_s \\ 0, & x_s < x \leq s \end{cases}, \quad (3.13)$$

де s – ширина або площа, зайнята частинками і агрегатами (Рис. 3.16).

Згідно (3.9) границя поділу між зонами I і II рухається зі швидкістю:

$$U_x = u_x^1 \Big|_{x=x_s} = H(1-H)^2 g \delta \rho \sin \alpha F^{-1}. \quad (3.14)$$

Усереднені значення введемо у вигляді:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{x_s} \int_0^{x_s} f dx. \quad (3.15)$$

Тоді систему (3.1)–(3.7) можна записати як

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle N \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle N \rangle \langle u_y^1 \rangle + k \langle N \rangle^2 \Delta(x_s, y) &= \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial t} (N(t, x_s, y) - \langle N \rangle) + \\ &+ \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} (N(t, x_s, y) u_y^1(t, x_s, y) - \langle N \rangle \langle u_y^1 \rangle) \right\} - \frac{1}{x_s} N(t, x_s, y) u_x^1(t, x_s, y), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle H \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle H \rangle \langle u_y^1 \rangle = & \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} (H(t, x_s, y) u_y^1(t, x_s, y) - \langle H \rangle \langle u_y^1 \rangle) \right\} - \\ & - \frac{1}{x_s} H(t, x_s, y) u_x^1(t, x_s, y) - \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial t} (\langle H \rangle - H(t, x_s, y)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\langle H \rangle \langle u_y^1 \rangle + (1 - \langle H \rangle) \langle u_y^2 \rangle] = & \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} (H(t, x_s, y) u_y^1(t, x_s, y) - \langle H \rangle \langle u_y^1 \rangle) \right\} + \\ & + (1 - H(t, x_s, y)) u_y^2 - (1 - \langle H \rangle) \langle u_y^2 \rangle - \frac{1}{x_s} [H(t, x_s, y) u_x^1(t, x_s, y) + (1 - H(t, x_s, y)) u_x^2(t, x_s, y)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \langle H \rangle \frac{\partial}{\partial y} \langle p \rangle + F(\langle H \rangle, \langle N \rangle) (\langle u_y^1 \rangle - \langle u_y^2 \rangle) + \rho_s g \cos(\theta) \langle H \rangle = \\ = \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} (H(t, x_s, y) p(t, x_s, y) - \langle H \rangle \langle p \rangle) \right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} (1 - \langle H \rangle) \frac{\partial}{\partial y} \langle p \rangle - F(\langle H \rangle, \langle N \rangle) (\langle u_y^1 \rangle - \langle u_y^2 \rangle) + \rho_f g \cos(\theta) (1 - \langle H \rangle) = \\ = \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} ((1 - \langle H \rangle) \langle p \rangle - (1 - H(t, x_s, y)) p(t, x_s, y)) \right\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\text{де } \Delta(x_s, y) = \frac{1}{x_s} \int_0^{x_s} \left(1 + O\left(\frac{\delta}{R}\right) \right) x dx.$$

Система може бути значно спрощена при $\partial x_s / \partial y = 0$. Оскільки у загальному випадку $\partial x_s / \partial y \neq 0$, будемо оцінювати члени в правих частинах (3.16)–(3.20). У зонах I і II маємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = [H(t, x_s, y) \rho_s + (1 - H(t, x_s, y)) \rho_f] g \sin(\theta) \quad (0 \leq x \leq x_s) \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_f g \sin(\theta) \quad (x_s < x \leq R). \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\langle p \rangle - p(t, x_s, y) = (H(t, x_s, y) \rho_s + (1 - H(t, x_s, y)) \rho_f) g \sin \alpha x \quad (3.22)$$

Тоді за умов $R/L \ll 1$, $H_0 < 1$ із (3.9), (3.20), (3.21) можна отримати наступні оцінки:

$$\frac{|\langle p \rangle - p(t, x_s, y)|}{\rho_s g |\cos \alpha| \langle H \rangle} \ll 1; \quad \frac{|\langle u_y^1 \rangle - u_y^1(t, x_s, y)|}{u_y^1} \ll 1. \quad (3.23)$$

У цьому випадку в (3.16)–(3.20) можна знехтувати членами у фігурних дужках і задати рівняння для усереднених змінних $N(t, x_s, y) = \langle N \rangle$, $H(t, x_s, y) = \langle H \rangle$ у вигляді (знаки усереднення опущені):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} N u_y^1 &= -k N^2 \Delta + \frac{NH(1-H)^2 \delta \rho n g \sin(\theta)}{F x_s}, \\
\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} H u_y^1 &= \frac{H^2(1-H)^2 \delta \rho n g \sin(\theta)}{F x_s}, \\
\frac{\partial}{\partial y} [H u_y^1 + (1-H) u_y^2] &= 0, \\
H \frac{\partial p}{\partial y} + F(u_y^1 - u_y^2) + \rho_s n g H \cos(\theta) &= 0, \\
(1-H) \frac{\partial p}{\partial y} - F(u_y^1 - u_y^2) + \rho_f n g (1-H) \cos(\theta) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

При $\theta=0$ система (3.24) збігається з відповідними системами у [58], [143]. Другий член у правій частині першого рівняння у (3.30) відповідає за додаткову агрегацію частинок внаслідок поперечних зсувів. У роботі [57] додатковий член, що відповідає за додаткову агрегацію, викликану прикладеним магнітним полем, обчислюється як $2M\delta\chi NH(1-H)^2 F^{-1} x_s$, де $\delta\chi$ – різниця магнітної сприйнятливості частинок і рідини.

З безрозмірними змінними (2.24) рівняння для концентрації і об'єму агрегатів мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial T} + U_y^1 \frac{\partial W}{\partial Y} &= KH\Delta, \\
\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial Y} H U_y^1 &= -\frac{H(1-H)^{4,5} W^{2/3} \sin(\theta)}{L x_s}, \\
U_y^1(H, W, Y) &= -(1-H)^{4,5} W^{2/3} \cos(\theta).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Початкові і граничні умови для змінних:

$$H(0, Y) = H_0, \quad W(0, Y) = 1, \quad U_y^1(T, L) = 0. \tag{3.26}$$

Система (3.26) є гіперболічною [58], [143] і може бути записана в матричній формі:

$$\frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} W \\ H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_y^1 & 0 \\ H \frac{\partial U_y^1}{\partial W} & U_y^1 \left(1 + \frac{H}{U_y^1} \frac{\partial U_y^1}{\partial H} \right) \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial Y} \begin{pmatrix} W \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} KH\Delta \\ -H \frac{\partial U_y^1}{\partial Y} - \frac{H(1-H)^{4,5} W^{2/3} \sin(\theta)}{L x_s} \end{pmatrix}.$$

Її характеристичними значеннями є:

$$\lambda_1 = U_y^1, \quad \lambda_2 = U_y^1 \left(1 + \frac{H}{U_y^1} \frac{\partial U_y^1}{\partial H} \right).$$

Характеристичні рівняння мають вигляд:

$$(I) \frac{dY}{dT} = (1-H)^{4.5} W^{2/3} \cos(\theta), \quad (3.27)$$

$$(II) \frac{dY}{dT} = -A(5.5H-1)\cos(\theta), \quad (3.28)$$

де $A = (1-H)^{3.5} W^{2/3}$.

Умови на характеристиках:

$$(I) \frac{dW}{dT} = -KH\Delta, \quad (3.29)$$

$$(II) \frac{2}{W} \left(\frac{dW}{dT} - KC\Delta \right) = \frac{13.5}{1-H} \left(\frac{dH}{dT} + H(1-H)^{4.5} \cos(\theta) \right) + \frac{H(1-H)A \sin(\theta)}{L}. \quad (3.30)$$

Характеристики сімейства (I) мають позитивний нахил, тоді як сімейство (II) у фізіологічному діапазоні має негативний нахил. Розв'язок одновимірної задачі (3.25)–(3.26) можна отримати за формулами (3.27)–(3.30) методом характеристик.

3.1.3 Двовимірна постановка для довільних кутів нахилу

У випадку довільного кінцевого кута нахилу гіперболічна система двовимірних рівнянь відносно H і w може бути отримана із (3.1)–(3.2). Припускаючи неперервність $\partial p / \partial x$ і $\partial p / \partial y$, запишемо систему у вигляді:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u_x^1 \frac{\partial w}{\partial x} + u_y^1 \frac{\partial w}{\partial y} = kH, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u_x^1 \frac{\partial H}{\partial x} + (u_y^1 + 2H\Theta' \sin(\theta)) \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (3.32)$$

Ця гіперболічна система може бути розв'язана за допомогою двовимірної аналогії методу характеристик. Всі вирази для біхарактеристик і умов на них можна отримати за формулами в [57] шляхом заміни $\sin(\theta)$ і $\cos(\theta)$ замість компонент магнітного поля ψ_r і ψ_x .

Тоді тиск визначаємо з виразів, отриманих з (3.4) –(3.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= (H\rho_s + (1-H)\rho_f)G \sin(\theta), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= (H\rho_s + (1-H)\rho_f)G \cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.33)$$

з граничними умовами:

$$p(x, y)|_{y=0} = p_{atm}, \quad p(x, y)|_{y=L} = p_{atm} + (H\rho_s + (1-H)\rho_f)GL, \quad (3.34)$$

де p_{atm} – атмосферний тиск.

Розв'язок двовимірної задачі про осідання частинок, що агрегують, (3.1)–(3.7) також можна знайти методом динаміки частинок [129].

3.2 Трифазна модель суспензії частинок, що агрегують, у похилих трубах в неоднорідному полі зовнішніх сил

3.2.1 Постановка задачі

Розглянемо стаціонарне осідання частинок трифазної суспензії у вузькому каналі шириною R і довжиною L ($R/L \ll 1$), нахиленому під кутом θ (Рис. 3.1). На відміну від задачі з пункту 3.1, у цьому випадку додається третя фаза – захоплена агрегатами рідина [58], [143].

Рівняння квазістаціонарного руху суспензії як трифазного середовища при нехтуванні силами інерції в порівнянні з в'язкими силами мають вигляд:

$$\frac{\partial(1-H)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(1-H)u_x^1 + \frac{\partial}{\partial y}(1-H)u_y^1 = -\gamma \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}Cu_x^2 + \frac{\partial}{\partial y}Cu_y^2 = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial(H-C)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(H-C)u_x^3 + \frac{\partial}{\partial y}(H-C)u_y^3 = \gamma \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}Nu_x^2 + \frac{\partial}{\partial y}Nu_y^2 = \varphi \quad (3.38)$$

$$(1-H)\frac{\partial p}{\partial y} = F(u_y^2 - u_y^1) + (1-H)\rho_f G \cos(\theta) \quad (3.39)$$

$$C\frac{\partial p}{\partial y} = -F(u_y^2 - u_y^1) - D(u_y^2 - u_y^5) + C\rho_s G \cos(\theta) \quad (3.40)$$

$$(H-C)\frac{\partial p}{\partial y} = D(u_y^2 - u_y^3) + (H-C)\rho_f G \cos(\theta) \quad (3.41)$$

$$(1-H)\frac{\partial p}{\partial x} = F(u_x^2 - u_x^1) + (1-H)\rho_f G \sin(\theta) \quad (3.42)$$

$$C\frac{\partial p}{\partial x} = -F(u_x^2 - u_x^1) - D(u_x^2 - u_x^3) + C\rho_s G \sin(\theta) \quad (3.43)$$

$$(H-C)\frac{\partial p}{\partial x} = D(u_x^2 - u_x^3) + (H-C)\rho_f G \sin(\theta) \quad (3.44)$$

де (u_x^1, u_y^1) , (u_x^2, u_y^2) і (u_x^3, u_y^3) – швидкості руху рідини (фаза 1), частинок (фаза 2) і захопленої агрегатами рідини (фаза 3), ρ_s, ρ_f – справжні густини частинок та рідини, p – гідростатичний тиск, H, N, C – об’ємна, числова та масова (без врахування захопленої рідини) концентрації агрегатів, F, D – феноменологічні коефіцієнти, описані в розділі 2, φ – швидкість агрегації, G – масова сила (у випадку осідання в центрифугі $G = ng$), γ^a – швидкості міжфазового масообміну ($\gamma^2 = 0$, γ^3 – швидкість захоплення рідини в агрегатах, $\gamma^1 = -\gamma^3$), $\gamma = \gamma^3 / \rho_f$ [138], [142].

Вирази для F і D візьмемо у вигляді (2.32), а для φ – (3.8). Враховуючи умову непротікання на дні трубки $x = L$, а також виключаючи тиск із (3.39)–(3.44), отримаємо вирази для компонент швидкостей кожної фази:

$$u_x^1 = \left(-\frac{H(1-H)}{F} + \frac{(H-C)^2}{D} \right) \xi_1; \quad u_y^1 = \left(-\frac{H(1-H)}{F} + \frac{(H-C)^2}{D} \right) \xi_2; \quad (3.45)$$

$$u_x^2 = \left(\frac{(1-H)^2}{F} + \frac{(H-C)^2}{D} \right) \xi_1; \quad u_y^2 = \left(\frac{(1-H)^2}{F} + \frac{(H-C)^2}{D} \right) \xi_2; \quad (3.46)$$

$$u_x^3 = \left(\frac{(1-H)^2}{F} + \frac{(H-C)(1-H+C)}{D} \right) \xi_1; \quad u_y^3 = \left(\frac{(1-H)^2}{F} + \frac{(H-C)(1-H+C)}{D} \right) \xi_2, \quad (3.47)$$

де $\xi_1 = [(1+C)\rho_s - C\rho_f]ng \sin \theta$, $\xi_2 = [(1+C)\rho_s - C\rho_f]ng \cos \theta$.

3.2.2 Одновимірне наближення для малих кутів нахилу

Припустимо, що агрегати частинок розподіляються рівномірно у зоні $x \in [0; x_s]$, де x_s – координата поверхні поділу між шарами чистої рідини та агрегатів, що осідають. Тоді можна припустити:

$$N(t, x, y) = \begin{cases} N(t, y), & x \leq x_s \\ 0, & x_s < x \leq s \end{cases}, \quad (3.48)$$

$$H(t, x, y) = \begin{cases} H(t, y), & x \leq x_s \\ 0, & x_s < x \leq s \end{cases}, \quad C(t, x, y) = \begin{cases} C(t, y), & x \leq x_s \\ 0, & x_s < x \leq s \end{cases},$$

де s – площа, яка зайнята частинками і агрегатами.

Враховуючи припущення для швидкості агрегації φ (3.11), проведемо усереднення системи рівнянь (3.35)–(3.44) у вигляді значень (3.15). Після тотожних перетворень отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle 1-H \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle 1-H \rangle \langle u_y^1 \rangle = -\langle \gamma \rangle + \\ + \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} \left((1-H(t, x_s, y)) u_y^1(t, x_s, y) - \langle 1-H \rangle \langle u_y^1 \rangle \right) \right\} - \\ - \frac{1}{x_s} (1-H(t, x_s, y)) u_x^1(t, x_s, y) - \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial t} (\langle 1-H \rangle - (1-H(t, x_s, y))), \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle C \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle C \rangle \langle u_y^2 \rangle = \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} \left(C(t, x_s, y) u_y^2(t, x_s, y) - \langle C \rangle \langle u_y^2 \rangle \right) \right\} - \\ - \frac{1}{x_s} C(t, x_s, y) u_x^2(t, x_s, y) - \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial t} (\langle C \rangle - C(t, x_s, y)), \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle H-C \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle H-C \rangle \langle u_y^3 \rangle = \langle \gamma \rangle + \\ + \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} \left((H(t, x_s, y) - C(t, x_s, y)) u_y^3(t, x_s, y) - \langle H-C \rangle \langle u_y^3 \rangle \right) \right\} - \\ - \frac{1}{x_s} (H(t, x_s, y) - C(t, x_s, y)) u_x^3(t, x_s, y) - \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial t} (\langle H-C \rangle - (H(t, x_s, y) - C(t, x_s, y))), \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle N \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle N \rangle \langle u_y^2 \rangle + k \langle N \rangle^2 \Delta(x_s, y) = \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial t} (N(t, x_s, y) - \langle N \rangle) + \\ + \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} \left(N(t, x_s, y) u_y^2(t, x_s, y) - \langle N \rangle \langle u_y^2 \rangle \right) \right\} - \frac{1}{x_s} N(t, x_s, y) u_x^2(t, x_s, y), \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} (1-\langle H \rangle) \frac{\partial}{\partial y} \langle p \rangle - F(\langle H \rangle, \langle N \rangle) (\langle u_y^2 \rangle - \langle u_y^1 \rangle) - \rho_f n g \cos(\theta) (1-\langle H \rangle) = \\ = \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} \left((1-\langle H \rangle) \langle p \rangle - (1-H(t, x_s, y)) p(t, x_s, y) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \langle C \rangle \frac{\partial}{\partial y} \langle p \rangle + F(\langle H \rangle, \langle N \rangle) (\langle u_y^2 \rangle - \langle u_y^1 \rangle) + D(\langle H \rangle, \langle N \rangle) (\langle u_y^2 \rangle - \langle u_y^3 \rangle) - \\ - \rho_s n g \cos(\theta) \langle C \rangle = \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} \left(C(t, x_s, y) p(t, x_s, y) - \langle C \rangle \langle p \rangle \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}
& (\langle H \rangle - \langle C \rangle) \frac{\partial}{\partial y} \langle p \rangle - D(\langle H \rangle, \langle N \rangle) (\langle u_y^2 - u_y^3 \rangle) - \rho_f n g \cos(\theta) (\langle H \rangle - \langle C \rangle) = \\
& = \left\{ \frac{1}{x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y} ((\langle H \rangle - \langle C \rangle) \langle p \rangle - (H(t, x_s, y) - C(t, x_s, y)) p(t, x_s, y)) \right\},
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\text{де } \Delta(x_s, y) = \frac{1}{x_s} \int_0^{x_s} \left(1 + O\left(\frac{\delta}{R}\right) \right) x dx.$$

Аналогічно пункту 3.1.2 проводимо оцінку правих частин системи рівнянь (3.49)–(3.55). Після цього отримуємо систему спрощених рівнянь відносно концентрацій $N(t, x_s, y) = \langle N \rangle$, $H(t, x_s, y) = \langle H \rangle$ і $C(t, x_s, y) = \langle C \rangle$ у вигляді (знаки усереднення опущені):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} N u_y^2 = -k N^2 \Delta + \frac{NH(1-H)^2 \delta \rho n g \sin(\theta)}{F x_s}, \\
& \frac{\partial(1-H)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (1-H) u_y^1 = -\gamma + \frac{H(1-H)^3 \delta \rho n g \sin(\theta)}{F x_s}, \\
& \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} C u_y^2 = \frac{CH(1-H)^2 \delta \rho n g \sin(\theta)}{F x_s}, \\
& \frac{\partial(H-C)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (H-C) u_y^3 = \gamma + \frac{H(H-C)(1-H)^2 \delta \rho n g \sin(\theta)}{F x_s}, \\
& (1-H) \frac{\partial p}{\partial y} - F(u_y^2 - u_y^1) - \rho_f n g (1-H) \cos(\theta) = 0, \\
& C \frac{\partial p}{\partial y} + F(u_y^2 - u_y^1) + D(u_y^2 - u_y^3) - \rho_s n g C \cos(\theta) = 0, \\
& (H-C) \frac{\partial p}{\partial y} - D(u_y^2 - u_y^3) - \rho_f n g (H-C) \cos(\theta) = 0.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

В безрозмірних змінних система (3.56) записується наступним чином:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial W}{\partial T} + U_y^2 \frac{\partial W}{\partial Y} = KH \Delta, \\
& \frac{\partial(1-H)}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial Y} (1-H) U_y^1 = -\Gamma + \frac{(1-H)^{5.5} W^{2/3} \sin(\theta)}{X_s}, \\
& \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial Y} C U_y^2 = \frac{C(1-H)^{4.5} W^{2/3} \sin(\theta)}{X_s}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Початкові і граничні умови мають вигляд:

$$H(0, Y) = H_0, \quad C(0, Y) = C_0, \quad W(0, Y) = 1, \quad U_y^2(T, L) = 0. \tag{3.58}$$

Перепишемо систему (3.57) у вигляді:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial T} + U_y^2 \frac{\partial W}{\partial Y} &= KH\Delta, \\
\frac{\partial H}{\partial T} + k_{11} \frac{\partial H}{\partial Y} + k_{12} \frac{\partial C}{\partial Y} + k_{13} \frac{\partial W}{\partial Y} &= \Gamma - \frac{(1-H)^{5,5} W^{2/3} \sin(\theta)}{X_s} \\
\frac{\partial C}{\partial T} + k_{21} \frac{\partial H}{\partial Y} + k_{22} \frac{\partial C}{\partial Y} + k_{23} \frac{\partial W}{\partial Y} &= \frac{C(1-H)^{4,5} W^{2/3} \sin(\theta)}{X_s},
\end{aligned} \tag{3.59}$$

де $k_{11} = U_y^1 - (1-H) \frac{\partial U_y^1}{\partial H}$, $k_{12} = -(1-H) \frac{\partial U_y^1}{\partial C}$, $k_{13} = -(1-H) \frac{\partial U_y^1}{\partial W}$, $k_{21} = C \frac{\partial U_y^2}{\partial H}$,

$k_{22} = U_y^2 + C \frac{\partial U_y^2}{\partial C}$, $k_{23} = C \frac{\partial U_y^2}{\partial W}$.

У матричній формі система (3.59) набуває вигляду [58], [143]:

$$\frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} W \\ H \\ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_y^2 & 0 & 0 \\ k_{13} & k_{11} & k_{12} \\ k_{23} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial Y} \begin{pmatrix} W \\ H \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} KH\Delta \\ \Gamma - \frac{(1-H)^{5,5} W^{2/3} \sin(\theta)}{X_s} \\ \frac{C(1-H)^{4,5} W^{2/3} \sin(\theta)}{X_s} \end{pmatrix}. \tag{3.60}$$

Отримуємо характеристичні значення:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= U_y^2, \\
\lambda_{2,3} &= \frac{(k_{11} + k_{22}) \pm \sqrt{(k_{11} + k_{22})^2 + 4k_{12}k_{21}}}{2}.
\end{aligned}$$

Тоді рівняння характеристик та умови на них для системи (3.60) записуються у вигляді:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dY}{dT} \right)_1 &= U_y^2, \\
\left(\frac{dY}{dT} \right)_{2,3} &= \frac{(k_{11} + k_{22}) \pm \sqrt{(k_{11} + k_{22})^2 + 4k_{12}k_{21}}}{2};
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dT} &= KH\Delta, \\
\left[\left(\frac{dY}{dT} \right)_{2,3} - k_{22} \right] \left[\frac{dH}{dT} - \left(\Gamma - \frac{(1-H)^{5,5} W^{2/3} \sin \theta}{X_s} \right) \right] + k_{12} \left[\frac{dC}{dT} - \frac{C(1-H)^{4,5} W^{2/3} \sin \theta}{X_s} \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Розв'язок системи (3.57)–(3.58), як і у випадку двофазної моделі, знаходиться методом характеристик. Маємо три сімейства характеристик.

Аналогічно трифазній суспензії частинок, які осідають та агрегують у вертикальній трубці, нахил першого сімейства негативний, третього – позитивний, а другого може бути як позитивний, так і негативний в залежності від параметрів системи і початкової концентрації частинок в суспензії. Слід зазначити, що при $\theta = 0$ рівняння (3.61)–(3.62) збігаються з рівняннями сімейств характеристик та умов на них у випадку осідання частинок трифазної суспензії у вертикальних трубках.

3.3 Аналіз чисельних результатів

Аналіз чисельних результатів проведений на основі моделі двофазної суспензії. В даному випадку сімейства характеристик (I) і (II) мають позитивні і негативні нахили відповідно. Сімейство (I) відповідає границі поділу між зонами II і III, а сімейство (II) описує переміщення границі поділу між зонами I і II, яка рухається з відповідною швидкістю (3.14). Чисельні розрахунки (3.27)–(3.30) були проведені для крові людини з використанням параметрів (2.45).

Чисельна процедура детально описана в [58], [143]. Приклад інтерфейсу власного програмного забезпечення наведено на рис. 3.2. Область, обмежена характеристиками різних сімейств, що виходять із кінців трубки $Y=0$ і $Y=1$, відповідає зоні II (Рис. 3.1а). Позначка поздовжньої координатної осі на рис. 3.2 розташована в зворотному напрямку порівняно до осі на рис. 3.1. Результати чисельних розрахунків представлені на рис. 3.3–3.4.

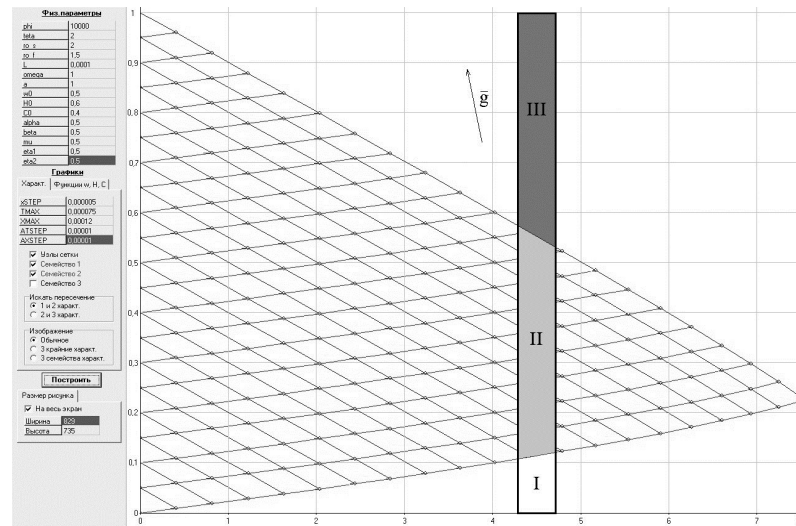


Рис. 3.2 Приклад інтерфейсу програмного забезпечення та розподілу зон в похилій трубці: I – зона прозорі рідини, II – зона агрегатів, що осідають, III – компактна зона

При зростанні прикладеної сили ($n = 1, 2, 3, \dots$) частинки осідають швидше (Рис. 3.3а). Аналогічна залежність спостерігається для суспензій зі зростанням початкової концентрації (Рис. 3.3б), швидкості агрегації (Рис. 3.3в) і невеликого збільшення кута нахилу (Рис. 3.3г). Збільшена зовнішня сила рівномірно прискорює осідання частинок вздовж трубки, а розташування границь поділу між зонами I і II, II і III змінюється аналогічно (Рис. 3а). При зростанні початкової концентрації зміни більш помітні для границі поділу I–II (Рис. 3.3б). Це може бути викликано меншою в'язкістю суспензії у верхній частині трубки, що утворює менші сили Стокса, які діють на поверхню агрегатів, що вільно осідають. У нижній частині зони II агрегати того ж об'єму оточені більш концентрованою суспензією з більшою в'язкістю, що призводить до вищих сил Стокса, які перешкоджають осіданню агрегатів у напрямку до зони III. При збільшенні швидкості агрегації частинок зміни помітніші для границі поділу II–III (Рис. 3.3в), оскільки в області з вищою концентрацією утворення компактної зони буде дуже швидким. Невелике збільшення кута нахилу значно прискорює формування зони I (Рис. 3.3г) із-за зменшення довжини руху частинок до

досягнення нижньої стінки похилої трубки. Коли кут нахилу стає більшим, ніж деякий критичний кут θ^* , осідання сповільнюється. У разі матеріальних параметрів, що використовуються в отриманих результатах, представлених на рис. 3.3г, $\theta^* \sim 8^\circ$. Нахил трубки скорочує відстань, яку кожна частинка повинна пройти, щоб досягти нижньої похилої стінки, що прискорює осідання. Коли частинка наближається до границі поділу II–III і не може далі осідати, вона ковзає по границі внаслідок сили $\sim ng \cos(\theta)$, яка зменшується зі збільшенням кута. Здатність частинки, яка осідає, ковзати також обмежується взаємодією між сусідніми частинками, що може призвести до їх агрегації. Збільшення в'язкості рідини сповільнює осідання, але властивості динаміки частинок залишаються подібними до представлених на рис. 3а–г, що підтверджує фізичну вагомість обчислених результатів. При $n = 1$, $\theta = 0$ розраховані криві відповідають отриманим у [143].

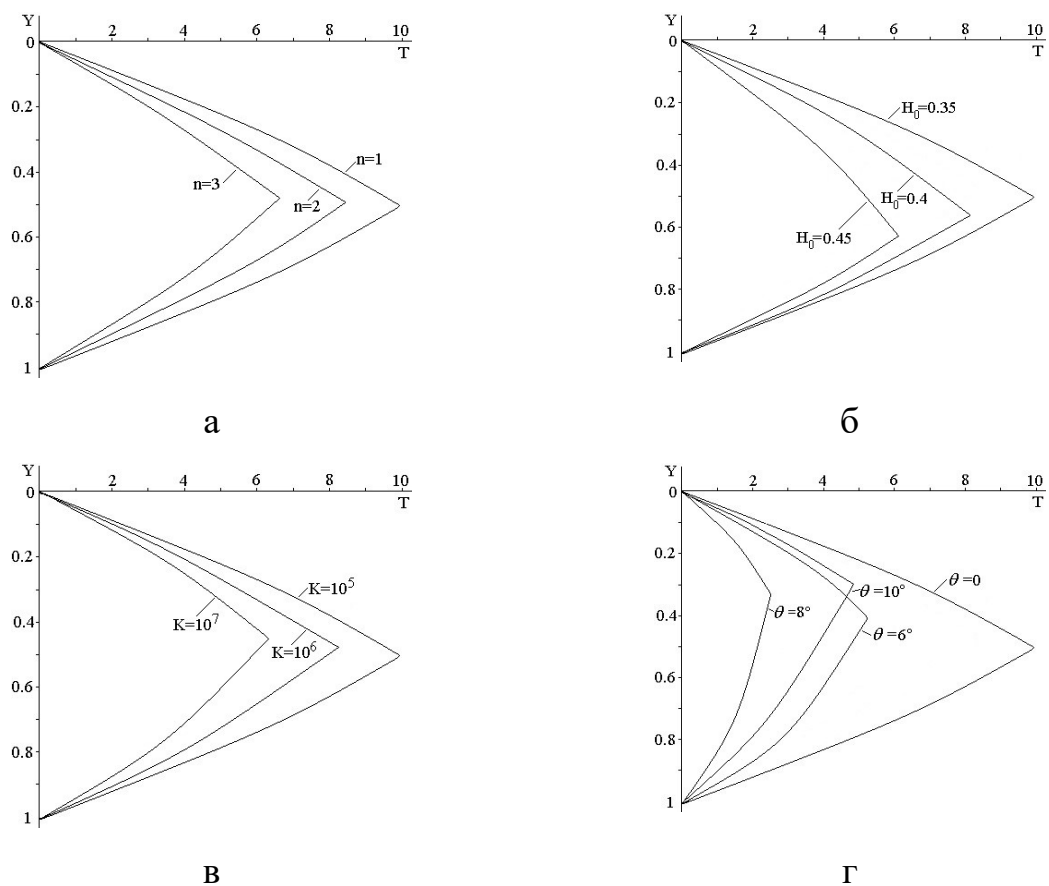


Рис. 3.3 Розташування характеристик при різній зовнішній силі (а), початкових концентраціях частинок (б), швидкості агрегації (в) та кута нахилу (г)

У випадку похилої трубки у вираз для часу досягнення максимальної швидкості осідання частинок (2.27) входить функція $f(H_0)$, яку можна коригувати відповідно до специфіки досліджуваної суспензії. На основі отриманих результатів запропонований новий метод для перевірки стабільності технічної суспензії, крові або нанорідини [3].

Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджено та узагальнено двофазну та трифазну моделі осідання та агрегації частинок у похилих трубках. Задачі сформульовані у двовимірному випадку, що відповідає вузьким прямокутним каналам або прорізам віскозиметрів конусоподібного типу. У припущенні малих кутів нахилу рівняння усереднюються по поперечній координаті, а отримані гіперболічні системи рівнянь розв'язуються методом характеристик. За допомогою чисельних розрахунків виявлено, що збільшення початкової концентрації частинок, їх швидкості агрегації, зовнішньої рівномірної сили і кута нахилу прискорюють осідання, а будь-яке зростання в'язкості рідини сповільнює його, що є фізично доречним. Так чи інакше, поведінка прискорення різна. При невеликому збільшенні кута нахилу осідання прискорюється, а при деяких критичних кутах починає сповільнюватися внаслідок більш високого зсувного опору в дуже в'язкій масі компактно розташованих агрегатів. На основі отриманих результатів запропоновано новий метод оцінки стійкості суспензії.

До основних результатів цього розділу належать:

- Постановка та розв'язання задач, які описують осідання частинок дво- та трифазної суспензій, що агрегують, у похилих трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил.
- Показано, що динаміка осідання у похилих трубках як для дво-, так і для трифазної моделі є складнішою ніж у випадку вертикальної трубки.
- Узагальнення ефекту Бойкотта для випадку суспензій частинок, що агрегують.

- Отримання найбільш оптимальних кутів нахилу для пришвидшення процесу осідання.

Цікавим, на мій погляд, є проведення тестів з осіданням і агрегацією частинок у похилих трубках та запропонування на основі отриманих теоретичних та експериментальних даних нового методу для перевірки ступеня «старіння» суспензії.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора: [3], [58], [129].

РОЗДІЛ 4

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕЧІЙ МІКРО- ТА НАНОРІДИН

В останні роки велика увага приділяється розробці різних мікроелектромеханічних систем (МЕМС), в яких використовуються течії однорідних рідин, розбавлених і концентрованих суспензій наночастинок в мікро- ($h \sim 10\text{--}500$ мкм) і нанорозмірних ($h \sim 10\text{--}500$ нм) каналах. Такі канали застосовуються для проведення медичної діагностики на мікроскопічних зразках біологічних рідин і м'яких тканин (lab-on-a-chip), для очищення мікрооб'ємів рідин або, навпаки, змішування різнорідних рідин. При з'єднанні незмішуваних рідин в мікро- і нанотрубках, що сходяться, можна отримувати високооднорідні емульсії, а при поділі в зовнішньому електричному, магнітному або ультразвуковому полі – проводити очищення високого рівня [42], [49], [71]. Основні труднощі розробки мікро- і нанорідинних технологій пов'язані з тим, що об'ємна витрата, в'язка дисипація та інші характеристики течії не відповідають таким, що розраховані на підставі класичних рівнянь Нав'є-Стокса [114]. Найбільш істотними є відмінності, виявлені в схемах течій, перепадах тиску, ранньому переході до турбулентності та більш високих втратах на тертя, що можна пояснити більшим впливом шорсткості стінки при течіях мікро- і нанорідин [54], [114]. Тому для кращого розуміння відмінностей між течіями макроскопічних рідин і мікро/нанорідин необхідно переформулювати граничні умови, що і зроблено в даній роботі.

Вірогідність граничних умов прослизання вже вивчалась для течій ньютонівських рідин [84], течій макроскопічних рідин поблизу біологічних поверхонь [10], стінок зі спеціальним покриттям прослизання [25], стінок, що проникають [11], в полімерних сплавах [29] і для турбулентних течій з граничним прослизанням [80]. Першу формулу нелінійних граничних умов прослизання запропонував Нав'є у 1873 році у вигляді:

$$(\hat{T}\vec{n})_\tau + \kappa v_\tau = 0 \quad \text{на } \partial\Omega ,$$

де $\partial\Omega$ – границя течії ділянкою Ω , $\bar{v}$ і $\hat{t}$ – тензори швидкості рідини і напруження, $\bar{n}$ і $\bar{\tau}$ є нормальним і тангенціальним одиничними векторами до поверхні, κ – коефіцієнт тертя. Достовірність граничних умов Нав'є для течій рідин через жорсткі мікротрубки вивчена в [105].

Нанорідини як суспензії наночастинок і полімерних молекул мають високу тепло- і електропровідність, низьку питому теплоємність і унікальні електромагнітні властивості внаслідок великої міцності, теплової та електричної провідності наночастинок та їх магнітних властивостей [107], [7]. Класична динаміка рідини і термомеханічні теорії, розроблені для макроскопічних систем, не повністю застосовні до суспензій наночастинок, а також до однорідних рідин на мікро- і нанорівні. Необхідно враховувати швидкість прослизання, розсіювання в'язкості, ефекти теплової повзучості та суцільності, такі як розсіювання на стінці, адгезію та зміни конформацій [70], [73], [113], а також електрокінетичні явища [98]. Для твердих наночастинок у концентрованих ($C > 5\%$) нанорідинах поведінка зсувного згущення може також призвести до високих градієнтів тиску для стійкої течії рідини на відміну від передбачених законом Пуазейля [56]. Газові мікротечії в МЕМС і мікрорідинні пристрої можуть бути використані для вилучення біологічних зразків, охолодження об'єднувальних схем і активного контролю над аеродинамічними силами [39], [125].

4.1 Аналіз особливостей течій мікро- та нанорідин

Перше експериментальне дослідження газової течії в прямокутному скляному каналі з гідравлічним радіусом $D_h = 45,5\text{--}83,1$ мкм і силіконовому каналі з $D_h = 55,8\text{--}72,4$ мкм мікромініатюрних охолоджувачів Джоуля–Томсона відкрило, що коефіцієнт тертя на 10–30 % вище в силіконових каналах і в 3–5 разів більше у скляних каналах, ніж коефіцієнти тертя в діаграмі Муді проти числа Рейнольдса при різній відносній шорсткості ε/D_h , де ε – висота шорсткості [119]. В мікро- і наноканалах внаслідок величезного збільшення співвідношення поверхні до об'єму відносна

шорсткість стає найвпливовішим фактором, який необхідно враховувати в граничних умовах через складну геометрію стінки з шорсткістю, а також складну взаємодію течії і наночастинок зі стінкою.

Експериментальне дослідження течії рідини (1-, 2-пропанол та 1-, 3-пентанол) через силіконові мікроканали з діаметрами $D_h = 5; 12; 25$ мкм показало збільшення коефіцієнта тертя на 5–30 % в залежності від температури у межах $T = 0-85^\circ\text{C}$ у порівнянні з обчисленнями класичних рівнянь Нав'є-Стокса з граничними умовами без прослизання [117]. Течія води через прямокутні мікроканали з нержавіючої сталі з $D_h = 133-367$ мкм і співвідношенням ширини і висоти $W/H = 0,333-1$ вивчалися в [91]. Встановлено, що коефіцієнти тертя як для ламінарних, так і для турбулентних течій відхиляються від класичних прогнозів, а геометричний коефіцієнт W/H має важливий вплив на течію. Перехід від ламінарної течії до турбулентності відбувається при критичних числах Рейнольдса $Re^* = 200-700$, залежних від D_h і W/H . Значення Re^* стає меншим при зменшенні розміру мікроканалу. Течія води через круглі мікротрубки із нержавіючої сталі і плавучого силікону з діаметрами $D = 50-254$ мкм і $\varepsilon/D = 0,69-3,5$ % при $Re = 100-2000$ також показує більше тертя, ніж те, що передбачено класичною динамікою рідини [73]. Різниця зростає зі зменшенням D і збільшенням значень Re . Перехід течії спостерігається при $Re^* = 300-900$ залежно від діаметра мікротрубки $D = 50-150$ мкм. Для течій рідини в прямокутних металевих каналах з шириною $W = 150-600$ мкм і висотою $H = 22,7-26,3$ мкм виявлено збільшення коефіцієнта тертя приблизно на 20 % в порівнянні з класичною теорією при малих значеннях H/W [89]. Течія води через трапецієподібні силіконові мікроканали з $D_h = 51,3-168,9$ мкм і $\varepsilon/D = 1,76-2,85$ % при $Re < 1500$ демонструє коефіцієнт тертя на 8–38 % вище, ніж класична теорія для ламінарних течій [94].

Хороший огляд літератури, опублікованої між 1983 і 2005 рр., щодо експериментальних досліджень коефіцієнта тертя і значень Re^* переходу від

ламінарної течії до турбулентності в мікроканалах і трубках різної геометрії і матеріалів наведено в [113]. Показано, що при $\varepsilon/D_h < 1$ % класичні розрахунки для відповідних ламінарних течій Пуазейля і Куєтта залишаються дійсними. Відхилення коефіцієнта тертя від загальноприйнятої теорії спостерігається через високі ефекти шорсткості та стисливості. Наприклад, менші коефіцієнти тертя, виявлені в течіях газу через мікропробірки із плавучого силікону з $D = 10\text{--}20$ мкм, виникають завдяки ефекту розрідження. Саме через такі значні відхилення експериментальних даних від класичної теорії і пропонується використовувати граничні умови прослизання. Слід зазначити, що ці умови виконуються не лише для розріджених газів, а і для звичайних ньютонівських рідин у мікро- та наноканалах [8], [83], [84], [191].

Результати вищезазначених експериментальних досліджень підтвердили, що вимірний опір ламінарної течії на $\sim 10\text{--}90$ % вище теоретичних значень для відповідних геометрії та параметрів матеріалу, а деякі з них – навіть на 350 % в порівнянні з теоретичними розрахунками без умов прослизання [113], [118], [119].

Для більш низьких чисел Re необхідний перепад тиску приблизно такий же, як для течії Пуазейля, але при більшому Re градієнт тиску стає вищим, ніж в законі Пуазейля із-за вищого тертя на стінці та/або розвитку турбулентності [73]. Показано залежність поведінки течії від матеріалу стінки для металевих, скляних та силіконових трубок. При одних і тих же швидкості течії і діаметру трубки потік рідини через мікротрубку із плавучого силікону потребує вищого градієнта тиску, ніж через мікротрубку із нержавіючої сталі.

4.2 Граничні умови прослизання на стінці 1-го і 2-го порядку

Шорсткість стінок може бути врахована шляхом моделювання шару рідини, що контактує зі стінкою, як течії в пористому середовищі [61]. Такий підхід був застосований до макротечій у [40].

Модифікована модель в'язкості, що враховує шорсткість, була запропонована в [40] для кругових труб з вісесиметричною шорсткістю. Замість звичайної динамічної в'язкості μ в рівняннях Нав'є-Стокса береться в'язкість $\mu + \mu_R$, де

$$\mu_R = A\mu Re_\varepsilon \frac{r}{\varepsilon} \left(1 - \exp\left(-\frac{Re_\varepsilon r}{Re \varepsilon} \right) \right)^2 \quad (4.1)$$

так звана в'язкість шорсткості, r – радіальна координата, $Re = \rho u D / \mu$, u – середня швидкість течії, ρ – густина рідини, $Re_\varepsilon = \rho U \varepsilon / \mu$, U – швидкість у верхній частині елементу шорсткості, A – залежна від матеріалу константа. Розв'язок стаціонарних нестисливих рівнянь Нав'є-Стокса з модифікованою в'язкістю у вигляді (4.1) було знайдено чисельно для граничних умов без прослизання і порівняно з експериментальними даними в [73], [77].

Інша модель ефективної в'язкості для концентрованих нанорідин була запропонована у вигляді [27]:

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_{bf}}{1 - \alpha (d_p / d_f)^{-0.3} C^{1.03}}, \quad (4.2)$$

де μ_{bf} – в'язкість базової рідини, d_p – діаметр наночастинок, $d_f = (6M_{bf} / \pi N_A \rho_{bf})^{1/3}$ – еквівалентний діаметр основної рідини, C – об'ємна частка наночастинок, ρ_{bf} і M_{bf} – густина при температурі $T = 293 \text{ K}$ і молекулярна маса базової рідини, а N_A – число Авогадро.

Для концентрованих нанорідин використовується також нелінійне наближення:

$$\mu_{eff} = \mu_{bf} (1 + k_1 C + k_2 C^2). \quad (4.3)$$

Наприклад, в [74] були прийняті значення $k_1 = 39,1$; $k_2 = 533,9$.

Ефективна густина суспензії може бути введена у звичайній формі, прийнятій для сумішей [32]:

$$\rho_{eff} = \rho_p C + \rho_{bf} (1 - C), \quad (4.4)$$

де ρ_p – густина матеріалу частинок. Рівняння (4.4) також може бути узагальненим для безлічі частинок різної густини і концентрації.

Тоді вирази для ефективної теплопровідності k та питомої теплоти нанорідини c_p набувають вигляду [75]:

$$k = k_{bf} \frac{(k_p + 2k_{bf}) - 2C(k_{bf} - k_p)}{(k_p + 2k_{bf}) + C(k_{bf} - k_p)} + k_{Brownian}, \quad (4.5)$$

$$k_{Brownian} = 5 \cdot 10^4 \beta C \rho_{bf} c_{bf} \sqrt{\frac{k_B T}{d_p}} f(T, C),$$

$$c_{eff} = \frac{\rho_p c_p C + \rho_{bf} c_{bf} (1 - C)}{\rho_p C + \rho_{bf} (1 - C)}, \quad (4.6)$$

де k_p, k_{bf} і c_p, c_{bf} – теплопровідність і питома теплота частинок і базової рідини, k_B – стала Больцмана, β – стала, залежна від матеріалу, концентрації частинок і температури, $f(T, C)$ – функція, що визначається з експериментів.

Експериментально досліджено тепловіддачу стійкої ламінарної течії нанорідини у двовимірній мікротрубі ($d = 50$ мкм, $L = 250$ мкм) для наночастинок Al_2O_3 , CuO , SiO_2 і ZnO з $d_p = 25, 45, 65, 80$ нм і концентраціями $C = 1\text{--}4$ % в етиленгліколі як базової рідини [41], [104]. Відповідні стаціонарні нелінійні нестисливі двовимірні рівняння Нав'є-Стокса та рівняння тепла були розв'язані методом кінцевих об'ємів. Виявлено, що нанорідина з частинками SiO_2 має найбільше число Нуссельта, потім слідує ZnO , CuO , Al_2O_3 і, нарешті, чистий етиленгліколь. Число Нуссельта для всіх випадків збільшується зі зростанням числа Рейнольдса і об'ємної концентрації частинок C та зменшенням діаметра частинок d_p .

У більшості робіт стосовно течій в мікроканалах розглядаються стаціонарні двовимірні рівняння Нав'є-Стокса з граничними умовами без прослизання. Шорсткість вводиться у вигляді малої амплітуди хвилястості стінки, а розв'язок шукається як зростання показника малого параметра ε/D [118]. Такий же підхід, який застосовується і до макротечій, виявив появу прослизання течії по стінці з нормальними [68] і випадково шорсткими [50]

стінками. Коефіцієнт прослизання отримано за допомогою технік конформного відображення [47] та методу відповідної асимптоти [78]. Чисельні результати показують, що мікротечії є складнішими, ніж макротечії [118], а перепад тиску на 65 % вищий, ніж передбачений класичною течією Пуазейля, коли шорсткість ε / D досягає 5 %. Як було раніше показано в класичних експериментах Дж. Нікурадзе на шорстких трубках [86], у макротечіях однакова шорсткість $\sim 5\%$ не впливає на коефіцієнт тертя [56]. У мікротечіях було виявлено видимі флуктуації в полях течій, а вплив шорсткості на профіль течії та коефіцієнт тертя були різними [118].

Якщо ширина каналу h сумірна з діаметром частинок суспензії, яка протікає по каналу, то шорсткість стінки робить істотний вплив на взаємодію частинок суспензії. При цьому внаслідок дифузного відбиття частинки можуть набувати імпульс в поздовжньому і тангенціальному стосовно стінки напрямках, що відповідає прослизанню частинок відносно стінки [54]. Граничними умовами при цьому можуть бути використані умови прослизання першого (для мікрорідин) і другого (для нанорідин) порядків, які були запропоновані Дж. Максвеллом для течій розріджених газів у стінок каналів і твердих поверхонь.

Для суспензій мікрочастинок умови прослизання першого порядку на поверхні Ω мають вигляд [76]:

$$\left(u - u_w - \frac{2 - \sigma}{\sigma} Kn \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (4.7)$$

де u_w – швидкість стінки, $Kn = \lambda / L$ – число Кнудсена, λ – довжина вільного пробігу частинки, L – характерна довжина, σ – безрозмірний імпульс, якого набуває частинка при зіткненні зі стінкою, n – нормаль до поверхні, $\sigma = 1$ для дифузійного відбиття, $\sigma = 2$ – для класичних рідин [70]. Умову (4.7) отримано шляхом розкладу швидкості рідини в ряд Тейлора з точністю до похідних другого порядку. У газах довжина вільного пробігу визначається

діаметрами частинок та їх числовою концентрацією N наступним чином:

$$\lambda = (\sqrt{2} N \pi d_p^2)^{-1} \quad [13].$$

Вплив прослизання на поле швидкостей істотний всередині деякого тонкого шару біля стінки (шар Кнудсена), товщина якого може бути обчислена на підставі моделі твердих сфер [43]:

$$\delta = \frac{k_B T}{\pi d_p^2 p}, \quad (4.8)$$

де p – гідростатичний тиск, T – температура, k_B – стала Больцмана, d_p – діаметр частинок. В неперервному середовищі

$$\delta = \mu \sqrt{\frac{\pi}{2 p \rho}}. \quad (4.9)$$

Модифікація (4.7) була запропонована у [54] у вигляді:

$$\left(u - u_w - \frac{2 - \sigma}{\sigma} \frac{Kn}{1 - Kn \cdot f(Kn)} \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (4.10)$$

де $f(Kn)$ – емпіричний параметр, який необхідно визначити; $|f(Kn)| < 1$.

Модель (4.7) використовується в діапазоні $0,01 < Kn \leq 0,1$, що відповідає мікрорідинам. При $Kn < 0,01$ впливом частинок можна знехтувати, оскільки умови прослизання на стінці дають хорошу відповідність експериментальним вимірюванням і теоретичним розрахункам [13], [54]. В діапазоні $0,1 < Kn \leq 1$ граничною умовою прослизання другого порядку для течій нанорідин використовується форма, запропонована Максвеллом:

$$\left(u - u_w - \frac{2 - \sigma}{\sigma} Kn \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{Kn}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (4.11)$$

Таким чином, граничні умови (4.7) використовуються для течій в мікроканалах, тоді як умова (4.11) більш точна для течій у наноканалах, а також для течій концентрованих нанорідин наночастинок або фулеренів (C_{60} або інші). Тоді дифузне віддзеркалення і довжина вільного пробігу можуть бути пов'язані з частинками. У загальному вигляді гранична умова другого порядку (4.11) була запропонована у формі [2]:

$$\left(u - u_w - C_1 Kn \frac{\partial u}{\partial n} + C_2 Kn^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.12)$$

Член $C_1 Kn$ в (4.12) є постійною довжиною прослизання [39], що дорівнює довжині вільного пробігу частинок рідини. Хороший огляд експериментальних даних коефіцієнтів $C_{1,2}$ наведено в [54]. В ході експериментів на суспензіях наночастинок Al_2O_3 , CuO , SiO_2 , ZnO з діаметрами $d_p = 20-60$ нм і концентраціями $C = 0-4$ % на основі води, гліцерину і етиленгліколю, а також на водних суспензіях фулеренів C_{60} ($d_p = 1,6-1,8$ нм) були проведені оцінки діапазонів значень констант C_1, C_2 в (3): $C_1 \in [1; 1,15]$, $C_2 \in [0.5; 1,31]$.

Моделювання молекулярної динаміки показало, що швидкість прослизання на стінці зменшується зі збільшенням співвідношення ε / λ як для звичайної, так і для стохастичної шорсткості [79]. У перехідному режимі $Kn > 0.1$ закони збереження для тензора напружень, вектора теплового потоку та інших параметрів не виконуються, що вимагає коректних членів вищого порядку [18]. При дослідженні тепло- та масообміну рівняння Нав'є-Стокса і балансу тепла розв'язуються за допомогою модифікованих граничних умов другого порядку у вигляді [23]:

$$\left(u - u_w - \frac{2-\sigma}{\sigma} Kn \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{3(\gamma-1)}{2\pi\gamma} \frac{Kn^2 Re}{Ec} \frac{\partial T}{\partial s} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.13)$$

$$\left(T - T_w - \frac{2\gamma(2-\tilde{\sigma})}{(\gamma+1)\tilde{\sigma}} \frac{Kn}{Pr} \frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

де T і T_w – температура в течії і на стінці, s – тангенціальний напрямок (координата), $\tilde{\sigma}$ – коефіцієнт живлення енергії, $\gamma = C_p / C_V$ – співвідношення питомого тепла, $Re = \rho u D / \mu$ – число Рейнольдса, $Pr = C_p \mu / k$ – число Прандтля, $Ec = u^2 / C_p \Delta T$ – число Еккерта, k – теплопровідність, ΔT – зазначена різниця температур в даній області. Ідеальний енергетичний обмін відповідає значенню $\tilde{\sigma} = 1$, коли енергія відбитих (розсіяних) частинок еквівалентна

температурі стінки. Тепловий та тангенціальний коефіцієнт переноса імпульсу на стінці були виміряні для різних типів газів і поверхонь, а також було показано, що вони сильно залежать від стану матеріалу і поверхні [106]. Їх значення можна зменшити шляхом застосування відповідних методів підготовки поверхні.

Для умов прослизання другого порядку запропонована [54] і досліджена для течії Нав'є-Стокса у трубці [101] ефективна в'язкість:

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_{bf}}{1 + \alpha Kn}, \alpha = \frac{2\alpha_0}{\pi \tan(\alpha_1 Kn^\beta)}, \quad (4.14)$$

де $\alpha_1 = 4$, $\beta = 0,4$, $\alpha_0 = 64 / 3\pi(1 - 4/b)$, $b = -1$.

Як було показано в [31], [32], експериментальні дані щодо ізотермічних течій Пуазейля розбавлених стисливих газів у мікроканалах краще відповідають умові швидкості прослизання:

$$\left(u - u_w + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \ln \rho \right) \bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.15)$$

ніж умові Максвелла (4.13), оскільки рідина, що стискає, завжди ковзає вздовж стінки у напрямку зменшення густини і, отже, для випадку ізотермічних течій – у напрямку зниження тиску [15].

Кінематику наноструктури нанотрубок можна моделювати за допомогою теорії пучка Ейлера–Бернуллі, яка виявилася застосовною до течій у трубці при $L/D > 10$ [88]. Осциляції мікротрубок, по яких протікають нанорідини, вивчали з використанням даної теорії з профілями швидкості без прослизання [95].

Тому значення ε / λ можна вважати критерієм для виконання граничних умов без прослизання. При $\varepsilon \leq \lambda$ виконується умова без прослизання, в іншому випадку на стінці присутнє значне прослизання. Як було показано порівняльним чисельним моделюванням течій у мікро- і наноканалах з різною геометрією, проведених завдяки моделюванню молекулярної динаміки, чисельних розв'язків рівняння Больцмана, а також точних обчислень рівнянь Нав'є-Стокса, підхід прослизання–течія є надзвичайно

надійним в тому сенсі, що він якісно точний і фізично доречний [39]. Узагальнено класичні течії для швидкості прослизання та отримано аналітичні розв'язки термічного стрибка граничних умов [39], [54], [55]. Вони є зручними для порівняльних досліджень як експериментальних, так і чисельних обчислень з визначенням модельних коефіцієнтів у формулюванні граничних умов для розведених і концентрованих мікро- і наносуспензій.

Дослідження впливу умов прослизання (4.7) на характеристики течій суспензій мікрочастинок (мікрорідин) має велике значення для інтерпретації експериментів з течії біологічних рідин, які є суспензіями клітин, везикул, молекулярних комплексів, полімерних структур та інших мікрочастинок. Для течій суспензій неорганічних і органічних наночастинок, а також мікрорідин з додаванням наночастинок великий інтерес представляє вивчення розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса з умовами (4.11) на стінках.

4.3 Аналітичні розв'язки для класичних ламінарних течій Пуазейля і Куетта з урахуванням граничних умов прослизання 2-го порядку

У даному підрозділі для поверхонь з однаковою шорсткістю отримані аналітичні розв'язки для течії Пуазейля у кругових трубках та між паралельними пластинами та коаксіальними циліндрами [55], а також для течії Куетта між паралельними пластинами та коаксіальними циліндрами, що обертаються [54]. Отримані та проаналізовані подібні розв'язки для різних поверхонь. Граничні умови (4.12) приймаються у вигляді:

$$\left(u - u_w - \alpha_j \frac{\partial u}{\partial n} + \beta_j \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \bigg|_{\partial \Omega_j} = 0, \quad (4.16)$$

де $j=1,2$, $\alpha_j = C_{1j}Kn_j$, $\beta_j = C_{2j}Kn_j^2$.

1. Течія Куетта між паралельними пластинами.

Розглянемо зсувну ламінарну течію між пластинами $y=0$ і $y=h$, що переміщуються зі швидкостями $\vec{V}_1=(V_1,0,0)$ і $\vec{V}_2=(V_2,0,0)$ відповідно, яка описується розподілом швидкості $v(y)=V_1+(V_2-V_1)y/h$ з об'ємною

витратою рідини $Q_{Couette} = S \int_0^h v(y) dy = (V_1 + V_2)h/2$ і постійним зсувним напруженням $\tau_{Couette} = \mu(V_2 - V_1)/h$, де μ – в'язкість рідини.

Для мікро- і нанотечій коефіцієнти з однаковим розподілом лінійної швидкості визначаються із (4.16). В результаті маємо:

$$\begin{aligned} v_{Couette}^{slip}(y) &= \frac{V_1 h + \alpha_2 V_1 - \alpha_1 V_2}{h + \alpha_2 - \alpha_1} + \frac{V_2 - V_1}{h + \alpha_2 - \alpha_1} y, \\ Q_{Couette}^{slip} &= \frac{(V_1 + V_2)h^2 + 2h(\alpha_2 V_1 - \alpha_1 V_2)}{2(h + \alpha_2 - \alpha_1)}, \\ \tau_{Couette}^{slip} &= \mu \frac{V_2 - V_1}{h + \alpha_2 - \alpha_1}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

При $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ вирази (4.17) мають форму розв'язку класичної течії Куетта; при $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$ (4.17) дають вирази, представлені в [54]. Завдяки полю лінійної швидкості член 2-го порядку не впливає на форму розв'язку. Якщо припустити, що $V_2 > V_1$, то вирази (4.17) запишуться у вигляді [20]:

$$v_{Couette}^{slip}(0) - V_1 = \frac{-\alpha_1(V_2 - V_1)}{h + \alpha_2 - \alpha_1}, \quad v_{Couette}^{slip}(h) - V_2 = \frac{-\alpha_2(V_2 - V_1)}{h + \alpha_2 - \alpha_1} \quad (4.18)$$

і обидві різниці у (4.18) будуть позитивними, коли $\alpha_1 - \alpha_2 > h$, тобто різниця в довжинах постійного прослизання двох пластин повинна перевищувати відстань між пластинами. Ця умова справедлива для досить високих чисел Кнудсена. У зв'язку з розвитком реології мікро- і нанорідин поправку (4.18) необхідно враховувати для оцінок в'язкості у ротаційних віскозиметрах.

Порівняння мікро- (граничні умови прослизання) з макротечією (граничні умови без прослизання) дає:

$$\begin{aligned} Q_{Couette}^{slip} - Q_{Couette} &= \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(V_2 - V_1)h}{2(h + \alpha_2 + \alpha_1)} > 0 \quad \text{при } \alpha_1 - \alpha_2 > h \text{ і} \\ \tau_{Couette}^{slip} - \tau_{Couette} &= \mu \frac{(V_2 - V_1)(-\alpha_1 - \alpha_2)}{h(h + \alpha_2 + \alpha_1)} < 0 \quad \text{при } \alpha_1 < \alpha_2 \text{ або } \alpha_1 - \alpha_2 > h. \end{aligned}$$

Таким чином, при $\alpha_1 - \alpha_2 > h$ течія з граничними умовами прослизання має меншу зсувну швидкість та уявну в'язкість з більшою швидкістю течії, ніж течія з граничними умовами без прослизання.

2. Течія Куетта між коаксіальними циліндрами, що обертаються.

Розглянемо два коаксіальних циліндри з віссю $0z$ та радіусами R_1 і R_2 , які обертаються з кутовими швидкостями Ω_1 і Ω_2 (припустимо, що $\Omega_2 > \Omega_1$) (Рис. 4.1). Тоді відомий розв'язок рівняння Нав'є-Стокса для кутової швидкості v_θ рідини з граничними умовами прослизання має вигляд:

$$\begin{aligned} v_\theta(r) &= \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r - \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}, \\ \tau_{rot} &= \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

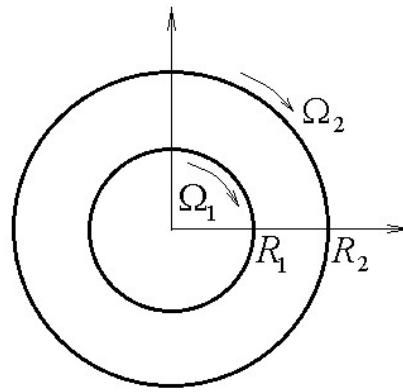


Рис. 4.1 Течія Куетта між коаксіальними циліндрами, що обертаються

Для течій мікро- та нанорідини маємо розв'язок з граничними умовами (4.16) [20]:

$$\begin{aligned} v_\theta^{slip}(r) &= \frac{\Omega_2 R_2^4 A_1 - \Omega_1 R_1^4 A_2}{R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 + \alpha_1) A_2} r - \\ &\quad - \frac{\Omega_2 R_1^3 R_2^4 (R_1 + \alpha_1) - \Omega_1 R_1^4 R_2^3 (R_2 - \alpha_2)}{R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 + \alpha_1) A_2} \frac{1}{r}, \\ \tau_{rot}^{slip}(r) &= \frac{\Omega_2 R_2^4 A_1 - \Omega_1 R_1^4 A_2}{R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 + \alpha_1) A_2} + \\ &\quad + \frac{\Omega_2 R_1^3 R_2^4 (R_1 + \alpha_1) - \Omega_1 R_1^4 R_2^3 (R_2 - \alpha_2)}{R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 + \alpha_1) A_2} \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

де $A_{1,2} = R_{1,2}^2 + \alpha_{1,2} R_{1,2} - \beta_{1,2}$.

При деяких наборах параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ значення

$$v_{\theta}^{slip}(R_{1,2}) = \frac{\Omega_{1,2} R_{1,2}^3 (R_{2,1}^2 (R_2^2 - R_1^2) = \alpha_{2,1} R_{2,1} (R_1^2 + R_2^2))}{R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 + \alpha_1) A_2} \pm$$

$$\pm \frac{2\beta_{2,1} R_{1,2}^2 + 2\Omega_{2,1} R_{1,2} R_{2,1}^4 (\alpha_{1,2} R_{1,2} - \beta_{1,2})}{R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 + \alpha_1) A_2}$$

будуть більшими ($v_{\theta}^{slip}(R_{1,2}) > \Omega_{1,2} R_{1,2}$), а зсувне напруження стінки

$$\tau_{rot}^{slip}(R_{1,2}) = \frac{(\Omega_2 R_2^4 A_1 - \Omega_1 R_1^4 A_2) R_{1,2}^2 + \Omega_2 R_1^3 R_2^4 (R_1 + \alpha_1) - \Omega_1 R_1^4 R_2^3 (R_2 - \alpha_2)}{(R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 + \alpha_1) A_2) R_{1,2}^2}$$

меншим, ніж у відповідній течії з граничними умовами без прослизання. Використовуючи цю закономірність, можуть бути розроблені мікро/нанорідинні пристрої з низьким і високим зсувним напруженням для розділених по шарах або інтенсивно змішаних течій між циліндрами, що обертаються, коли умова $R_2 - R_1 \ll R_1$ не є допустимою.

3. Ламінарна течія у похилому каналі.

Розглянемо ламінарну течію Куетта $v_x = v(y)$ у прямокутному каналі $y=0$ з достатньо великою довжиною L і шириною h , нахиленому під кутом φ до горизонталі (Рис. 4.2).

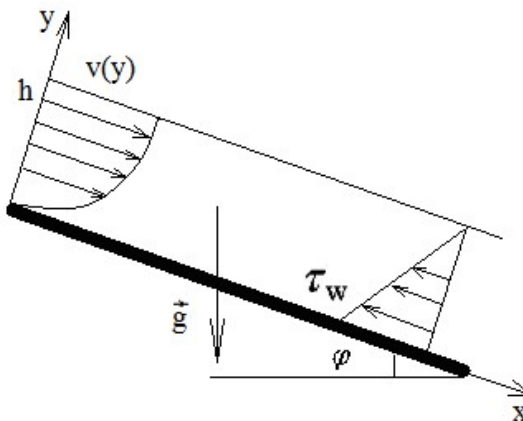


Рис. 4.2 Схема ламінарної течії в нахиленому каналі

На вільній поверхні кінематична гранична умова приймається у вигляді:

$$\left. \frac{dv(y)}{dy} \right|_{y=h} = 0. \quad (4.21)$$

Швидкість, об'ємна витрата і зсувне напруження визначаються відомими виразами:

$$\begin{aligned} v_{incl}(y) &= \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} y(2h - y), \\ Q_{incl} &= \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} h^3, \\ \tau_{incl} &= \rho g \sin \alpha (h - y) = \tau_b \left(1 - \frac{y}{h} \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

де $\tau_b = \rho g h \sin \alpha$ – зсувне напруження на нижній частині каналу.

Для одного і того ж розв'язку з граничними умовами швидкості прослизання з (4.16), (4.21) можна отримати такі вирази [20]:

$$\begin{aligned} v_{incl}^{slip}(y) &= \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} (2(\alpha h + \beta) + y(2h - y)), \\ Q_{incl}^{slip} &= \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} h(\alpha h + \beta + \frac{h^2}{3}), \\ \tau_{incl}^{slip} &= \tau_b \left(1 - \frac{y}{h} \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

де α, β – коефіцієнти прослизання для дна каналу.

Порівнюючи (4.22) і (4.23), можна зробити висновок, що

$$\begin{aligned} v_{incl}^{slip}(0) &= \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} (\alpha h + \beta) > 0, \quad v_{incl}^{slip}(h) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} (2(\alpha h + \beta) + h^2) > v_{incl}(h), \\ Q_{incl}^{slip} &> Q_{incl}, \quad \tau_{incl}^{slip} = \tau_{incl} \end{aligned}$$

для позитивних значень α, β . Оскільки в деяких роботах вказується, що коефіцієнт C_2 в (4.12) негативний, то порівняльні результати безумовно справедливі для $C_1 > C_2 Kn / h$.

4. Течія Пуазейля між паралельними пластинами.

Ламінарна течія $v_x = v(y)$ між пластинами $y = \pm h$ (Рис. 4.3), що рухається завдяки перепаду тиску $\Delta p = p^+ - p^-$ між входом $p|_{x=0} = p^+$ і виходом $p|_{x=L} = p^-$ при граничних умовах без прослизання, має наступні розподіли профілів течії, об'ємну витрату і зсувне напруження:

$$v_{\text{paral}}(y) = \frac{\Delta p h^2}{2\mu L} \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right), \quad Q_{\text{paral}} = \frac{2}{3} \frac{\Delta p h^3}{\mu L}, \quad \tau_{\text{paral}} = \frac{\tau_w}{h} y, \quad (4.24)$$

де $\tau_w = \Delta p h / L$ – зсувне напруження стінки.

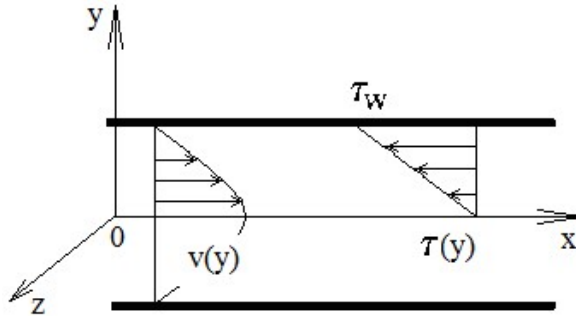


Рис. 4.3 Течія Пуазейля між паралельними пластинами

Один і той же параболический профіль швидкості при граничних умовах прослизання (4.16) і різних коефіцієнтах прослизання верхньої і нижньої пластин має вигляд:

$$\begin{aligned} v_{\text{paral}}^{\text{slip}}(y) &= \frac{\Delta p}{\mu L} \left(\frac{h^2}{2} + \frac{\beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_1 + h(\beta_1 + \beta_2 + 2\alpha_1 \alpha_2) + h^2(-\alpha_1 + \alpha_2)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_1 - \beta_2 - h(-\alpha_1 + \alpha_2)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)} y - \frac{y^2}{2} \right), \\ Q_{\text{paral}}^{\text{slip}} &= \frac{2}{3} \frac{\Delta p h}{\mu L} \frac{2h^3 + 2h^2(-\alpha_1 + \alpha_2) + 3h(\beta_1 + \beta_2 + 2\alpha_1 \alpha_2) + 3(\beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_1)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)}, \\ \tau_{\text{paral}}^{\text{slip}} &= \frac{\tau_w}{h} \left(\frac{\beta_1 - \beta_2 + h(\alpha_1 - \alpha_2)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)} - y \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Порівняльне дослідження (4.24) і (4.25) показало, що різниця швидкостей зсуву при граничних умовах з прослизанням і без є постійною від'ємною величиною

$$\tau_{\text{paral}}^{\text{slip}} - \tau_{\text{paral}} = \frac{\Delta p}{L} \frac{\beta_1 - \beta_2 + h(\alpha_1 - \alpha_2)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)} < 0,$$

КОЛИ

$$\left[\begin{array}{l} \alpha_1 - \alpha_2 < 2h, \\ \beta_1 - \beta_2 < h(\alpha_1 + \alpha_2) \end{array} \right] \text{ або } \left[\begin{array}{l} \alpha_1 - \alpha_2 > 2h, \\ \beta_1 - \beta_2 > h(\alpha_1 + \alpha_2) \end{array} \right]. \quad (4.26)$$

Враховуючи обмеження (4.26), відповідна різниця швидкостей течії

$$Q_{paral}^{slip} - Q_{paral} = 2 \frac{\Delta p h}{\mu L} \frac{\beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_1 + h(\beta_1 + \beta_2 + 2\alpha_1 \alpha_2) + h^2(-\alpha_1 + \alpha_2)}{2h + (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

може бути або позитивною, або від'ємною, проте серед них можна вибрати великий набір параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, що забезпечують умову $Q_{paral}^{slip} > Q_{paral}$. Таким чином, швидкість зсуву і уявна в'язкість можуть бути зменшені за рахунок граничних умов прослизання стінки, що забезпечує більшу швидкість течії в каналі при однаковому перепаді тиску Δp . У роботах [54], [55] наведений розв'язок задачі для пластин з однаковими коефіцієнтами прослизання.

5. Течія Пуазейля у кругових трубках.

Розглянемо рухому внаслідок перепаду тиску ($\Delta p = p^+ - p^-$) вісесиметричну ($\partial/\partial\theta = 0$) ламінарну течію $v_x = v(r)$ через трубку з віссю Ox , радіусом R і довжиною L , яка описується наступним профілем швидкості, об'ємною витратою і зсувним напруженням:

$$v_{pois} = v_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad Q_{pois} = \frac{\Delta p}{8\mu L} \pi R^4, \quad \tau_{pois} = \tau_{wall} \frac{r}{R}, \quad (4.27)$$

де $v_{max} = \Delta p R^2 / (4\mu L)$, $\tau_{wall} = -\Delta p R / 2L$.

Для мікро- і нанорідин з граничними умовами (4.16) розв'язок має вигляд [39], [54], [55]:

$$\begin{aligned} v_{pois}^{slip}(r) &= \frac{\Delta p R^2}{4\mu L} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 \frac{\beta - \alpha R}{R^2} \right), \\ Q_{pois}^{slip} &= \frac{\Delta p}{8\mu L} \pi R^2 \left(R^2 + 4(\beta - \alpha R) \right), \\ \tau_{pois}^{slip} &= \tau_{pois}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

де α, β – коефіцієнти прослизання для кругової стінки.

Порівняння (4.27) і (4.28) свідчить про те, що $Q_{pois}^{slip} > Q_{pois}$ при $\beta/\alpha > R$ або при високих числах Кнудсена $Kn > R \cdot C_1 / C_2$. Згідно з даними для $C_{1,2}$, представленими в [54], течія нанорідини володіє вищою ефективністю внаслідок більших швидкостей течії при однаковому перепаді тиску.

Зауважимо, що для мікрорідин ($\beta=0$) швидкість течії з граничними умовами прослизання завжди нижче, ніж для макрорідин.

6. Течія Пуазейля в трубках еліптичного поперечного перерізу.

Розглядається ламінарна течія, що рухається завдяки перепаду тиску, через трубку з віссю Oz і еліптичним поперечним перерізом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ з допоміжними осями a і b та описується наступними виразами [20]:

$$\begin{aligned} v_{ell}(x,y) &= V_{max} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad Q_{ell} = \frac{\pi a^3 b^3 \Delta p}{4 \mu L (a^2 + b^2)}, \\ \tau_{xz} &= \frac{\Delta p}{L} \frac{b^2 x}{a^2 + b^2}, \quad \tau_{yz} = \frac{\Delta p}{L} \frac{a^2 y}{a^2 + b^2}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\text{де } V_{max} = \frac{\Delta p}{2 \mu L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

У цьому випадку розв'язок рівнянь Нав'є-Стокса з граничними умовами прослизання (4.16) має вигляд:

$$\begin{aligned} v_{ell}^{slip}(x,y) &= V_{max} \left(1 - \frac{x^2 + 2(\alpha a - \beta)}{a^2} - \frac{y^2 + 2(\alpha b - \beta)}{b^2} \right), \\ Q_{ell}^{slip} &= Q_{ell} \left(1 + \frac{\beta - \alpha a}{a^2} + \frac{\beta - \alpha b}{b^2} \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

в той час, як поле зсувного напруження таке ж, як і в (4.29).

Аналогічний профіль швидкості зсуву і збільшення об'ємної витрати можуть бути отримані при $\beta/\alpha > \max\{a,b\}$ або $Kn > \max\{a,b\} \cdot C_1/C_2$.

7. Течія Пуазейля між двома коаксіальними круговими трубками.

Розглянемо аналогічну попередньому пункту течію, що виникає внаслідок перепаду тиску та рухається між концентричними трубками з повздовжньою віссю Ox і радіусами R_1 і R_2 (Рис. 4.4).

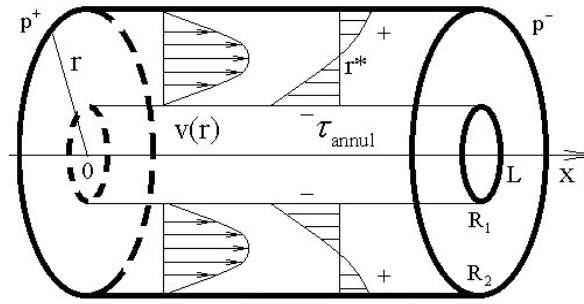


Рис. 4.4 Схема течії Пуазейля між коаксіальними циліндрами

Класичний розв'язок рівнянь Нав'є-Стокса для граничних умов без прослизання на обох кругових стінках має вигляд:

$$\begin{aligned}
 v_{annul}(r) &= \frac{\Delta P}{4\mu L} \left(R_1^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2 / R_1)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right), \\
 Q_{annul} &= \frac{\pi \Delta p}{8\mu L} \left(R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln(R_2 / R_1)} \right), \\
 \tau_{annul} &= \frac{\Delta P}{4L} \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2 / R_1)} \frac{1}{r} - 2r \right),
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Швидкість в (4.31) максимальна, а зсувне напруження дорівнює нулю

$$v_{annul} = u_{max} \equiv \frac{\Delta P}{4\mu L} \left(R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{2\ln(R_2 / R_1)} \left(1 - \ln \frac{(R_2 / R_1)^2 - 1}{\ln(R_2 / R_1)} \right) \right), \quad \tau_{annul} = 0$$

$$\text{при } r = r^* = \sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{2\ln(R_2 / R_1)}} \quad (\text{Рис. 4.4}).$$

Коли для течії виконуються граничні умови прослизання (4.16) з різними коефіцієнтами прослизання на внутрішній і зовнішній трубках, розв'язок набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
v_{annul}^{slip}(r) &= \frac{\Delta P}{4\mu LZ} \left(R_1(R_1^2 - 2\alpha_1 R_1 + 2\beta_1)(R_2 \ln R_2 - \alpha_2) - R_2(R_2^2 - 2\alpha_2 R_2 + 2\beta_2) \times \right. \\
&\quad \left. \times (R_1 \ln R_1 - \alpha_1)(R_2^2 - R_1^2) + 2(\alpha_1 R_1 - \alpha_2 R_2 + \beta_2 - \beta_1) R_1 R_2 \ln(r) - r^2 \right), \\
Q_{annul}^{slip} &= \frac{\pi \Delta P}{8\mu LZ} \left(2(R_1(R_1^2 - 2\alpha_1 R_1 + 2\beta_1)(R_2 \ln R_2 - \alpha_2) - R_2(R_2^2 - 2\alpha_2 R_2 + 2\beta_2) \times \right. \\
&\quad \left. \times (R_1 \ln R_1 - \alpha_1)(R_2^2 - R_1^2) + \frac{R_1 R_2}{2}(R_2^2 - R_1^2 + 2(\alpha_1 R_1 - \alpha_2 R_2 + \beta_2 - \beta_1)) \times \right. \\
&\quad \left. \times (2R_2^2 \ln R_2 - 2R_1^2 \ln R_1 - R_2^2 + R_1^2) - (R_2^4 - R_1^4) \right), \\
\tau_{annul}^{slip} &= \frac{\Delta P}{4LZ} \left(\frac{R_1 R_2}{r} (R_2^2 - R_1^2 + 2(\alpha_1 R_1 - \alpha_2 R_2 + \beta_2 - \beta_1)) - 2r \right),
\end{aligned} \tag{4.32}$$

де $Z = R_1 R_2 \ln(R_2 / R_1) + \alpha_1 R_2 - \alpha_2 R_1$.

У цьому випадку v_{annul}^{slip} досягає максимуму при

$$r = r^{**} = \sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2 + 2(\alpha_1 R_1 - \alpha_2 R_2 + \beta_2 - \beta_1)}{2(\ln(R_2 / R_1) + \alpha_1 / R_1 - \alpha_2 / R_2)}} \quad \text{і} \quad r^{**} > r^* \quad \text{або} \quad r^{**} < r^*, \quad \text{які залежать від}$$

коефіцієнтів прослизання $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$ і радіусів $R_{1,2}$. Як і в кругових трубках (розв. (4.27), (4.28)), можна досягти $Q_{annul}^{slip} > Q_{annul}$ відповідним вибором параметрів стінок (тобто, прослизання) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, залежних від радіусів R_1, R_2 . В роботі [55] розв'язок (4.32) представлено у спрощеному вигляді при $\alpha_1 = \alpha_2$ і $\beta_1 = \beta_2$.

4.4 Тришарова ламінарна течія незмішуваних мікро/нанорідин між рухомими пластинами

4.4.1 Постановка і розв'язок задачі

Розглядається ламінарна течія трьох незмішуваних рідин з різними в'язкостями $\mu_{1,2,3}$ між двома паралельними пластинами, що рухаються зі швидкостями U_1 і $U_2 > U_1$ (Рис. 4.5). Течія підтримується за рахунок $p^+ = p^- = 0$ і руху пластин (течія Куетта). Товщини шарів h_1 , $h_2 - h_1$ і $h - h_2$ вважаються постійними. Відмінності у в'язкостях можуть виникати внаслідок різних концентрацій мікро/наночастинок в однорідній суспензії, що взаємодіє зі стінками. Шари з в'язкостями μ_1 і μ_3 є тоншими в порівнянні з внутрішнім шаром рідини з в'язкістю μ_2 і можуть розглядатися як граничні шари [184].

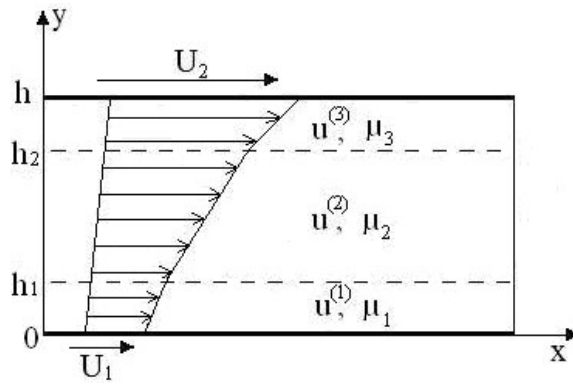


Рис. 4.5 Ламінарна течія трьох рідин між рухомими пластинами

Розв'язок рівнянь Нав'є-Стокса в цьому випадку задається лінійною функцією (див. п.4.3.1):

$$u^{(j)} = C_1^{(j)} y + C_2^{(j)}, \quad (4.33)$$

де $j=1,2,3$, $C_{1,2}^{(j)}$ – константи інтегрування, які можуть бути визначені з умов прослизання, причому шорсткості верхньої і нижньої пластин будемо вважати різними:

$$\begin{aligned} \left(u^{(1)} - \alpha_1 \frac{du^{(1)}}{dy} + \beta_1 \frac{d^2 u^{(1)}}{dy^2} \right) \Big|_{y=0} &= U_1, \\ \left(u^{(3)} - \alpha_2 \frac{du^{(3)}}{dy} + \beta_2 \frac{d^2 u^{(3)}}{dy^2} \right) \Big|_{y=h} &= U_2, \end{aligned} \quad (4.34)$$

і умов неперервності швидкості і зсувного напруження на поверхнях взаємодії:

$$\begin{aligned} \left(u^{(1)} - u^{(2)} \right) \Big|_{y=h_1} &= 0, & \left(\mu_1 \frac{du^{(1)}}{dy} - \mu_2 \frac{du^{(2)}}{dy} \right) \Big|_{y=h_1} &= 0, \\ \left(u^{(2)} - u^{(3)} \right) \Big|_{y=h_2} &= 0, & \left(\mu_2 \frac{du^{(2)}}{dy} - \mu_3 \frac{du^{(3)}}{dy} \right) \Big|_{y=h_2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

Підставлення (4.33) в (4.34) і (4.35) дає вирази для $C_{1,2}^{(1,2,3)}$ і, нарешті, швидкості в безрозмірній формі набудуть вигляду [184]:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{\Delta_c} [\gamma_3 + \gamma_2 - \gamma_1 + \eta_2(u-1)Y], \\
V_2 &= \frac{1}{\Delta_c} [\gamma_3 + \gamma_2 u - \gamma_1 u + \eta_1(u-1)Y], \\
V_3 &= \frac{1}{\Delta_c} [\gamma_3 + \gamma_2 u - \gamma_1 + \eta_1 \eta_2(u-1)Y],
\end{aligned}
\tag{4.36}$$

де $V_{1,2,3} = u^{(1,2,3)} / U_1$, $Y = y / h$ — безрозмірні координати,

$$\Delta_c = l_1 \eta_2 (1 - \eta_1) - l_2 \eta_1 (1 - \eta_2) + \eta_1 + (a_1 \eta_2 - a_2 \eta_1) Kn, \quad l_{1,2} = h_{1,2} / h, \quad \eta_{1,2} = \mu_{1,2} / \mu_3, \quad a_{1,2} = \alpha_{1,2} / h,$$

$$u = U_2 / U_1 > 1, \quad \gamma_1 = \eta_1 l_2 (1 - \eta_2), \quad \gamma_2 = \eta_2 l_1 (1 - \eta_1), \quad \gamma_3 = \eta_1 (1 - a_2 Kn) + u \eta_2 a_1.$$

З (4.36) можна обчислити об'ємну витрату рідини:

$$Q = \int_0^{h_1} u^{(1)}(y) dy + \int_{h_1}^{h_2} u^{(2)}(y) dy + \int_{h_2}^h u^{(3)}(y) dy$$

та отримати для безрозмірної об'ємної витрати $q = Q / (U_1 h)$ наступний вираз:

$$\begin{aligned}
q &= \frac{1}{2\Delta} [\eta_2 (1 - \eta_1) (2u - (1 - u) l_1) l_1 - \eta_1 (1 - \eta_2) (2u - (1 - u) l_2) l_2 + \\
&\quad + \eta_1 (1 + u) + 2(\eta_2 a_1 u - \eta_1 a_2) Kn].
\end{aligned}
\tag{4.37}$$

При $l_1 = 0$, $l_2 = 1$, $\eta_1 = \eta_2 = 1$ ми маємо однорідну течію (без зовнішніх шарів), а (4.36), (4.37) збігаються з (4.17).

Ламінарна течія між паралельними пластинами є базовою моделлю для ротаційних віскозиметрів. Припустимо, що одна пластина відповідає рухомій стінці (U_1), інша — зсувному напруженню в'язкості. Тоді уявну в'язкість можна обчислити, як $\mu_{app} = h \tau_3 / U_1$, яку можна отримати після підстановки в (4.37) наступного розмірного виразу:

$$\mu_{app} = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3 h}{h_1 \mu_2 (\mu_3 - \mu_1) - h_2 \mu_1 (\mu_3 - \mu_2) + h \mu_1 \mu_3 + (\alpha_1 \mu_2 - \alpha_2 \mu_1) \mu_3 Kn}.$$

4.4.2 Чисельні розрахунки та аналіз результатів

Чисельні розрахунки профілю швидкості і об'ємної витрати рідини (Рис. 4.5) були проведені при наступних значеннях параметрів, які відповідають різним технічним і біологічним суспензіям мікрочастинок:

$$l_{1,2} = 0,1; 0,2; 0,3, \quad a_{1,2} = 0,5; 1; 1,5, \quad \eta_{1,2} = 0,25; 0,5; 1; 2; 4, \quad Kn = 0,02; 0,05; 0,08; 0,2; 0,5; 0,8$$

і $u = 1; 2; 5; 8$. Розглядаються залежності безрозмірної об'ємної витрати q від

одного з параметрів $u, \alpha_{1,2}, \eta_{1,2}, l_{1,2}$, коли для інших параметрів зберігаються фіксовані значення $u=1$, $\alpha_{1,2}=1$, $l_{1,2}=0.1$, $\eta_{1,2}=1$. Тут значення $Kn=0,02;0,05;0,08$ відповідають мікрорідинам, а $Kn=0,2;0,5;0,8$ – нанорідинам.

Коли різниця між швидкостями двох пластин збільшується, пропорційно зростає і об'ємна витрата рідини до числа Kn , що визначає тангенціальне прослизання частинок (Рис. 4.6а). При $U_2/U_1=8$ максимальна різниця в ~ 2 рази спостерігається для $Kn=0,2$ і $Kn=0,8$. При збільшенні коефіцієнта прослизання a_2 об'ємна витрата рідини збільшується внаслідок тангенціального прослизання на нижній, верхній або обох пластинах (Рис. 4.6б).

Залежність $q(\eta_1)$ (Рис. 4.6в) обчислювалась при $\eta_2=1$, а залежність $q(\eta_2)$ (Рис. 4.6г) – при $\eta_1=1$. В обох випадках розглянуто двошарову течію з одним граничним шаром. Коли в'язкість більше в шарі, який контактує зі швидшою рухомою пластиною, об'ємна витрата зменшується. Таким чином, шар з меншою в'язкістю служить мастилом, що зменшує питомий опір течії, а, отже, збільшує об'ємну витрату. Так чи інакше, в течіях нанорідин спостерігається протилежний ефект (Рис. 4.6в при $Kn=0,8$), оскільки члени з Kn в (4.37) стають значними. При різних наборах значень $u, l_{1,2}, \eta_{1,2}, \alpha_{1,2}$ знак $\partial q / \partial \eta_{1,2}$ може бути або позитивним, або негативним [184].

Залежність $q(l_{1,2})$ обчислювалась при $\eta_1=0,25$, $\eta_2=2$. При збільшенні товщини швидшого шару з меншою в'язкістю об'ємна витрата рідини також зростає (Рис. 4.6д). При збільшенні товщини більш повільного шару з високою в'язкістю об'ємна витрата змінюється незначно (Рис. 4.6е).

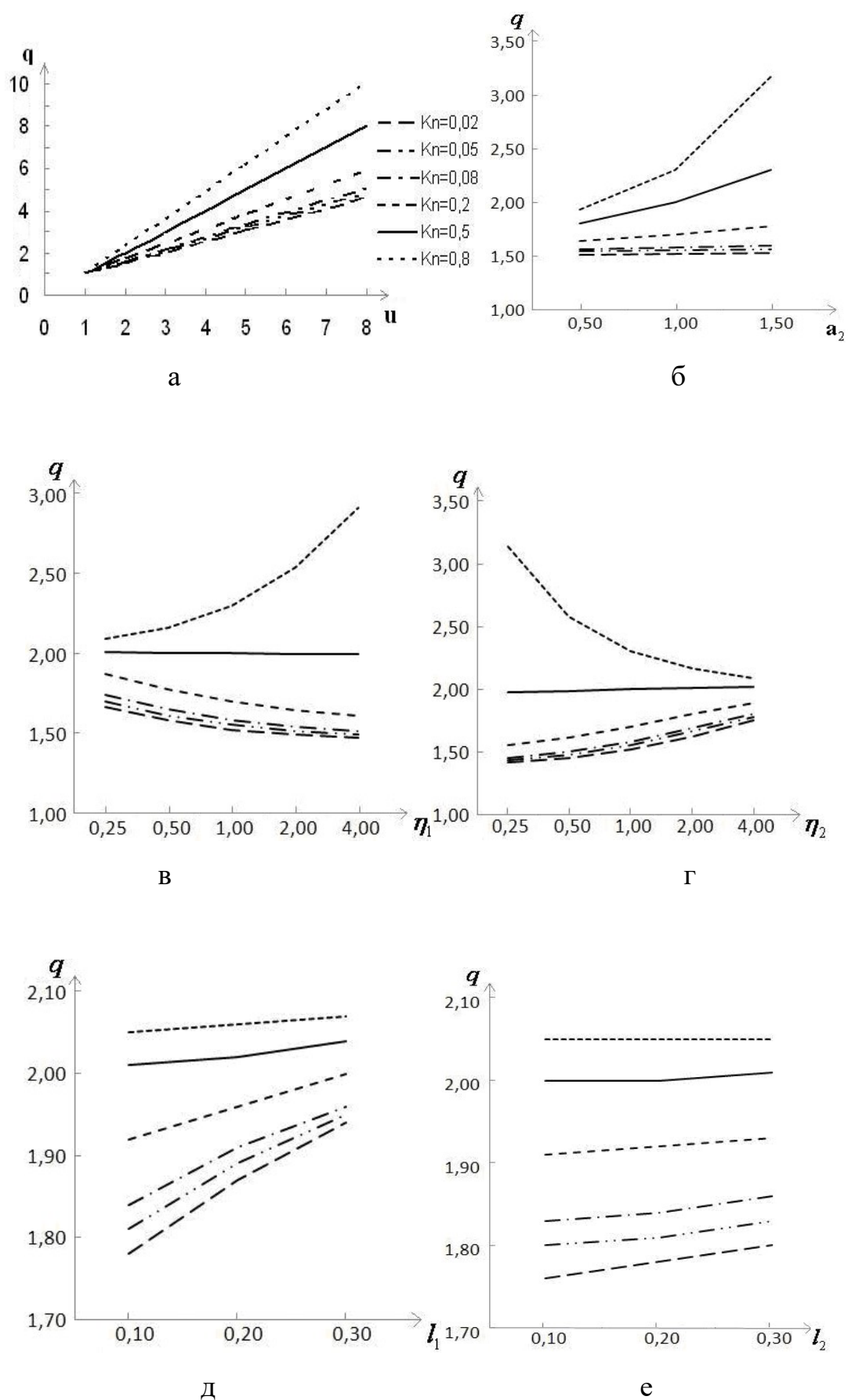


Рис. 4.6 Залежність q від u (а), a_2 (б), η_1 (в), η_2 (г), l_1 (д), l_2 (е) для різних значень $Kn = 0,02; 0,05; 0,08; 0,2; 0,5; 0,8$

Обчислювана уявна в'язкість (4.38) відрізняється від в'язкості μ_2 середньої рідини $\mu_{app} > \mu_2$, коли $h_1\mu_2(\mu_3 - \mu_1) - h_2\mu_1(\mu_3 - \mu_2) + (\alpha_1\mu_2 - \alpha_2\mu_1)\mu_3Kn < 0$ і навпаки. Наприклад, при $\mu_2 < \mu_3 < \mu_1$ і $\alpha_1\mu_2 < \alpha_2\mu_1$ прийнята формула для уявної в'язкості дає завищені значення в'язкості; при $\mu_2 > \mu_3 > \mu_1$ і $\alpha_1\mu_2 > \alpha_2\mu_1$ обчислені значення будуть занижені. У випадку, представленою на рис. 4.5, сили Магнуса зменшують/збільшують концентрацію частинок у нижньому/верхньому шарі. У випадку $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, відповідному розподілу швидкостей на рис. 4.5, зв'язок між μ_{app} та μ_2 буде залежати від всього набору параметрів моделі. Деякі обчислювальні результати наведені на рис. 4.7.

Виміряна уявна в'язкість рідини буде завищена для мікрорідин з $Kn \geq 0,7$ при різних коефіцієнтах швидкості прослизання (криві 1–3 на рис. 4.7а) і занижена в нанорідинах з $Kn > 0,2$ (криві 4–6 на рис. 4.7а). При $\eta_1 < 1$ (або $\mu_1 < \mu_3$), уявна в'язкість занижена, тоді як, при $\mu_1 > \mu_3$ віскозиметр дає правильні значення $\mu_{app} \approx \mu_2$ для мікрорідин (криві 1–3 на рис. 4.7б). Отримані результати дозволяють корегувати вимірювання в'язкості нано- і мікрорідин у віскозиметрах.

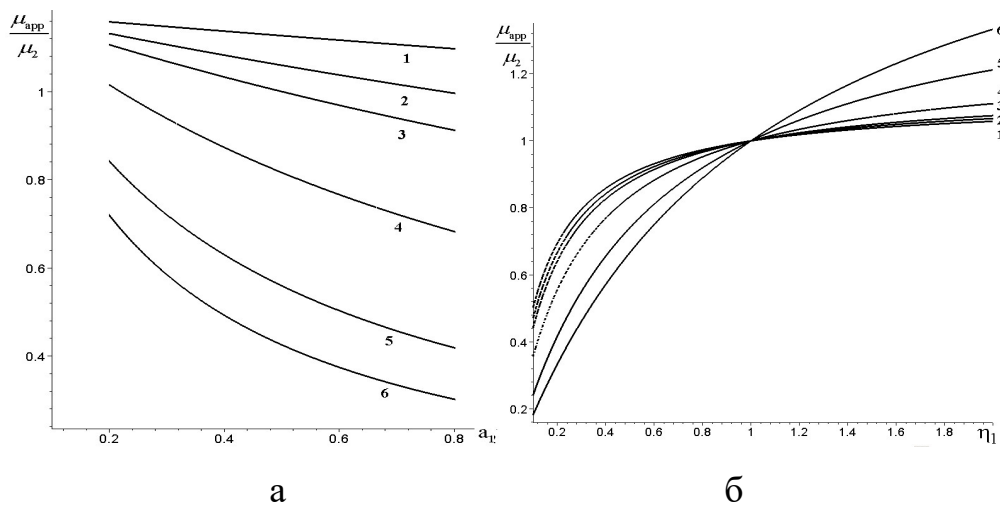


Рис. 4.7 Залежність $\mu_{app} / \mu_2(u_1)$ при $a_2 = 0.1, \eta_2 = 0.25$ (а) та $\mu_{app} / \mu_2(\eta_1)$ при $a_{1,2} = 0.5, \eta_2 = 1$ (б), коли $l_{1,2} = 0.1$; криві 1–6 відповідають $Kn = 0.02; 0.05; 0.08; 0.2; 0.5; 0.8$

4.5 Тришарова течія мікро/нанорідин між двома коаксіальними циліндрами, що обертаються з різною кутовою швидкістю

4.5.1 Постановка і розв'язок задачі

Розглядаються два коаксіальних циліндри з радіусами R_1 і R_2 , які обертаються навколо осі Oz з кутовими швидкостями Ω_1 і Ω_2 ($\Omega_2 > \Omega_1$) (Рис. 4.8). Між ними знаходяться три шари нестисливих рідин з в'язкостями $\mu_{1,2,3}$, різними за вмістом мікро/наночастинок, і товщинами h_1, h_2, h_3 , де $h_1 + h_2 + h_3 = R_2 - R_1$ [19], [126], [176]. Тоді рух рідин можна описати стаціонарними рівняннями Нав'є-Стокса в циліндричних координатах з граничними умовами прослизання другого порядку (4.12) на поверхнях $r = R_1$ і $r = R_2$, а також умовами неперервності швидкості та напружень:

$$r = R_1 : v^1 - \Omega_1 R_1 - \alpha_1 \frac{dv^1}{dr} + \beta_1 \frac{d^2 v^1}{dr^2} = 0, \quad (4.39)$$

$$r = R_1 + h_1 : v^1 = v^2, \quad \mu_1 \frac{\partial v^1}{\partial r} = \mu_2 \frac{\partial v^2}{\partial r}, \quad (4.40)$$

$$r = R_1 + h_1 + h_2 : v^2 = v^3, \quad \mu_2 \frac{\partial v^2}{\partial r} = \mu_3 \frac{\partial v^3}{\partial r}, \quad (4.41)$$

$$r = R_2 : v^3 - \Omega_2 R_2 - \alpha_2 \frac{dv^3}{dr} + \beta_2 \frac{d^2 v^3}{dr^2} = 0, \quad (4.42)$$

де $v^{1,2,3}$ — швидкості течії рідини в шарах, $\alpha_{1,2} = a_{1,2} Kn$, $\beta_{1,2} = b_{1,2} Kn^2$.

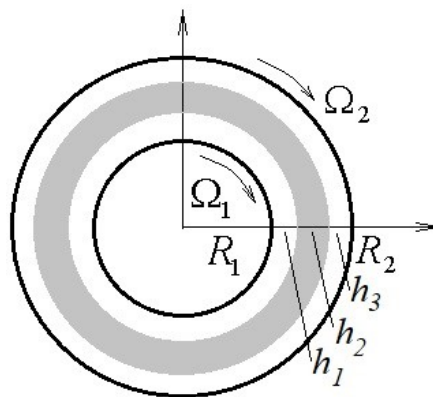


Рис. 4.8 Ламінарна течія трьох шарів незмішуваних рідин між двома рухомими циліндрами

У випадку класичних граничних умов без прослизання рідини на поверхні та при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ розв'язок даної задачі має вигляд [54]:

$$v_\theta(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r - \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}, \quad (4.43)$$

а напруження тертя на стінках:

$$\tau = \mu \left(\frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2} \right). \quad (4.44)$$

Для однорідного шару рідини ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$) та наявності умов прослизання (4.39)–(4.43) розв'язок задачі був знайдений вище у вигляді (4.20). Розв'язок неоднорідної задачі з умовами (4.39)–(4.43) розшукувався в аналогічному вигляді [19], [126]:

$$v^j(r) = C_{j1} r + C_{j2} \frac{1}{r}, \quad (4.45)$$

де C_{j1}, C_{j2} – постійні інтегрування, які знаходяться з умов (4.39)–(4.43):

$$C_{21} = \frac{1}{\Delta} (B_1 \Delta_{23}^- - B_2 \Delta_{21}^-), \quad C_{22} = \frac{1}{\Delta} (B_2 \Delta_{21}^+ - B_1 \Delta_{23}^-),$$

$$C_{11} = \mu_{21}^+ C_{21} + \frac{\mu_{21}^-}{2(R_1^+)^2} C_{22}, \quad C_{12} = \frac{\mu_{21}^-}{2(R_1^+)^2} C_{21} + \mu_{21}^+ C_{22},$$

$$C_{31} = \mu_{23}^+ C_{21} + \frac{\mu_{23}^-}{2(R_2^+)^2} C_{22}, \quad C_{32} = \frac{\mu_{23}^-}{2(R_2^+)^2} C_{21} + \mu_{23}^+ C_{22},$$

$$\Delta_{21}^+ = \mu_{21}^+ + \frac{A_1 \mu_{21}^- (R_1^+)^2}{R_1^- R_1^3}, \quad \Delta_{21}^- = \frac{\mu_{21}^-}{2(R_1^+)^2} + \frac{A_1 \mu_{21}^+}{R_1^- R_1^3},$$

$$\Delta_{23}^+ = \mu_{23}^+ + \frac{A_2 \mu_{23}^- (R_2^+)^2}{R_2^- R_2^3}, \quad \Delta_{23}^- = \frac{\mu_{23}^-}{2(R_2^+)^2} + \frac{A_2 \mu_{23}^+}{R_2^- R_2^3},$$

$$\Delta = \Delta_{21}^+ \Delta_{23}^- - \Delta_{23}^+ \Delta_{21}^-, \quad B_1 = \frac{\Omega_1 R_1}{R_1^-}, \quad B_2 = \frac{\Omega_2 R_2}{R_2^-},$$

$$\mu_{21}^\pm = (1 \pm \mu_2 / \mu_1) / 2, \quad \mu_{23}^\pm = (1 \pm \mu_2 / \mu_3) / 2, \quad R_{1,2}^- = R_{1,2} - \alpha_{1,2}, \quad R_1^+ = R_1 + h_1, \quad R_2^+ = R_1 + h_2.$$

У разі $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ дані вирази мають вигляд (4.20). Для дослідження впливу коефіцієнтів прослизання, швидкостей обертання, в'язкостей рідин та геометрії системи проводилися розрахунки профілю швидкостей і тертя на стінках для течії незмішуваних рідин у порівнянні з однорідною течією

рідини, яка знаходилась у внутрішньому шарі (з в'язкістю μ_2), а також у припущенні малої товщини пристінних шарів (тобто $h_{1,2} \ll R_2 - R_1$).

4.5.2 Чисельні розрахунки та аналіз результатів

Чисельні розрахунки залежностей $v^{1-3}(r)$ наведені на рис. 4.9–4.10 в безрозмірних змінних $r^\circ = r/R_2$, $v^\circ = v/v^*$, $v^* = (\Omega_1 + \Omega_2)/(R_1 + R_2)$, де $r^\circ \in [r_1, 1]$, $r_1 = R_1/R_2$ при тих самих наборах значень параметрів, які відповідають різним мікро- і нанорідинам, що використовувалися при дослідженнях течій Куетта незмішуваних рідин між паралельними поверхнями [184].

Для різних наборів параметрів перший доданок в (4.45) лінійний по r і може мати вклад значно більший або менший в порівнянні з другим доданком (протилежним r). В залежності від цього відповідне розподілення швидкості між циліндрами може бути лінійним, гіперболічним або змішаним. На рис. 4.9а наведений приклад лінійного розподілення, а на рис. 4.9б – гіперболічного (криві 1–3) і змішаного (криві 4–6). У всіх випадках швидкість зростає у напрямку до зовнішньої поверхні [19], [126].

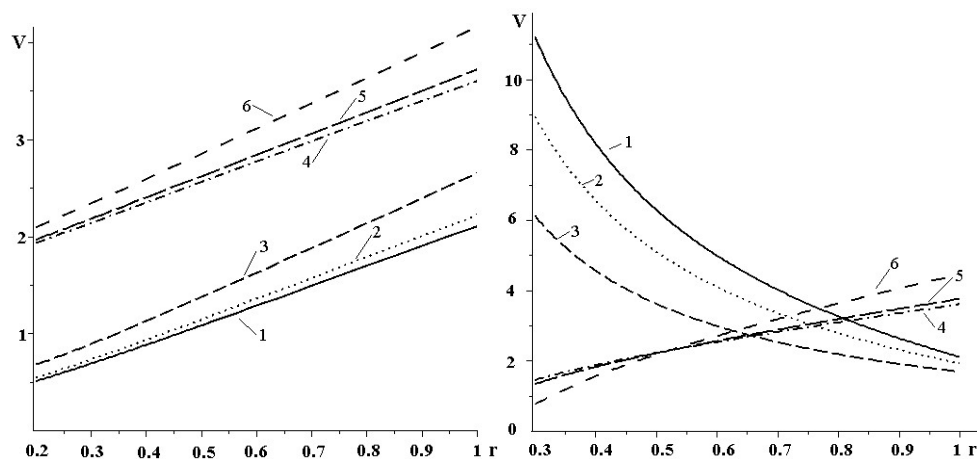


Рис. 4.9 Безрозмірні залежності $v(r)$ при $r_1 = 0,2$ (а) і $r_1 = 0,3$ (б), $\beta_{1,2} = 0$; криві 1–6 відповідають $(\alpha_1, \alpha_2) = \{(0,05;0,05), (0,05;0,1), (0,05;0,5), (0,1;0,05), (0,1;0,1), (0,1;0,5)\}$

Зі зростанням величини прослизання першого порядку $\alpha_{1,2}$ при заданих $\beta_{1,2}$ та фіксованих інших параметрах моделі швидкість монотонно зростає, що

відповідає даним експериментів [39], [54]. Залежності, представлені на рис. 4.9, були обчислені при $\beta_{1,2}=0$, тобто для мікрорідин, але схожі закономірності при змінах $\alpha_{1,2}$ спостерігаються і для нанорідин (тобто $\beta_{1,2} \neq 0$). Вплив параметрів $\beta_{1,2}$ при заданих $\alpha_{1,2}$ не є таким однозначним (Рис. 4.10а,б). Оскільки, відповідно до [39], $\beta_{1,2}$ можуть мати різні знаки (див. вище), числове моделювання проводилось в широкому діапазоні значень параметрів задачі, в тому числі при $\beta_{1,2} < 0$. Типові результати обчислень наведені на рис. 4.10а,б. Залежність швидкості від координати залишається монотонною, але вплив $\beta_{1,2}$ стає значнішим поблизу відповідної поверхні $R_{1,2}$. При $\beta_{1,2} < 0$ зі зростанням β_1 при заданому β_2 або зі зростанням β_2 при заданому β_1 відповідні залежності $v(r)$ зсуваються у напрямку від відповідної поверхні (R_1 або R_2), рис. 4.10а. Коли значення β в однієї з поверхонь змінюють знак, спостерігається зворотний ефект (Рис. 4.10б), оскільки значення $\beta_{1,2}$ впливають на кривизну профілю швидкості в приграничних шарах рідини [39], [54]. Складний характер теж має розподілення в'язкої дисипації $D = \mu(v'_\theta(r))^2$ (Рис. 4.11), яка визначає ефективність приладу.

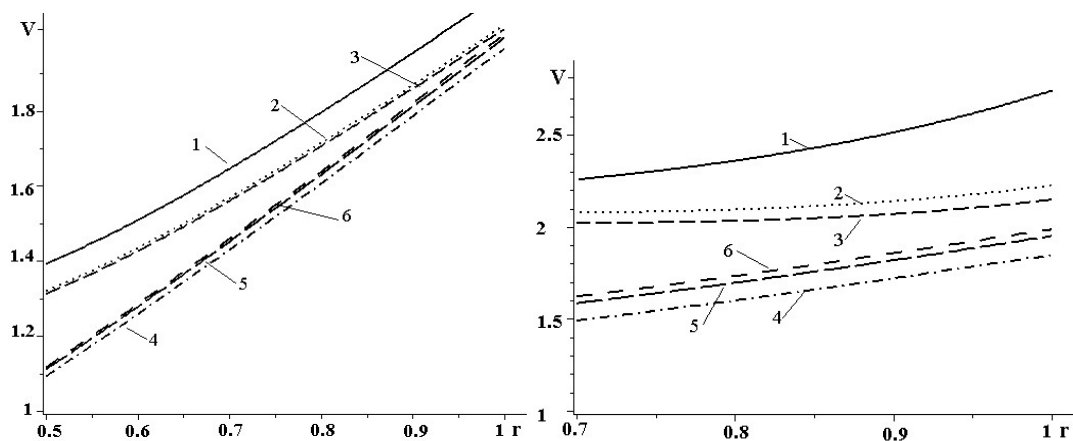


Рис. 4.10 Безрозмірні залежності $v(r)$ при $r_1 = 0,5$ (а) і $r_1 = 0,7$ (б), $\alpha_{1,2} = 0,1$; криві 1–6 відповідають $(\beta_1, \beta_2) = \{(0,05; 0,05), (0,05; 0,1), (0,05; 0,5), (0,1; -0,05), (0,1; -0,1), (0,1; -0,5)\}$

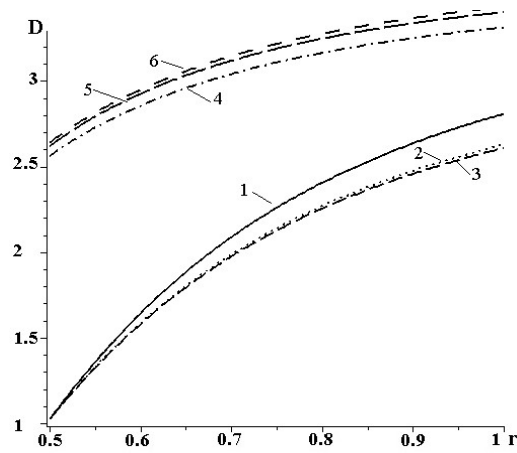


Рис. 4.11 Безрозмірні залежності $D(r)$ (позначення як на рис. 4.10)

При течіях однорідних мікро/нанорідин для певних наборів параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ значення швидкостей рідини на стінках циліндрів

$$v_{\theta}^{slip}(R_{1,2}) = \frac{\Omega_{1,2} R_{1,2}^3 (R_{2,1}^2 (R_2^2 - R_1^2) \mp \alpha_{2,1} R_{2,1} (R_1^2 + R_2^2))}{R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 - \alpha_1) A_2} \pm \frac{2\beta_{2,1} R_{1,2}^2 + 2\Omega_{2,1} R_{1,2} R_{2,1}^4 (\alpha_{1,2} R_{1,2} - \beta_{1,2})}{R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 - \alpha_1) A_2}$$

стають більшими ніж в (4.43) ($v_{\theta}^{slip}(R_{1,2}) > \Omega_{1,2} R_{1,2}$) а напруження тертя на стінках

$$\tau^{slip}(R_{1,2}) = \mu \frac{\left((\Omega_2 R_2^4 A_1 - \Omega_1 R_1^4 A_2) R_{1,2}^2 + \Omega_2 R_1^3 R_2^4 (R_1 - \alpha_1) - \Omega_1 R_1^4 R_2^3 (R_2 - \alpha_2) \right)}{(R_2^3 (R_2 - \alpha_2) A_1 - R_1^3 (R_1 - \alpha_1) A_2) R_{1,2}^2}$$

меншими ніж обчислені за (4.5), що відповідає відомому ефекту прослизання [39], [54]. Аналогічні обчислення за формулами (4.45) показали, що таким же чином можна впливати на течії незмішуваних рідин.

Використовуючи цю закономірність, ефективні мікро/нанорідинні пристрої з низькими або високими напруженнями тертя на стінках можуть бути запроектовані шляхом використання відповідних за властивостями рідин та матеріалів циліндричних поверхонь.

Шляхом певного вибору параметрів шорсткості стінки, в'язкості рідини, товщини приграничних шарів та ін. можна контролювати механічні процеси в системі, а саме прискорювати швидкість, її градієнт, напруження тертя, в'язку дисипацію поблизу однієї стінки та (або) зменшувати – на

іншій, змінювати режими та результати роботи відповідних мікро/нанорідинних пристроїв, в яких рідини рухаються між циліндричними поверхнями.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі проведено дослідження та наведено короткий огляд літератури щодо граничних умов швидкості прослизання та стрибка температури на твердих стінках для течій мікро- і нанорідин. Узагальнено аналітичні результати течій Пуазейля і Куетта між паралельними пластинами і коаксіальними циліндрами, через трубки і канали різної геометрії при граничних умовах першого та другого порядку відносно швидкості прослизання. Крім того, встановлено, що за рахунок правильного вибору матеріалів і шорсткості стінки ефективність мікро- і нанорідинних приладів може бути підвищена завдяки значному зменшенню зсувного напруження стінки та уявної в'язкості складної течії. Розглянуто зсувну ламінарну течію із трьох незмішуваних рідин між паралельними пластинами. Обчислено профілі поля швидкості, зсувне напруження та уявну в'язкість. Також досліджено вплив параметрів моделі на обчислювальні значення у зв'язку з ефектом Фареуса–Ліндквіста у мікро- та нанорідинах.

Експериментальні вимірювання в'язкості мікрорідин і нанорідин у віскозиметрах ґрунтуються на прийнятих формулах, які можуть бути помилковими внаслідок граничних умов швидкості прослизання і явищ концентрації. В даній роботі показано, що уявна в'язкість, обчислена для ротаційного віскозиметра, яка враховує ефекти концентрації, може давати завищені і занижені значення в'язкості. Використовуючи отримані закономірності, можна розробити відповідні умови експериментів для отримання значень $\mu_{app} \approx \mu_2$. Таким же чином можна отримати відповідні залежності для капілярних віскозиметрів для шаруватих ламінарних течій Пуазейля в трубках, каналах і кільцях, наведених у підрозділі 4.3.

В даному розділі запропонована модель, що узагальнює класичну задачу про ламінарну течію в'язкої рідини між коаксіальними циліндрами,

які обертаються з різними швидкостями, на випадок мікро- або нанорідин з урахуванням умов прослизання першого та другого порядків відповідно, а також наявності шарів незмішуваних рідин з різними в'язкостями або однієї суспензії мікро/наночастинок з різними концентраціями внаслідок взаємодії частинок з шорсткими стінками. Показано, що завдяки великій кількості параметрів, динамічна поведінка системи стає складною і немонотонною. Спостерігаються лінійний, гіперболічний та змішані профілі поля швидкостей, а вплив коефіцієнтів прослизання може викликати зміни монотонності, градієнту швидкості і тертя на стінках. Показано, що шляхом вибору параметрів рідини та матеріалу циліндричних поверхонь можна отримати течії з суттєво зниженим або підвищеним тертям на стінках, що можна використати для різних задач прикладної мікрофлюїдики – змішування рідин або розділення сумішей.

До основних результатів цього розділу належать:

- Отримання розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса для ламінарних течій суспензій мікро/наночастинок між паралельними пластинами та коаксіальними циліндрами, що обертаються, з урахуванням граничних умов прослизання першого та другого порядку на шорстких поверхнях.
- Отримання розв'язку задачі про тришарову ламінарну течію незмішуваних мікро/нанорідин між рухомими пластинами з урахуванням умов прослизання на шорстких поверхнях.
- Отримання розв'язку задачі про тришарову ламінарну течію незмішуваних мікро/нанорідин між двома коаксіальними циліндрами, що обертаються з різними кутовими швидкостями і мають різні шорсткості.
- Отримання значень об'ємної витрати та напруження тертя на стінках для тришарової ламінарної течії незмішуваних мікро/нанорідин між рухомими пластинами та двома рухомими циліндрами.

- Проведення узагальнення розрахункових формул для ротаційного віскозиметра для вимірювання в'язкості мікро- і нанорідин.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора: [19], [20], [23], [126], [184].

РОЗДІЛ 5

ДОСЛІДЖЕННЯ СЕДИМЕНТАЦІЇ МІКРОЧАСТИНОК В СТАНДАРТНИХ І МІКРОКАПЛЯРАХ

5.1 Аналіз основних методів проведення тесту ШОЕ та його модифікацій

Одним з найбільш поширених клінічних тестів у медицині є дослідження швидкості осідання еритроцитів крові у вертикальній скляній трубці в полі сили тяжіння (ШОЕ). Він визначається як висота стовпця чистої плазми крові, вільної від еритроцитів, через одну годину після початку осідання [178]. Осідання еритроцитів являє собою складний фізико-хімічний процес, який залежить від концентрації частинок, їх агрегації, а також від геометричної форми та величини поверхневого заряду [133]. За допомогою даного показника можна визначити присутність в організмі запальних процесів, інфекцій та інших специфічних захворювань. Так, наприклад, пришвидшення ШОЕ відбувається при появі грубодисперсних білків (запальні захворювання); при зменшенні концентрації еритроцитів (різного роду анемії); при збільшенні об'єму еритроцитів (макроцитоз); при збільшенні концентрації холестерину (атеросклероз). Зниження ШОЕ спостерігається з ростом числа красних тілець, а також при зниженні кислотності крові pH [137].

У різних країнах прийняті різні стандарти проведення тесту ШОЕ, пов'язані з використанням трубок різних довжин і діаметрів, артеріальної або венозної крові, а також різної тривалості тесту [145]. Так в Україні використовують метод Панченкова ($d = 1$ мм, $L = 100$ мм), а в країнах Європи та Америки – метод Вестергрена ($d = 3$ мм, $L = 200$ мм) і Вінтроба ($V = 1$ мл). У першому випадку норма показника ШОЕ для здорових людей становить: у жінок – 2–15 мм/год, у чоловіків – 2–10 мм/год. Також нормою є низькі значення для новонароджених, а високі – для вагітних.

Слід зазначити, що стандартний показник ШОЕ, який застосовується в медицині, дуже залежить як від реологічних властивостей крові, так і від довжини трубки та початкової концентрації еритроцитів H_0 (гематокриту). Крім того, на кінцеві значення впливають і умови проведення тесту, що може давати похибки в постановці діагнозу. Саме тому пропонується використовувати модифікації стандартної методики, пов'язані зі зменшенням тривалості тесту, розташуванням трубки під деяким кутом до вертикалі [137], а також застосуванням нових показників.

Одним із модифікованих методів є реєстрація фракційної реакції осідання еритроцитів (ФРОЕ), пов'язаний з вимірюванням висоти стовпця чистої плазми крові через кожні 10–15 хв протягом 2–3 годин. Це не тільки дозволяє оцінити динаміку процесу, а й ввести нові діагностичні показники [137]. За допомогою седиментаційних кривих можна відстежити періоди пришвидшення та уповільнення переміщення границі поділу між зоною чистої плазми крові та еритроцитів, що осідають.

Крім того, достатньої популярності набув такий діагностичний показник як сигма-ШОЕ ($\Sigma_1 = h(20) + h(40) + h(60)$, $\Sigma_1 = \sum_{j=1}^5 h(10 * j)$). Мета його введення полягає в тому, щоб шляхом невеликого числа вимірювань врахувати початкову швидкість осідання еритроцитів. Даний показник може бути обчислений як середнє арифметичне 3 значень (20, 40, 60 хв відповідно) і 6 значень (20, 40, 60, 80, 100 і 120 хв відповідно) [166], [171]. Середні значення сигма порівнювалися з показниками за 1 і 2 години осідання. Результати показують, що сигма за 6 значеннями чітко виявляє присутність алергії у людини [178].

Ще однією модифікацією є простий метод, заснований на стандартному тесті осідання еритроцитів крові. Його проводили одночасно на контрольній пробі і зі зразками з невеликою кількістю доданих ліків/алергенів [127].

Для пришвидшення процесу осідання еритроцитів запропоновані методи автоматичної реєстрації ШОЕ. Так за допомогою приладу, який передбачає проведення тесту у центрифугі, досягається значне зменшення часу осідання. Протягом тесту можна одночасно провести дослідження для декількох зразків з кров'ю. Швидкість осідання еритроцитів при центрифугуванні залежить від тих же факторів, що і осідання в полі гравітації, але відносне значення цих факторів змінюється. Більшою мірою виявляється залежність від деформування еритроцитів. Використання спеціальної центрифуги дозволяє істотно зменшити час проведення дослідження, а на основі отриманих динамічних кривих оцінити ШОЕ [137], [137].

У роботі [131] запропоновано новий апаратно-програмний комплекс для автоматичної реєстрації, обробки та аналізу седиментаційних кривих з метою використання в різних галузях, зокрема, в медицині. Осідання еритроцитів крові проходить у центрифугі, а реєстрація седиментаційних кривих проводиться за допомогою оптичних датчиків. Криві можуть зніматися багаторазово з додаванням чи без додавання різних речовин, зберігатися і оброблятися в базі даних. Запропонований метод був протестований, а відповідність значень годинного показника швидкості осідання еритроцитів та 10-хвилинного тесту в центрифугі підтверджено на великому масиві даних. Розроблено комп'ютерний код для обробки кривих та обчислення індексів, що характеризують стан суспензії.

Розміри трубок і час проведення тесту у вищезазначених способах різні, так що зіставлення методик неможливо. Крім цього, процес осідання істотно залежить від швидкості агрегації, і при проведенні тесту з однією і тією ж порцією крові в декількох трубках одночасно показники можуть бути різними. Тому метою моїх експериментальних робіт було дослідження основних наявних способів визначення ШОЕ та пошук більш зручного методу і показника, який дасть можливість швидше і точніше проводити даний лабораторний тест.

5.2 Проведення тесту ШОЕ на виявлення алергії

Експериментальні дослідження проводились на базі лабораторії алергології Державної установи «Інститут дерматології та венерології Національної академії наук України». Використовувались зразки венозної крові пацієнтів, які звертались в лабораторію для проведення тесту на алергію до призначених їм лікарем препаратів. Для запобігання згортання крові стабілізувалась цитратом натрію в стандартному співвідношенні (4:1), а в окремі порції крові додавались різні алергени. Були досліджені зразки крові 20 пацієнтів (10 чоловіки та 10 жінок; середній вік 59 ± 9 років), для яких виявлено подібні закономірності [143], [174]. Одну порцію досліджували як контрольний зразок, а в інші додавали невеликі кількості різних препаратів. Всі порції розміщували в стандартні скляні капіляри Панченкова і мікрокапіляри ($d = 0,5$ мм, $L = 50$ мм), які ставили в стійку у вертикальному положенні і досліджували протягом 3 годин при кімнатній температурі. Висоту h прозорого шару плазми крові у верхній частині трубок вимірювали кожні 10 хв. В результаті дослідження були отримані седиментаційні криві $h(t)$ для всіх зразків.

Криві осідання були згладжені чисельними фільтрами. Крім того, також були обчислені криві похідних за часом $h'(t)$. Приклад одночасних ШОЕ тестів для крові одного і того ж пацієнта в трубках Панченкова та мікротрубках представлений на рис. 5.1. Товсті суцільні лінії на рис. 5.1а–г відповідають контрольному зразку і показники ШОЕ відповідають здоровим людям ($\text{ШОЕ} < 10$ мм). Додавання потенційного алергену впливає на швидкість осідання шляхом деякого її прискорення або уповільнення. Оскільки ШОЕ визначається агрегаційною здатністю еритроцитів [152], існує прямий вплив на алерген на поверхні еритроцитів. Зразки без алергії на додані препарати представлені на рис. 5.1а–г тонкими суцільними лініями, а з підтвердженою алергією позначені пунктирними лініями.

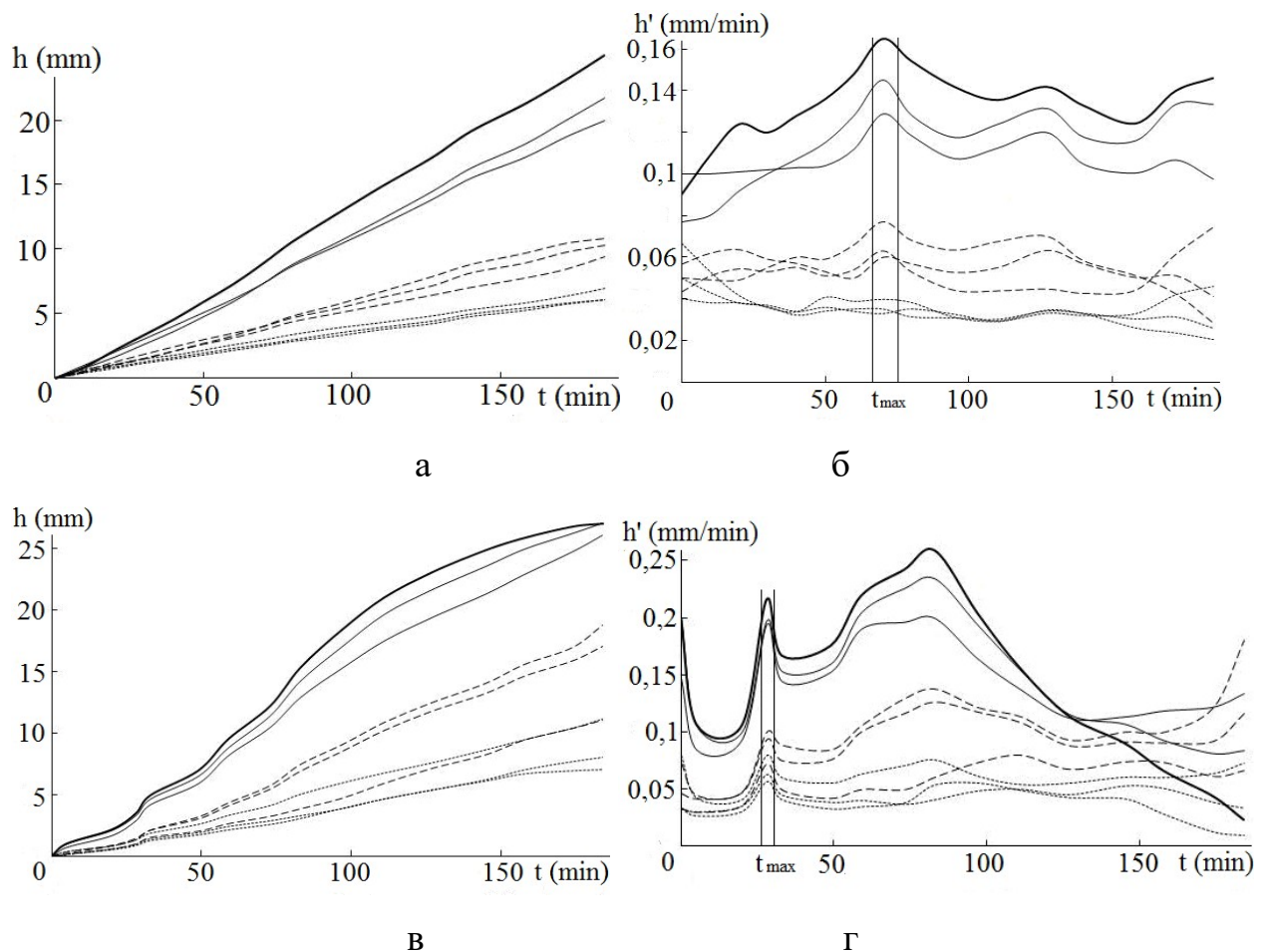


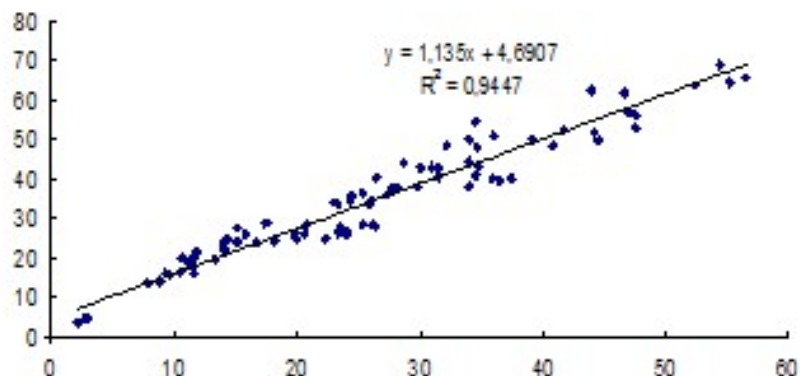
Рис. 5.1 Експериментальні криві $h(t)$ (а, в) і $h'(t)$ (б, г) тестів ШОЕ в трубках Панченкова (а, б) і мікротрубках (в, г)

Криві $h'(t)$ показують аналогічну динаміку (Рис. 5.1б) з помітним максимумом при $t = t_{\max}$, що відповідає максимальній швидкості осідання, після якого спостерігається зменшення ШОЕ. Зниження ШОЕ обумовлено впливом осілих агрегатів, накопичених на дні седиментаційної трубки [152].

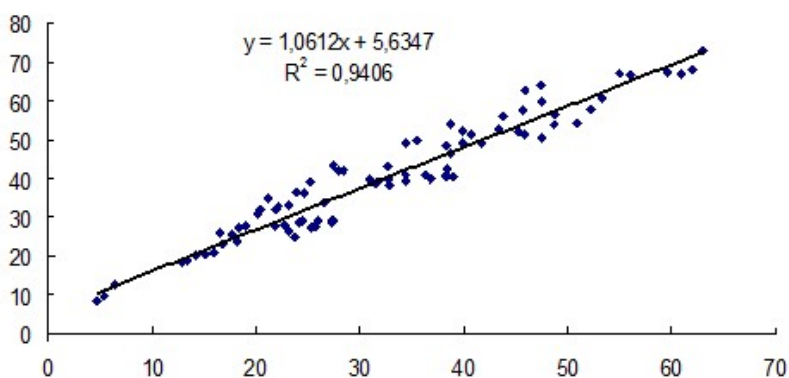
Під час аналізу експериментів виявлено, що час досягнення максимальної швидкості осідання еритроцитів $t_{\max}$ є хорошим діагностичним показником, який майже не залежить від початкової концентрації частинок і в'язкості плазми, а відображає лише швидкість агрегації еритроцитів [153].

Крім того, під час експериментів були проведені порівняння стандартних 1-годинного та 2-годинного показників з середніми сигмами за трьома і шести значеннями. Результати досліджень показали, що сигма за 6

значеннями часу добре визначає присутність алергії у людини (Рис. 5.2а,б) [178].



а



б

Рис. 5.2 порівняння стандартного 1-годинного показника з сигма за 3 значеннями (а) і 2-годинного показника з сигма за 6 значеннями (б)

Слід зазначити, що тести в мікрокапілярах дозволяють використовувати меншу кількість крові, взятої для діагностики. Як показали результати досліджень, осідання в трубках Панченкова і мікротрубках однакове для крові однієї і тієї ж людини (Рис. 5.1а,в). Однак різниця між контрольним зразком і зразком з потенційними алергенами виявилася більш чіткою у мікротрубках (Рис. 5.1в). При цьому максимальна швидкість осідання була досягнута набагато раніше, а розсіювання було меншим, ніж у стандартних трубках (Рис. 5.1г). При використанні $t_{\max}$ як діагностичного

показника тест в мікрокапілярах дає результати раніше, ніж в стандартних капілярах[175].

Результати 20 зразків з кров'ю одного і того ж пацієнта при одночасному осіданні в мікротрубках представлені на рис. 5.3. Різноманітність динаміки можна пояснити нестабільністю осідання суспензії частинок, що агрегують [60], [152]. Так чи інакше, час $t_{\max}$ для всіх кривих знаходиться в досить вузьких границях, що забезпечує високу точність в діагностиці алергії при проведенні тесту в мікротрубках.

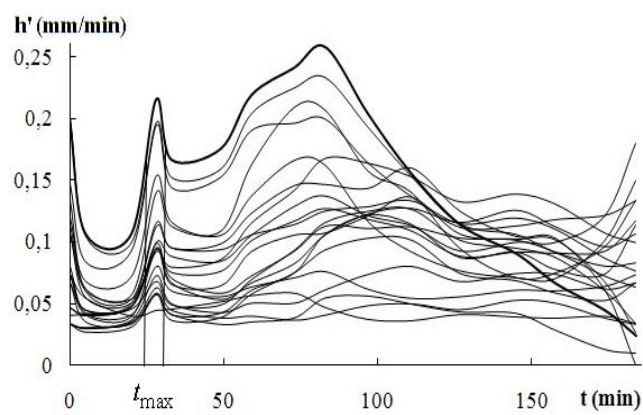


Рис. 5.3 Криві $h'(t)$ і розташування $t_{\max}$ для 20 зразків крові одного і того ж пацієнта

Таким чином, при використанні мікрокапілярів діагностична інформація може бути отримана швидше, точніше і з використанням меншої кількості крові.

5.3 Аналіз результатів проведених експериментів

Проведені експериментальні дослідження з осідання в трубках Панченкова і мікротрубках зіставлялися з теоретичними даними, представленими в розділі 2. Зокрема, порівнювались значення для часу максимальної швидкості осідання $t_{\max}$ (2.19), пораховані на основі двофазної моделі крові, зі значеннями, отриманими протягом тестів. Результати показали, що теоретичний показник добре відповідає експериментам, а отже

він може бути використаний для визначення швидкості агрегації еритроцитів φ .

Один з обчислювальних результатів представлений на рис. 5.5. Різні препарати були протестовані у 18 порціях крові пацієнта, у якого була виявлена алергія на верапаміл. За допомогою тесту ШОЕ вимірювались значення H_0 і $t_{\max}$, за якими далі обчислювалась швидкість агрегації φ . Три пробірки з кров'ю та верапамілом відповідають числам 13, 14, 15 (Рис. 5.4). У цих випадках рівень агрегації еритроцитів в 4–10 разів перевищує показник у контрольній пробі, а також у порціях крові з іншими препаратами. Деякий розкид значень φ , розрахованих за $t_{\max}$ в трубках з номерами 13–15, пояснюється нестабільністю процесу осідання. Значення φ в цьому випадку можна оцінити як середнє значення за трьома тестами ($\varphi = 9,2$ для зразків з верапамілом проти $\varphi = 2,2$ для інших тестів).

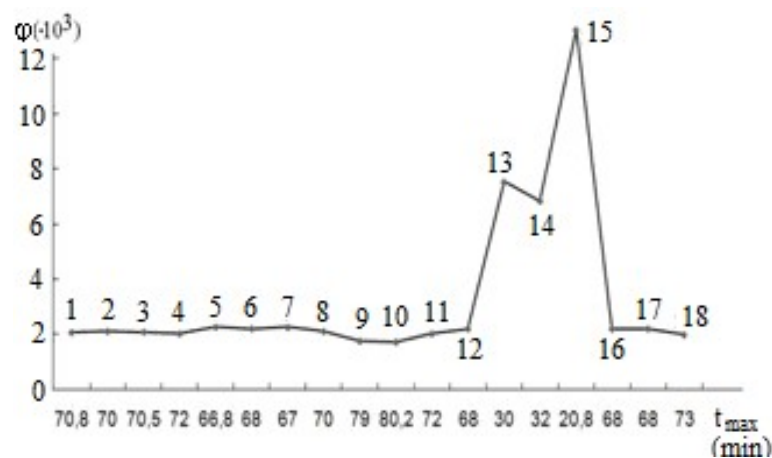


Рис. 5.4 Значення часу $t_{\max}$ (хв) у зразках з різними алергенами

Приклад, представлений на рис. 5.4, демонструє уповільнення впливу алергену на кров, але серед досліджених випадків спостерігалися обидві зміни в динаміці осідання під впливом алергену.

Отже, ШОЕ є простим тестом, який широко використовується для неспецифічної діагностики стану організму. Модифікація тесту з додаванням до венозної крові невеликої кількості потенційного алергену (пилон,

лікарський препарат або харчові алергени) дає новий спосіб для швидкої, дешевої та якісної оцінки алергії. Внаслідок нестабільності процесу осідання рекомендується дослідження декількох (3–5) зразків з однаковим алергеном.

Протягом експериментів було виявлено окремі явища, які не вкладаються у рамки двофазної моделі [60], [178]. Наприклад, виникнення розмитої границі між зоною чистої плазми крові та еритроцитів, що осідають, прискорення осідання після деякої зупинки. Ці явища можуть бути пов'язані із захопленням агрегатами плазми крові. У компактній зоні захоплена плазма буде фільтруватися через щілини між клітинами, сприяючи ущільненню компактної зони і зміни динаміки руху агрегатів середньої зони [143], [149], [153]. Дані явища описуються на основі ускладненої моделі крові як трифазної суспензії, яка розглядається у розділі 2.

Таким чином, з проведених експериментів випливає, що запропонований в роботі діагностичний показник такий, як час досягнення максимальної швидкості осідання, є тією характерною величиною, яка відносно слабо залежить від умов проведення експерименту, тобто від довжини і діаметру трубки, від початкової концентрації еритроцитів, а отже, є зручним для використання в клінічній діагностиці [60], [149]. Крім того, експериментальні дані показали, що використання мікротрубок у порівнянні з прийнятим тестом у трубках Панченкова є кращим завдяки необхідності меншої кількості крові, більш швидкої седиментації, менших значень $t_{\max}$ з низьким розкидом, створюваним нестабільністю процесу. Слід зазначити, що у деяких випадках показник $t_{\max}$ досягався пізніше 60 хв, тому стандартний 1-годинний тест Панченкова недостатній для діагностики і повинен бути продовжений до 2–2,5 годин. На основі отриманих результатів зареєстрований патент на корисну модель, яка може використовуватись в медицині з метою виявлення алергії на медикаменти і харчові продукти [127].

Висновки до розділу 5

У цьому розділі досліджено та проаналізовано експериментальні дані з осідання еритроцитів крові. У ході дослідження виявлено, що при наявності алергії у пацієнта зазвичай відмічається прискорене осідання еритроцитів у пробі із доданим алергеном, у деяких випадках – уповільнення. У будь-якому разі додавання алергену позначається на динаміці процесу осідання. Криві осідання будувались по точкам, які реєструвались через кожні 5–10 хвилин для кожної із проб. Отримані криві згладжувались стандартними фільтрами, що дозволяло отримати досить гладкі седиментаційні криві. Протягом проведення досліджень була виявлена різна динаміка кривих осідання, виникнення або відсутність розмитої границі між зонами чистої плазми крові і агрегатів, які осідають, що пояснюється на основі трифазної моделі у розділі 2. Також показано, що проведення серії тестів із пробкою крові одного і того ж пацієнта дає різні криві, яким відповідають різні годинні показники. Це пов'язано із нестійкістю процесу осідання. Диференціальні криві $h'(t)$ показують, що при деяких відмінностях у динаміці прискорення і уповільнення процесу осідання перший пік максимуму швидкості доводиться на один і той же час у всіх пробах, що відповідає і висновкам [137], [137], [154]. Таким чином, час досягнення максимальної швидкості осідання є більш стійким параметром для використання у цілях діагностики, ніж годинний показник, який дає істотний розкид $\pm (4-5)$ мм.

Крім того, на основі результатів експериментів, проведених у мікрокапілярах, було виявлено, що час досягнення максимальної швидкості осідання в різних трубках збігається дуже добре, а в багатьох випадках і сама величина максимуму швидкості однакова [60], [175]. Отримані дані дозволяють стверджувати, що проведення тесту у мікротрубках є точнішим та потребує меншої кількості необхідної крові і часу. Так при перевірці наявності алергії на кілька алергенів або лікарських препаратів це дає можливість використовувати невеликий об'єм крові із пальця, що значно

спрощує процедуру проведення тесту та зменшує ступінь її болючості для пацієнта, а отже переважає над стандартним тестом.

До основних результатів цього розділу належать:

- Отримання та патентування нового показника $t_{\max}$ для діагностики алергії на харчові продукти, пилок або медикаменти, який є точнішим у порівнянні зі стандартними методами.
- Дослідження розмитої границі між зонами чистої плазми крові та агрегатів, що осідають.
- Отримання нового методу з осідання еритроцитів у мікротрубках, який є більш зручним і точним у порівнянні зі стандартним тестом.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора: [60], [149], [175], [178].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню квазілінійних моделей осідання дво- та трифазних суспензій частинок, що агрегують, у вертикальних та похилих трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил. У першому розділі зроблено огляд та аналіз наукових праць. У другому розділі досліджено математичні моделі осідання дво- та трифазних суспензій частинок, що агрегують, у вертикальних трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил. Новим є те, що область, де шукається розв'язок задач, має рухомі границі з різними крайовими умовами на них. Однією з основних розглянутих проблем є еволюційність (стійкість) сильних розривів. Розв'язання цієї проблеми пов'язано з аналізом співвідношень для характеристичних швидкостей та швидкості переміщення поверхні розриву. Проведено детальне дослідження умов існування різних типів розв'язків. Отримані результати були підтверджені за допомогою чисельних розрахунків методом динаміки частинок, який дозволяє проводити комп'ютерні симуляції при будь-якій геометрії та розташуванні трубки, а також розміру і форми частинок. На основі трифазної моделі запропоновано новий апаратно-програмний комплекс для оцінки індексу «старіння» технічних рідин, стану мікробіологічних суспензій або медичної діагностики. Крім того, обговорюється застосування результатів для розв'язування різних прикладних задач. У третьому розділі досліджено математичні моделі дво- та трифазної суспензій частинок, що агрегують, у похилих трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил. Проведено узагальнення ефекту Бойкотта на випадок цих суспензій. Встановлено зв'язок між кутом нахилу трубки та швидкістю осідання частинок. У четвертому розділі знайдено розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса для ламінарних течій суспензій мікро/наночастинок між паралельними пластинами та коаксіальними циліндрами, що обертаються, з урахуванням граничних умов прослизання першого та другого порядку на шорстких поверхнях. Проведено узагальнення розрахункових

формул для ротаційного віскозиметра для вимірювання в'язкості мікро- і нанорідин. У п'ятому розділі проаналізовано експериментальні дослідження та проведено їх порівняння з теоретичними результатами. Отримано новий показник для використання в медицині, зокрема, для виявлення алергії. Проведено дослідження ШОЕ у мікротрубках з метою пришвидшення та вдосконалення існуючих методів.

У дисертації отримані наступні нові результати:

- Досліджено та проаналізовано математичні моделі агрегації, основані на рівнянні Смолуховського і його модифікаціях. Досліджено різні механізми агрегації біологічних частинок, зокрема, еритроцитів крові.
- Досліджено та проаналізовано континуальні моделі крові з урахуванням агрегації еритроцитів, математичні моделі суспензій частинок, що осідають у похилих трубках, а також дискретні моделі, які описують динаміку мікро- і наночастинок в суспензіях.
- Досліджено квазілінійні моделі осідання частинок дво- та трифазної суспензій, що агрегують, у вертикальних трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил, де розв'язок знаходиться в області, яка має дві рухомі границі з різними крайовими умовами на них. Проаналізовано різні режими процесу осідання та досліджено сильні розриви на еволюційність.
- Проведено чисельні розрахунки кривих осідання та їх зіставлення з результатами експериментальних вимірювань. Вперше на основі трифазної моделі досліджено розмір та динаміку розмитої границі між зонами чистої плазми крові та агрегатів, що осідають, яка з'являється, наприклад, при алергії на медичні препарати. Отримані результати перевірено чисельними розрахунками методом динаміки частинок.
- Отримано вирази для швидкості агрегації в рамках континуальної та дискретної моделей кінетики агрегації частинок.

- Досліджено квазілінійні моделі осідання частинок дво- та трифазної суспензій, що агрегують, у похилих трубках в неоднорідному полі зовнішніх сил. Проведено узагальнення ефекту Бойкотта на випадок суспензій, що агрегують. Отримано оптимальний кут нахилу, при якому частинки осідають з максимальною швидкістю.
- Отримано розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса для ламінарних течій суспензій мікро/наночастинок між паралельними пластинами та коаксіальними циліндрами, що обертаються, з урахуванням граничних умов прослизання першого та другого порядку на шорстких поверхнях. Отримано розв'язки задач про тришарову ламінарну течію незмішуваних мікро- та нанорідин між рухомими пластинами та коаксіальними циліндрами, що обертаються з різними кутовими швидкостями і мають різні шорсткості.
- Проведено узагальнення розрахункових формул для ротаційного віскозиметра для вимірювання в'язкості мікро- і нанорідин. Показано, що шляхом правильного вибору шорсткості стінки, в'язкості рідини, товщини приграничних шарів та ін. можна контролювати роботу відповідних мікро/нанорідинних пристроїв, чим підвищувати їх ефективність.
- Вперше запропонований і обґрунтований показник $t_{\max}$ часу досягнення максимальної швидкості осідання еритроцитів для виявлення алергії на харчові продукти та лікарські препарати. Досліджено осідання частинок крові в мікротрубках з метою використання його як нового експрес-методу медичної діагностики на малих об'ємах крові.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Acrivos, A. E., Herbolzheimer, E.: Enhanced sedimentation in settling tanks with inclined walls. *J. Fluid Mech.* **92**(3), 435–457 (1979)
2. Aubert, C., Colin, S.: High-order boundary conditions for gaseous flows in rectangular microducts. *Microscale Thermophys. Engin.* **5**, 41–54 (2001)
3. Baranets, V., Kizilova, N.: Mathematical Modeling of Particle Aggregation and Sedimentation in Inclined Tubes. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка»*. **90**, 42–59 (2019)
4. Baranets, V.O., Kizilova, N.M.: On hyperbolicity and solution properties of the continual models of micro/nanoparticle aggregation and sedimentation in concentrated suspensions. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки»*. **4**, 60–63 (2019)
5. Baskurt, O.K., Hardeman, M.R., Rampling, M.W.: *Handbook of Hemorheology and Hemodynamics*. IOS Press, Amsterdam (2007)
6. Basson, D. K., Berres, S., Bürger, R.: On models of polydisperse sedimentation with particle-size-specific hindered-settling factors. *Applied Mathematical Modelling*. **33**, 1815–1835 (2009)
7. Batyuk, L.V., Kizilova, N.N., Baranets, V.A.: Dielectric properties of micro/nanoparticle suspensions at low and room temperatures: a thermodynamic approach. In: Abstracts book and Conference program of IX International Conference for Professionals and Young Scientists “Low Temperature Physics” dedicated to 100th anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, Харків, 4–8 червня 2018 р.
8. Baudry, J., Charlaix, E.: Experimental evidence for a large slip effect at a nonwetting fluid – solid interface. *Langmuir*. **17**, 5232–5236 (2001)
9. Beavers, G.S., Joseph, D.D.: Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.* **30**, 197–207 (1967)

10. Bechert, D.W., Bruse, M., Hage, W., Meyer, R.: Fluid mechanics of biological surfaces and their technological application. *Naturwissenschaften*. **87**, 157–171 (2004)
11. Bell, G.I.: Models for the specific adhesion of cells to cells. *Science*. **200**, 618–627 (1978)
12. Bertoluzzo, S.M., Bollini, A., Rasia, M., Raynal, A.: Kinetic model for erythrocyte aggregation. *Blood Cells, Molecules, and Diseases*. **25**(22), 339–349 (1999)
13. Bird, G.A.: *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*. Clarendon Press, Oxford (1994)
14. Boycott, A.E.: Sedimentation of blood corpuscles. *Nature*. **104**, 532 (1920)
15. Brenner, H.: Beyond the no-slip boundary condition. *Phys. Rev. Ser.E*. **84**(4) (2011)
16. Bürger, R.: Phenomenological foundation and mathematical theory of sedimentation–consolidation processes. *Chemical Engineering Journal*. **80**, 177–188 (2000)
17. Chakraborty, S.: *Microfluidics and Microscale Transport Processes*. CRC Press., London (2012)
18. Chapman, S., Cowling, T.G.: *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases. An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*. Cambridge University Press, Cambridge (1991)
19. Cherevko, V., Kizilova, N.: Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids between coaxial tubes. In: Book of abstracts of the 4-th International research and practice conference «Nanotechnology and Nanomaterials NANO-2016», Львів, 24–27 серпня 2016 р.
20. Cherevko, V., Kizilova, N.: Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions. In: Fesenko O., Yatsenko L. (eds.) *Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications*, 4th International Conference on Nanotechnology and Nanomaterials, NANO

- 2016, Lviv, 24–27 August 2016. Springer Proceedings in Physics, vol. 195, pp. 207–228. Springer, Cham (2017)
21. Cherevko, V.A., Kizilova, N.N.: Particle aggregations and sedimentation in non-uniform fields for evaluation of the suspension stability. В: Тропіна А.А. (ред.) Математичне моделювання в науці та техніці. Збірник наукових праць, **1**, сс. 41–43. Харків, (2014)
 22. Cherevko, V.A., Kizilova, N.N.: Particle aggregation and sedimentation in non-uniform fields for evaluation the suspension stability. В: Тропіна А. А. та ін. (ред.) Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки, Харків, 10–25 травня 2013 р. Матеріали Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, pp. 3–6. Екограф, Харків (2013)
 23. Cherevko, V., Kizilova, N.: Second order velocity slip boundary conditions and Fahraeus-Lindqvist effect in nanofluids and microfluids. In: Abstracts of the 7th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems”, Київ, 27–31 травня 2016 р.
 24. Chesnutt, J.K.W., Marshall, J.S.: Blood cell transport and aggregation using discrete ellipsoidal particles. *Computers & Fluids*. **38**, 1782–1794 (2009)
 25. Christodoulou, K.N., Scriven, L.E.: The fluid mechanics of slide coating. *J. Fluid Mech.* **99**, 39–55 (1992)
 26. Corry, W.D., Herbert, J., Meiselman, H.J.: Deformation of human erythrocytes in centrifugal field. *Biophys. J.* **21**, 19–34 (1978)
 27. Corcione, M.: Heat transfer features of buoyancy-driven nanofluids inside rectangular enclosures differentially heated at the sidewalls. *Intern. J. Thermal Sci.* **49**, 1536–1546 (2010)
 28. Costa, F. P., Sasportes, R.: Dynamics of a Non-Autonomous ODE System Occurring in Coagulation Theory. *Journal of Dynamics and Differential Equations*. **20**(1), 55–85 (2008)
 29. Denn, M.M.: Issues in viscoelastic fluid mechanics. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 13–34 (1990)

30. Derbel, L.: The set of concentration for some hyperbolic models of chemotaxis. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*. **4**(2), 331–349 (2007)
31. Dongari, N., Durst, F., Chakraborty, S.: Predicting microscale gas flows and rarefaction effects through extended Navier–Stokes–Fourier equations from phoretic transport considerations. *Microfluid. Nanofluid.* **9**, 831–846 (2010)
32. Dongari, N., Sharma, A., Durst, F.: Pressure-driven diffusive gas flows in micro-channels: from the Knudsen to the continuum regimes. *Microfluid. Nanofluid.* **6**, 679–692 (2009)
33. Dorrell, R., Hogg, A. J.: Sedimentation of bidisperse suspensions. *International Journal of Multiphase Flow*. **36**, 481–490 (2010)
34. Duran, J., Mazozi, T.: Granular boycott effect: how to mix granulates. *Phys. Rev. E Stat Phys. Plasmas Fluids Relat Interdiscip Topics*. **60**(5 Pt B), 199–201 (1999)
35. Espanol, P.: Dissipative Particle Dynamics. *Handbook of Materials Modeling*. In: Yip, S. (ed.), pp. 2503–2569. Springer, Dordrecht (2005)
36. Fabry, T.L. Mechanism of Erythrocyte Aggregation and Sedimentation. *Blood*. **70**(5), 1572–1576 (1987)
37. Farina, A., Mikelic, A., Saccomandi, G., et al.: *Non-Newtonian Fluid Mechanics and Complex Flows*. Springer, Levico Terme (2018)
38. Fukada, E., Azuma, T.: Erythrocyte sedimentation rate II. Effects of tilt angle in saline solution. *Biorheology*. **25**(1–2), 157–164 (1988)
39. Gad-el-Hak, M.: *MEMS Introduction and fundamentals*. The MEMS Handbook. 2. CRC Press, Boca Raton (2006)
40. Gayev, Ye.A., Hunt, J.C.R.: *Flow and transport processes with complex obstructions. Applications to cities, vegetation canopies and industries*. Springer, Netherlands (2007)

41. Ghasemi, B., Aminossadati, S.: Brownian motion of nanoparticles in a triangular enclosure with natural convection. *Intern. J. Thermal Sci.* **49**, 931–940 (2010)
42. Ghodssi, R., Lin, P.: *MEMS Materials and Processes Handbook*. Springer, US (2011)
43. Gusarov, A.V., Smurov, I.: Gas-dynamic boundary conditions of evaporation and condensation: Numerical analysis of the Knudsen layer. *Phys. Fluids*. **14**, 4242–4255 (2002)
44. Gusev, A. I., Rempel, A. A.: *Nanocrystalline Materials*. Cambridge International Science Publishing, Cambridge (2004)
45. Hanson, P., Trigg, T., Rachal, G., Zamora, M.: Investigation of barite sag in weighted drilling fluids in highly deviated wells. Paper presented at the SPE Annual Conference and Exhibition, New Orleans, Louisiana, 23–26 September 1990
46. Hill, W. D., Rothfus, R. R., Li, K.: Boundary-enhanced sedimentation due to settling convection. *Int. J. Multiphase Flow*. **3**, 561–583 (1977)
47. Hocking, L.M.: Moving fluid on a rough surface. *J. Fluid Mech.* **76**, 801–817 (1976)
48. Hotze, E. M., Phenrat, T., Lowry, G. V.: Nanoparticle Aggregation: Challenges to Understanding Transport and Reactivity in the Environment. *Journal of Environmental Quality*. **39**, 1909–1924 (2010)
49. Islam, N., Sayed, S.: *MEMS Microfluidics for Lab-on-a-Chip Applications*. Microelectromechanical Systems and Devices. The University of Texas at Brownsville, USA (2012)
50. Jansons, K.M.: Determination of the macroscopic (partial) slip boundary condition for a viscous flow over a randomly rough surface with a perfect slip microscopic boundary condition. *Phys. Fluids*. **31**, 15–17 (1988)
51. Jianga, W., Dinga, G., Penga, H., Hua, H.: Modeling of nanoparticles' aggregation and sedimentation in nanofluid. *Current Applied Physics*. **10**(3), 934–941 (2010)

52. Kanagala, H. K.: Modeling of Particle Agglomeration in Nanofluids. Dissertation, Lehigh University (2013)
53. Kandlikar, S.G.: Roughness effects at microscale – reassessing Nikuradse’s experiments on liquid flow in rough tubes. *Bull. Polish Acad. Sci. Technical Sci.* **53**, 343–349 (2005)
54. Karniadakis, G.E., Beskok, A., Aluru, N.: Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation. *Interdisc. Appl. Math. Series.* **29**, 51–77 (2005)
55. Karniadakis, G.E., Garimella, S., Li, D., Kolin, S., King, M.N.: Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels. Elsevier Science, USA (2006)
56. Kizilova, N.: Space-filling trees for microfluidic applications: A review. In: Fesenko O., Yatsenko L. (eds.) *Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications*, 4th International Conference on Nanotechnology and Nanomaterials, NANO 2016, Lviv, 24– 27August 2016. Springer Proceedings in Physics, vol. 195, pp. 207–228. Springer, Cham (2017)
57. Kizilova, N.N.: Stability of erythrocyte sedimentation in a constant magnetic field. *Fluid Dynamics.* **24**(6), 878–881 (1989)
58. Kizilova, N., Batyuk, L., Baranets, V.: Human Red Blood Cell Properties and Sedimentation Rate: a Biomechanical Study. In: Arkusz K., Bedzinski R., Klekiel T., Piszczatowski S. (eds.) *Biomechanics in Medicine and Biology*, Proceedings of the International Conference of the Polish Society of Biomechanics, BIOMECHANICS 2018, Zielona Gora, Poland, 5–7 September 2018. Springer Series “Advances in Intelligent Systems and Computing”, vol. 831, pp. 3–22. Springer, Cham (2019)
59. Kizilova, N., Cherevko, V.: Mathematical modeling of particle aggregation and sedimentation in concentrated suspensions. In: Leniowska L., Korzynski M. (eds.) *Mechanika w Medycynie* 12, Rzeszow, Poland, 25–26 wrzesnia 2014 r. XII Miedzynarodowe Seminarium Naukowe

- “Mechanika w Medycynie”, pp. 43–52. Wyd. Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszow (2014)
60. Kizilova, N.M., Cherevko, V.O.: Modeling of red blood cell aggregation during the test on allergy. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки». Спецвипуск, 287–292 (2015)
 61. Kleinstreuer, C., Koo, L.: Computational analysis of wall roughness effects for liquid flow in micro-conduits. J. Fluids Eng. **126**, 1–9 (2004)
 62. Kleinstreuer, C., Xu, Z.: Mathematical Modeling and Computer Simulations of Nanofluid Flow with Applications to Cooling and Lubrication. A review. Fluids. **1**, 16–48 (2016)
 63. Kynch, G. J.: A theory of sedimentation. Transactions of Faraday Society. **48**, 166–176 (1952)
 64. Lamb, H.: Hydrodynamics. Cambridge University Press, Cambridge (1932)
 65. LAMMPS Molecular Dynamics Simulator. <https://lammmps.sandia.gov/>
Дата звернення 17 листопада 2018
 66. Langford, D.: Centrifuge analysis – effects on sedimentation coefficients of angular velocity lag, of deviations from Stokes’ law of drag, and of acceleration effects. Appl. Mech. **4**, 64–70 (1969)
 67. Lee, S.-J., Chang, K.-S., Kim, K.: Pressure wave speeds from the characteristics of two fluids, two-phase hyperbolic equation system. International Journal of Multiphase Flow. **24**, 855–866 (1998)
 68. Lesson, M., Huang P.S.: Poiseuille flow in a pipe with axially symmetric wavy walls. Phys. Fluids. **19**, 945–950 (1976)
 69. Leung, W.F., Probstein, R.F.: Lamella and tube settlers. Model and operation. Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development. **22**(1), 58–67 (1983)
 70. Lim, C.Y., Shu, C., Niu, X.D., Chew, Y.T.: Application of lattice Boltzmann method to simulate microchannel flows. Phys. Fluids. **1**(14), 2299–2308 (2002)

71. Liou, W., Fang, Y.: *Microfluid Mechanics: Principles and Modeling (Nanoscience and Technology)*. McGraw-Hill Education, Michigan (2005)
72. MacTaggart, R.S., Law, D.H-S., Masliyah, J.H., Nandakumar, K.: Gravity separation of concentrated bidisperse suspensions in inclined plate settlers. *Intern. J. Multiphase Flow*. **14**(4), 519–532 (1988)
73. Mala, G.M., Li, D.Q.: Flow characteristics of water in microchannels. *Int. J. Heat Fluid Flow*. **20**, 142–148 (1999)
74. Malvandi, A., Ganji, D.D.: Effects of nanoparticle migration and asymmetric heating on magnetohydrodynamic forced convection of alumina/water nanofluid in microchannels. *European J. Mech. Ser. B, Fluids*. **52**, 169–184 (2015)
75. Maninen, M., Taivassalo, V.: *On the mixture model for multiphase flow*. VTT Publication, Espo (1996)
76. Maxwell, J.C.: On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. *Philos. Trans. R. Soc.* **170**, 231–256 (1879)
77. Merkle, C.L., Kubota, T., Ko, D.R.S.: *An analytical study of the effects of surface roughness on boundary-layer transition*. Air Force Office of Scientific Research Space and Missile System Organization, Washington (1974)
78. Michael, J.M., Stephen, H.D.: Slip over rough and coated surface. *J. Fluid Mech.* **273**, 801–817 (1994)
79. Mo, G., Rosenberger, F.: Molecular-dynamics simulation of flow in a two-dimensional channel with atomically rough walls. *Phys. Rev. Ser. A*. **42**, 4688-4892 (1990)
80. Mohammadi, B., Pironneau, O.: *Analysis of the k- ϵ turbulence Model*. Wiley, New York (1974)
81. Moys, S.A.: *Sedimentation of polydisperse particles at low Reynolds numbers in inclined geometries*, PhD Thesis., Santiago de Chile (2016)

82. Nakamura, N., & Kuroda, K.: La cause de l'accélération de la vitesse de sédimentation des suspensions dans les récipients inclinés. *Keijo J. Med.* **8**, 256–296 (1937)
83. Neto, C., Craig, V.S.J., Williams, D.R.M.: Evidence of shear-dependent boundary slip in Newtonian liquids. *Eur. Phys. J. E.* **1**, 71–74 (2003)
84. Neto, C., Evans, D.R., Bonaccorso, E., Butt, H.-J., Craig, V.S.J.: Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Rep. Prog. Phys.* **68**, 2859–2897 (2005)
85. Neu, B., Miesleman, H.J.: Depletion-mediated red blood cell aggregation in polymer solutions. *Biophys. J.* **83**, 2482–2490 (2002)
86. Nikuradze, J.: Laws of flow in rough pipes. NACA. Technical Memorandum. 1292, Washington (1950)
87. Olshaker, J.S., Jerrard, D.A.: The erythrocyte sedimentation rate. *J. Emergency Med.* **15**(6), 869–874 (1997)
88. Paidoussis, M.D.: Fluid–structure interactions: Slender structures and axial flow. Academic Press, London (1998)
89. Papautsky, I., Gale, B.K., Mohanty, S., Ameel, T.A., Frazier, A.B.: Effects of rectangular microchannel aspect ratio on laminar friction constant. *Proc. of the Society of Photo-optical Instrumentation Engineers (SPIE)*. **3877**, 147–158 (1999)
90. Peacock, T., Blanchette, F., Bush, J.W.M.: The stratified Boycott effect. *J. Fluid Mech.* **529**, 33–49 (2005)
91. Peng, X.F., Peterson, G.P., Wang, B.X.: Frictional flow characteristics of water flowing through rectangular channels. *Exp. Heat Transfer.* **7**, 249–264 (1994)
92. Ponder, E.: On Sedimentation and rouleaux formation. *Experimental Physiology.* **16**(2), 173–194 (1926)
93. Probstein, R.F., Hicks, R.E.: Lamella settlers: a new operating mode for high performance. *Ind. Water Eng.* **15**, 6–8 (1978)

94. Qu, W.L., Mala, G.M., Li, D.Q.: Pressure-driven water flows in trapezoidal silicon microchannels. *Int. J. Heat Mass Transfer.* **43**, 353–364 (2000)
95. Rashidi, V., Mirdamadi, H.R., Shirani, E.: A novel model for vibrations of nanotubes conveying nanoflow. *Comput. Mater. Sci.* **51**, 347–352 (2012)
96. Ravi, R., Guruprasad, V.: Lennard-Jones fluid and diffusivity: validity of the hard-sphere model for diffusion in simple fluids and application to CO₂. *Ind. Eng. Chem. Res.* **47**(4), 1297–1303 (2008)
97. Reinhart, W.H., Singh, A., Straub, P.W.: Red blood cell aggregation and sedimentation: the role of cell shape. *British J. Haematol.* **73**, 551–556 (1989)
98. Rice, C.L., Whitehead, R.: Electrokinetic flow in a narrow cylindrical capillary. *J. Phys. Chem.* **69**, 4017–4021 (1965)
99. Richardson, J. F., Zaki, W. N.: The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow. *Chemical Engineering.* **3**, 65–78 (1954)
100. Rifkin, J.: XMD - Molecular Dynamics Program. <http://xmd.sourceforge.net/doc/manual/xmd.html>. Дата звернення 25 жовтня 2018
101. Roohi, E., Darbandi, M.: Extending the Navier–Stokes solutions to transition regime in two-dimensional micro- and nanochannel flows using information preservation scheme. *Phys. Fluids.* **21**, 082001 (2009)
102. Rubinstein, I.: A steady laminar flow of a suspension in a channel. *International Journal of Multiphase Flow.* **6**(5), 473–490 (1980)
103. Ruiz-Baiera, R., Torres, H.: Numerical solution of a multidimensional sedimentation problem using finite volume-element methods. *Applied Numerical Mathematics.* **95**, 280–291 (2015)
104. Salman, B.H., Mohammed, H.A., Kherbeet, A.Sh.: Heat transfer enhancement of nanofluids flow in microtube with constant heat flux. *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* **39**, 1195–1204 (2012)

105. Sbragaglia, M., Prosperetti, A.: Effective velocity boundary condition at a mixed slip surface. *J. Fluid Mech.* **578**, 435–451 (2007)
106. Seidl, M., Steinheil, E.: Measurement of momentum accommodation coefficients on surfaces characterized by Auger spectroscopy, Sims and LEED. In: M. Becker, M Fieberg (ed.). *Rarefied Gas Dynamics*. DFVLR Press (1974)
107. Sidik, N.A.C., Mohammed, H.A., Alawi, O.A., Samion, S.: A review on preparation methods and challenges of nanofluids, *Intern. Communic. Heat Mass Transfer*. **54**, 115–125 (2014)
108. Singh, M., Rath, H.J.: Analysis of aggregation mechanism of erythrocytes under normal- and microgravity conditions. *Adv. Space Res.* **16**(7), 239–242 (1995)
109. Singh, V. P.: *Kinematic wave modeling in water resources: Surface-water hydrology*. Wiley, New York (1996)
110. Smoluchowsky, M.: Drei Vortage uber Diffusion, Brounische Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Phys. Zeits.* **17**, 557–585 (1916) (Пер. з нім. в кн. «Броуновское движение». М.: ОНТИ, 332–417 (1936))
111. Smoluchowski, M.: Uber Brownsche Molekularbewegurig unter Einwirkung ausserer Krafte und deren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Diffusionsgleichung. *Ann. Phys.* **48**, 1103 (1915)
112. Srivastava, G. S.: Effect of aggregation on thermal conductivity and viscosity of nanofluids. *Applied Nanosciences*. **2**, 325–331 (2012)
113. Tang, G.H., Li, Zhuo, He, Y.L., Tao, W.Q.: Experimental study of compressibility, roughness and rarefaction influences on microchannel flow. *Intern. J. Heat Mass Transfer*. **50**, 2282–2295 (2007)
114. Tay, F.E.H.: *Microfluidics and BioMEMS Applications*. Springer Nature, Switzerland (2002)
115. Thompson, P.A., Troian, S.M.: A general boundary condition for liquid flow at solid surfaces. *Nature*. **389**, 360–362 (1997)

116. Toyama, Y., Dobashi, T., Sakanishi, A., Oka, S.: Enhanced erythrocyte sedimentation rate and upflow layer in inclined rectangular vessel. *Jap. J. Appl. Phys.* **29**(2), 453–454 (1990)
117. Urbanek, W., Zemel, J.N., Bau, H.: An investigation of the temperature dependence of Poiseuille numbers in microchannel flow. *J. Micromech. Microeng.* **3**, 206–208 (1993)
118. Wang, H., Wang, Y.: Influence of three-dimensional wall roughness on the laminar flow in microtube. *Intern. J. Heat Fluid Flow.* **28**, 220–228 (2007)
119. Wu, P.Y., Little, W.A.: Measurement of the friction factors for the flow of gases in very fine channels used for microminiature Joule–Thomson refrigerators. *Cryogenics.* **23**, 273–277 (1983)
120. Xu, Z.-J., Michaelides, E.E.: A Numerical Simulation of the Boycott Effect. *Chemical Engineering Communic.* **192**(4), 532–549 (2005)
121. Yan, H., Yong, W.-A.: Stability of steady solutions to reaction-hyperbolic systems for axonal transport. *Journal of Hyperbolic Differential Equations.* **9**(2), 325–337 (2012)
122. Yu, W., Xie, H.: A Review on Nanofluids: Preparation, Stability Mechanisms, and Applications. *Journal of Nanomaterials*, **17** (2012)
123. Zhang, J., Guo, Q., Liu, M., Yang, J.: A lab-on-CD prototype for high-speed blood separation. *J. Micromech. Microeng.* **18**(12) (2008)
124. Zhang, J., Ma, W.: Data-driven discovery of governing equations for fluid dynamics based on molecular simulation. *J. Fluid Mech.* **892**(5), 1–15 (2020)
125. Zhang, W.M., Meng, G., Wei, X.: A review on slip models for gas microflows. *Microfluid. Nanofluid.* **13**, 845–882 (2012)
126. Баранець, В.О., Кізілова, Н.М.: Дослідження течій мікро/нанорідин між двома рухомими циліндрами. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки».* **2**, 45–50 (2018)

127. Кізілова, Н.М., Черевко, В.О.: Спосіб діагностики медикаментозної та харчової алергії. Україна Патент 57165, 10 лютого 2011
128. Балмуханов, Б.С., Басенова, А.Т.: Влияние утечки калия на обратимую агрегацию эритроцитов человека. Биофизика. **44**(3), 898–903 (1999)
129. Баранец, В.А., Кизилова, Н.Н.: Дискретное моделирование агрегации и оседания микро- и наночастиц в суспензиях. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». **40**, 4–15 (2018)
130. Баранец, В.А., Кизилова, Н.Н.: Обзор дискретных моделей динамики наночастиц в суспензиях. В: Азаренков М.О. та ін. (ред.) Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики (МДОЗМФ-2017), Харків, 26–27 червня 2017 р. Праці XVIII Міжнародного симпозіуму, сс. 39–42. ХНУ імені В. Н. Каразіна, Харків (2017)
131. Баранец, В.А., Кизилова, Н.Н., Дацок, О.М.: Аппаратно-программный комплекс для исследования процессов оседания в технических и биологических суспензиях агрегирующих микро- и наночастиц. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». **42**, 4–11 (2019)
132. Баранец, В.А., Дацок, О.М., Кизилова, Н.Н.: Математическое моделирование оседания агрегирующих микрочастиц суспензий во внешнем поле сил. Механика. Исследования и инновации. **12**(12), 5–15 (2019)
133. Возиян, И.В., Дацок, О.М.: Анализ моделей седиментации эритроцитов. Вестник Национального технического университета

- Харьковский политехнический институт. Серия Информатика и моделирование. **46**, 23–30 (2005)
134. Волощук, В.М., Седунов, Ю.С.: Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеиздат (1975)
 135. Галкин, В.А.: Уравнение Смолуховского. М.: Физматлит (2001)
 136. Гельфанд, И.М.: Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. УМН. 14. **2**(86), 87–158 (1959)
 137. Дацок, О. М., Жолонский, Е. Н., Кизилова, Н. Н.: Анализ оседания эритроцитов в неоднородном поле сил. Электроника и связь. **15**, 145–149 (2002)
 138. Дацок, О.М., Жолонский, Е.Н., Кизилова, Н.Н.: Двухфазная модель оседания эритроцитов в неоднородном поле сил. Вестник ХГПУ. **135**, 61–66 (2002)
 139. Кизилова, Н.Н.: Агрегация в магнитном поле. Современные проблемы биомеханики. Реология крови и микроциркуляция. **9**, 118–135 (1994)
 140. Кизилова, Н.Н.: Агрегация и оседание эритроцитов в магнитном поле. Биофизика. **38**(5), 826–832 (1993)
 141. Кизилова, Н.Н.: Влияние некоторых физических полей на механические процессы в биологических тканях. Дисс.канд. физ.-мат. наук, ХГУ, 161 (1993)
 142. Кизилова, Н.Н.: О влиянии радиального движения эритроцитов на их оседание в трубке во внешнем магнитном поле. Изв. АН СССР. МЖГ. **5**, 120–129 (1991)
 143. Кизилова, Н.Н., Черевко, В.А.: Гравитационная седиментация эритроцитов: эксперименты и теоретическая модель. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». **875**, 80–94 (2009)
 144. Кизилова, Н.Н., Черевко, В.А.: Исследование оседания эритроцитов в однородном и неоднородном поле сил: эксперименты и трехфазная

- модель суспензии агрегирующих частиц. В: Тезисы докладов X Всероссийской конференции «Биомеханика–2010», Саратов, 17–22 мая 2010 г.
145. Кизилова, Н.Н., Черевко, В.А.: Исследование показателей оседания эритроцитов крови в норме и патологии. В: Тезисы докладов 24 симпозиума по реологии, Карачарово, 3–7 июня 2008 г.
146. Кизилова, Н.Н., Черевко, В.А.: Математические модели агрегации биологических макро- и наночастиц. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. **8**, 92–99 (2014)
147. Кизилова, Н.Н., Черевко, В.А.: Моделирование агрегации и оседания частиц суспензий в трубках в поле гравитационных и центробежных сил. В: Материалы XV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 25–31 травня 2007 р.
148. Кизилова, Н.Н., Черевко, В.А.: Моделирование оседания эритроцитов крови. В: Тезисы докладов Всероссийской конференции «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение», Новосибирск, 23–28 апреля 2009 г.
149. Кизилова, Н.Н., Черевко, В.А.: Теоретическое и экспериментальное исследование оседания эритроцитов как агрегирующихся частиц в неоднородном поле сил. В: Александров В. М. и др. (ред.) Современные проблемы механики сплошной среды, Ростов-на-Дону, 12–15 октября 2009 г. Труды XIII Международной конференции, том II, сс. 98–102. Изд-во ЮФУ, Ростов-на-Дону (2009)
150. Кузнецов, А. Ю., Пославский, С. А.: Исследование математической модели механической суффозии. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». **875**, 57–68 (2009)
151. Левтов, В.А., Регирер, С.А., Шадрина, Н.Х.: Агрегация и диффузия эритроцитов. Современные проблемы биомеханики. **9**, 5–34 (1994)

152. Левтов, В.А., Регирер, С.А., Шадрина, Н.Х.: Реология крови. М.: Медицина (1982)
153. Лосев, Е.С.: К гидродинамической теории оседания эритроцитов. Мех. Композит. Матер. **1**, 136–141 (1980)
154. Лосев, Е.С.: Моделирование оседания агрегирующих частиц. Изв. АН СССР. Серия МЖГ. **3**, 71–78 (1983)
155. Лосев, Е.С.: Некоторые задачи гидромеханики суспензий с переменной плотностью: приложение к крови. Дисс.канд. физ.-мат. наук, МГУ (1984)
156. Лосев, Е.С., Нетребко, Н.В., Орлова, И.В.: Гравитационное оседание агрегирующих частиц в сдвиговом потоке. Известия АН СССР. Серия МЖГ. **2**, 95–98 (1989)
157. Лосев, Е.С., Нетребко, Н.И., Регирер, С.А.: Взаимодействие гравитационного оседания и сдвиговой диффузии при движении суспензии в зазоре ротационного вискозиметра. Изв. АН СССР. Серия МЖГ. **5**, 44–51 (1990)
158. Лосев, Е.С., Пичугина, И.А.: Группировка частиц суспензии в поле стоячей звуковой волны. Изв. АН СССР. Серия МЖГ. **5**, 81–88 (1984)
159. Лосев, Е.С., Пичугина, И.А., Регирер, С.А. Течение суспензии в плоском канале с пористыми стенками. Изв. АН СССР. Серия МЖГ. **6**, 37–43 (1987)
160. Лушников, А.А.: Эволюция коагулирующих систем. Дис. на соискание степени д-ра физ.-мат. наук, НИФХИ им. Карпова (1978)
161. Нетребко, Н.И., Орлова, И.В., Регирер, С.А.: Квазистационарное пульсирующее течение тиксотропной жидкости в цилиндрической трубке. Изв. АН СССР. Серия МЖГ. **1**, 3–9 (1987)
162. Пацегон, Н.Ф., Тарапов, И.Е., Федоненко, А.И.: Исследование физических свойств ФМЖ ультразвуковым методом. Магнитн. гидродинамика. **4**, 53–59 (1983)

163. Пеньков, Н.В.: Коагуляционные процессы в дисперсных системах. Дис. на соискание степени д-ра физ.-мат. наук, НИФХИ им. Карпова (1992)
164. Пискунов, В.Н.: Роль процессов коагуляции в формировании спектров частиц в дисперсных системах. Дис. на соискание степени д-ра физ.-мат. наук, ИПГ (1986)
165. Попель, А.С., Регирер, С.А., Шадрина, Н.Х.: Об уравнениях кинетики агрегационных процессов в суспензиях. Прикл. матем. мех. **1**, 130–143 (1975)
166. Радионов, В.Г., Семиряд, Ю.В.: Диагностика и терапия остеодеструктивных изменений у больных артропатическим псориазом. Украинский журнал дерматологии, венерологии, косметологии. **1**, 11–15 (2005)
167. Регирер, С.А.: К вопросу о континуальных моделях суспензий. Прикл. матем. мех. **42**, 679–688 (1978)
168. Регирер, С.А.: Лекции по биологической механике. М.: Изд-во МГУ (1980)
169. Регирер, С.А., Шадрина, Н.Х.: О моделях тиксотропных жидкостей. Прикл. матем. мех. **42**(5), 856–865 (1978)
170. Рождественский, Б. Л.: Разрывные решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа. Успехи Математических Наук. **15**. **6**(96), 59–117 (1960)
171. Свирид, С.Г., Шади, И.: Сигма-СОЭ у больных микотической экземой. Украинский журнал дерматологии, венерологии, косметологии. **4**, 23–24 (2003)
172. Федоненко, А.И.: Изучение магнитных свойств проводящих ферромагнитных жидкостей. Магнитн. гидродинамика. **2**, 131–132 (1983)

173. Федоненко, А.И., Смирнов, В.И.: Взаимодействие частиц и агрегирование в электропроводных магнитных жидкостях. Магнитн. гидродинамика. 4 (1983)
174. Черевко, В.А.: Исследование динамических кривых оседания эритроцитов в трубках разной длины. В: Тези доповідей міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених «Актуальні питання в сучасній медицині», Харків, 26–28 березня 2007 р.
175. Черевко, В.А.: Исследование оседания эритроцитов в трубках разной длины. В: Жолткевич Г. М. (ред.) Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях, Харків, 23–25 травня 2007 р. Сборник материалов международной научной конференции для студентов и аспирантов, сс. 152–155. ХНУ, Харків (2007)
176. Черевко, В.А.: Течение несмешивающихся нано и микрожидкостей между вращающимися коаксиальными цилиндрами. В: Збірка тез доповідей 5-ї Міжнародної наукової онлайн-конференції «Тараповські читання», Харків, 1–15 березня 2016 р.
177. Черевко, В.А., Кизилова, Н.Н.: Агрегация и оседание эритроцитов крови в условиях гипер- и гипогравитации. В: Тезисы докладов 8-й Всероссийской школы-семинара «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», Ростов-на-Дону, 27–31 мая 2013 г.
178. Черевко, В.А., Кизилова, Н.Н.: Диагностический анализ кривых оседания эритроцитов: экспериментальные данные и теоретическая модель. В: Жолткевич Г. М. (ред.) Тараповські читання, Харків, 21–25 квітня 2008 р. Збірник матеріалів міжнародної наукової школи-конференції, сс. 142–145. ХНУ, Харків (2008)
179. Черевко, В.А., Кизилова, Н.Н.: Исследование оседания и агрегации эритроцитов с учетом влияния неоднородного поля центробежных сил. В: Тези доповідей IV наукової конференції для студентів і аспірантів

- «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 14–15 травня 2010 р.
180. Черевко, В.А., Кизилова, Н.Н.: Математические модели агрегации частиц в биокolloидах и суспензиях. В: Ефименко А. В. (ред.) Ученый, Учитель, Человек. К 85-летию со дня рождения И. Е. Тарапова, сс. 299–320. Новое слово, Харьков, (2011)
 181. Черевко, В.А., Кизилова, Н.Н.: Математическое моделирование суспензий агрегирующих частиц. В: Тези доповідей VI наукової конференції для студентів і аспірантів «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 24–26 квітня 2012 р.
 182. Черевко, В.А., Кизилова, Н.Н.: Механизмы агрегации и их влияние на оседание частиц агрегирующих суспензий в неоднородном внешнем поле. В: Тези доповідей міжнародної конференції, присвяченої 50-річчю механіко-математичного факультету, «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 17–22 квітня 2011 р.
 183. Черевко, В.А., Кизилова, Н.Н.: Моделирование кинетики агрегации эритроцитов крови. В: Тези доповідей III Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки», Київ, 27–29 серпня 2015 р.
 184. Черевко, В.А., Кизилова, Н.Н.: Моделирование ламинарного течения несмешивающихся суспензий микро- и наночастиц в микроканалах. Механика. Исследования и инновации. 1(9), 47–53 (2016)
 185. Черный, Г.Г.: Газовая динамика. М.: Наука (1988)
 186. Шадрина, Н.Х.: О сдвиговых течениях тиксотропной жидкости. Изв. АН СССР. Серия МЖГ. 3, 3–12 (1978)

ДОДАТОК А
СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці у наукових фахових виданнях України:

1. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Гравитационная седиментация эритроцитов: эксперименты и теоретическая модель. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». **875**, 80–94 (2009)
2. **Баранець, В.О.**, Кізілова, Н.М.: Дослідження течій мікро/нанорідин між двома рухомими циліндрами. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки». **2**, 45–50 (2018)
3. **Баранець, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Дискретное моделирование агрегации и оседания микро- и наночастиц в суспензиях. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». **40**, 4–15 (2018)
4. **Baranets, V.**, Kizilova, N.: Mathematical Modeling of Particle Aggregation and Sedimentation in Inclined Tubes. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». **90**, 42–59 (2019)
5. **Баранець, В.А.**, Кизилова, Н.Н., Дацок, О.М.: Аппаратно-программный комплекс для исследования процессов оседания в технических и биологических суспензиях агрегирующих микро- и наночастиц. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані

системи управління». **42**, 4–11 (2019) *Особистий внесок здобувача: Створення бази даних та написання програмного коду.*

6. **Baranets, V.O.**, Kizilova, N.M.: On hyperbolicity and solution properties of the continual models of micro/nanoparticle aggregation and sedimentation in concentrated suspensions. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки». **4**, 60–63 (2019)

Наукові праці у зарубіжних спеціалізованих виданнях:

7. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Математические модели агрегации биологических макро- и наночастиц. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. **8**, 92–99 (2014)
8. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Моделирование ламинарного течения несмешивающихся суспензий микро- и наночастиц в микроканалах. Механика. Исследования и инновации. **1**(9), 47–53 (2016)
9. **Баранец, В.А.**, Дацок, О.М., Кизилова, Н.Н.: Математическое моделирование оседания агрегирующих микрочастиц суспензий во внешнем поле сил. Механика. Исследования и инновации. **12**(12), 5–15 (2019) *Особистий внесок здобувача: Розрахунки та аналіз результатів.*

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації.

Статті в матеріалах конференцій:

10. **Cherevko, V.**, Kizilova, N.: Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions. In: Fesenko O., Yatsenko L. (eds.) Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications, 4th International Conference on Nanotechnology and Nanomaterials, NANO

- 2016, Lviv, 24–27 August 2016. Springer Proceedings in Physics, vol. 195, pp. 207–228. Springer, Cham (2017) (Scopus).
11. Kizilova, N., Batyuk, L., **Baranets, V.**: Human Red Blood Cell Properties and Sedimentation Rate: a Biomechanical Study. In: Arkusz K., Bedzinski R., Klekiel T., Piszczatowski S. (eds.) Biomechanics in Medicine and Biology, Proceedings of the International Conference of the Polish Society of Biomechanics, BIOMECHANICS 2018, Zielona Gora, Poland, 5–7 September 2018. Springer Series “Advances in Intelligent Systems and Computing”, vol. 831, pp. 3–22. Springer, Cham (2019) (Scopus).
Особистий внесок здобувача: Розв’язок задачі та проведення чисельних розрахунків.
 12. Черевко, В.А.: Исследование оседания эритроцитов в трубках разной длины. В: Жолткевич Г. М. (ред.) Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях, Харків, 23–25 травня 2007 р. Сборник материалов международной научной конференции для студентов и аспирантов, сс. 152–155. ХНУ, Харків (2007)
 13. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Диагностический анализ кривых оседания эритроцитов: экспериментальные данные и теоретическая модель. В: Жолткевич Г. М. (ред.) Тараповські читання, Харків, 21–25 квітня 2008 р. Збірник матеріалів міжнародної наукової школи-конференції, сс. 142–145. ХНУ, Харків (2008)
 14. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Теоретическое и экспериментальное исследование оседания эритроцитов как агрегирующихся частиц в неоднородном поле сил. В: Александров В. М. и др. (ред.) Современные проблемы механики сплошной среды, Ростов-на-Дону, 12–15 октября 2009 г. Труды XIII Международной конференции, том II, сс. 98–102. Изд-во ЮФУ, Ростов-на-Дону (2009)

15. **Cherevko, V.A.**, Kizilova, N.N.: Particle aggregation and sedimentation in non-uniform fields for evaluation the suspension stability. В: Тропіна А. А. та ін. (ред.) Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки, Харків, 10–25 травня 2013 р. Матеріали Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, pp. 3–6. Екограф, Харків (2013)
16. Kizilova, N., **Cherevko, V.**: Mathematical modeling of particle aggregation and sedimentation in concentrated suspensions. In: Leniowska L., Korzynski M. (eds.) *Mechanika w Medycynie 12*, Rzeszow, Poland, 25–26 wrzesnia 2014 r. XII Miedzynarodowe Seminarium Naukowe “Mechanika w Medycynie”, pp. 43–52. Wyd. Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszow (2014)
17. **Баранец, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Обзор дискретных моделей динамики наночастиц в суспензиях. В: Азаренков М.О. та ін. (ред.) Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики (МДОЗМФ-2017), Харків, 26–27 червня 2017 р. Праці XVIII Міжнародного симпозіуму, сс. 39–42. ХНУ імені В. Н. Каразіна, Харків (2017)

Тези доповідей на наукових конференціях:

18. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Моделирование агрегации и оседания частиц суспензий в трубках в поле гравитационных и центробежных сил. В: Тезисы докладов XV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 25–31 травня 2007 р.
19. Черевко, В.А.: Исследование динамических кривых оседания эритроцитов в трубках разной длины. В: Тези доповідей міжнародної

наукової конференції студентів та молодих вчених «Актуальні питання в сучасній медицині», Харків, 26–28 березня 2007 р.

20. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Исследование показателей оседания эритроцитов крови в норме и патологии. В: Тезисы докладов 24 симпозиума по реологии, Карачарово, 3–7 июня 2008 г.
21. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Моделирование оседания эритроцитов крови. В: Тезисы докладов Всероссийской конференции «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение», Новосибирск, 23–28 апреля 2009 г.
22. Кизилова, Н.Н., **Черевко, В.А.**: Исследование оседания эритроцитов в однородном и неоднородном поле сил: эксперименты и трехфазная модель суспензии агрегирующих частиц. В: Тезисы докладов X Всероссийской конференции «Биомеханика-2010», Саратов, 17–22 мая 2010 г.
23. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Исследование оседания и агрегации эритроцитов с учетом влияния неоднородного поля центробежных сил. В: Тези доповідей IV наукової конференції для студентів і аспірантів «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 14–15 травня 2010 р.
24. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Механизмы агрегации и их влияние на оседание частиц агрегирующих суспензий в неоднородном внешнем поле. В: Тези доповідей міжнародної конференції, присвяченої 50-річчю механіко-математичного факультету, «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 17–22 квітня 2011 р.
25. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Математическое моделирование суспензий агрегирующих частиц. В: Тези доповідей VI наукової

- конференції для студентів і аспірантів «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, 24–26 квітня 2012 р.
26. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Агрегация и оседание эритроцитов крови в условиях гипер- и гипогравитации. В: Тезисы докладов 8-й Всероссийской школы-семинара «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», Ростов-на-Дону, 27–31 мая 2013 г.
 27. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Моделирование кинетики агрегации эритроцитов крови. В: Тези доповідей III Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки», Київ, 27–29 серпня 2015 р.
 28. **Cherevko, V.**, Kizilova, N.: Second order velocity slip boundary conditions and Fahraeus-Lindqvist effect in nanofluids and microfluids. In: Abstracts of the 7th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems”, Київ, 27–31 травня 2016 р.
 29. **Cherevko, V.**, Kizilova, N.: Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids between coaxial tubes. In: Book of abstracts of the 4-th International research and practice conference «Nanotechnology and Nanomaterials NANO-2016», Львів, 24–27 серпня 2016 р.
 30. Черевко, В.А.: Течение несмешивающихся нано и микрожидкостей между вращающимися коаксиальными цилиндрами. В: Тези доповідей 5-ї Міжнародної наукової онлайн-конференції «Тараповські читання», Харків, 1–15 березня 2016 р.
 31. **Batyuk, L.V.**, Kizilova, N.N., **Baranets, V.A.**: Dielectric properties of micro/nanoparticle suspensions at low and room temperatures: a thermodynamic approach. In: Abstracts book and Conference program of IX International Conference for Professionals and Young Scientists “Low

Temperature Physics” dedicated to 100th anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, Харків, 4–8 червня 2018 р. *Особистий внесок здобувача: Розрахунки та аналіз результатів.*

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:

32. **Черевко, В.А.**, Кизилова, Н.Н.: Математические модели агрегации частиц в биокolloидах и суспензиях. В: Ефименко А. В. (ред.) Ученый, Учитель, Человек. К 85-летию со дня рождения И. Е. Тарапова, сс. 299–320. Новое слово, Харьков, (2011)
33. **Cherevko, V.A.**, Kizilova, N.N.: Particle aggregations and sedimentation in non-uniform fields for evaluation of the suspension stability. В: Тропіна А.А. (ред.) Математичне моделювання в науці та техніці. Збірник наукових праць, **1**, сс. 41–43. Харків, (2014)
34. Kizilova, N.M., **Cherevko, V.O.**: Modeling of red blood cell aggregation during the test on allergy. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки». Спецвипуск, 287–292 (2015)
35. Кізілова, Н.М., **Черевко, В.О.**: Спосіб діагностики медикаментозної та харчової алергії. Україна Патент 57165, 10 лютого 2011