Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Соловйова Марія В'ячеславівна

УДК 517.982.22

НАБЛИЖЕННЯ ОПЕРАТОРАМИ І ФУНКЦІОНАЛАМИ, ЩО ДОСЯГАЮТЬ НОРМИ

01.01.01 – математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна МОН України, м. Харків.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, доцент
Кадець Володимир Михайлович
Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, МОН України,
професор кафедри фундаментальної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Золотарьов Володимир Олексійович
Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б. І. Вєркіна НАН України (м. Харків),
відділ теорії функцій,
провідний науковий співробітник;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Карлова Олена Олексіївна
Чернівецький національний університет
імені Ю. Федьковича, МОН України,
доцент кафедри математичного аналізу.

Захист дисертації відбудеться 7 вересня 2018 р. о 15-20 на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 при Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4, ауд. 6-49.

З дисертацією можна ознайомитися у Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Автореферат розісланий ___ ________ 2018 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради С. Ю. Ігнатович

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У 1961 році Бішоп та Фелпс довели, що у будь-якому банаховому просторі множина функціоналів, що досягають норми, є щільною у спряженому просторі. Болобаш поглибив цей результат, показавши, що можна наближувати пару – функціонал та вектор, на якому майже досягається норма – функціоналом та вектором, на якому норма досягається. Цей факт має численні застосування, наприклад, у вивченні чисельного рангу операторів.

Лінденштраус розпочав вивчення властивості Бішопа-Фелпса для операторів, що діють між двома банаховими просторами. Він показав, що результат Бішопа-Фелпса не можна перенести на векторозначний випадок, навівши приклад, коли множина операторів, що досягають норми, не є щільною у просторі всіх лінійних неперервних операторів, що діють між двома банаховими просторами. Далі численні дослідження внесли ясність, для яких банахових просторів множина операторів, що досягають норми, є щільною.

Дана дисертаційна робота присвячена властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для функціоналів, операторів та ліпшицевих функцій. Ця властивість для лінійних операторів була вперше введена у 2008 році у роботі Акости, Арона, Гарсії та Маестре "Теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів". Ця властивість гарантує, що оператор та точку, на якій майже досягається норма, можна апроксимувати відповідно оператором та точкою, на якій норма в точності досягається, при чому наближення є тим краще, чим ближче було значення даного оператора на даній точці до норми. Подальші дослідження цієї властивості для різних просторів активно проводились протягом останніх років. Дослідження щодо найкращої можливої оцінки наближення у властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів раніше не велись, тому їх проведення є актуальним.

У 2011 році у роботі Арона, Каскалеса та Кожушкіної було показано, що простір $C(K)$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів. Це стало першим прикладом, коли пара (c_0, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша та простір Y є нескінченновимірним. У 2013 Каскалес, Кадець та Гуірао поширили цей результат на рівномірні алгебри $A \subset C(K)$.

У 2014 році у статті "Модулі Бішопа-Фелпса-Болобаша банахового простору" Чіки, Кадеця, Мартіна, Морено-Пулідо та Рамбли-Барено були введені два модулі, що показували найкращу можливу оцінку у властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для функціоналів у даному просторі. У цій роботі також був виявлений цікавий зв'язок між цією характеристикою та геометричними властивостями банахового простору. А саме, якщо банаховий простір має максимальний (тобто найгірший можливий) модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша, то цей простір містить майже ізометричні копії простору $\ell_1^{(2)}$. Таким чином, актуальним питанням залишилось, яку покращену оцінку для модуля можна отримати для просторів, які не містять майже ізометричних копій простору $\ell_1^{(2)}$ (такі простори називаються рівномірно неквадратними).

Ще одним актуальним питанням є поширення теореми Бішопа-Фелпса та Бішопа-Фелпса-Болобаша на нелінійні ліпшицеві функції, які діють з банахового простору X в $\mathbb{R}$. Ліпшицеві функції є важливим об'єктом у математичному аналізі. Відомо, що деякі важливі результати для лінійних неперервних функціоналів можуть бути доведені для ліпшицевих функцій. Наприклад, ще у 1934 році Макшейн довів теорему про продовження ліпшицевої функції з замкненої множини на весь простір зі збереженням ліпшицевої константи, що є аналогом класичного результату про продовження лінійного неперервного функціоналу зі збереженням норми.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики та інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри та в рамках державної науково-дослідної роботи за темою «Оператори в банахових, гільбертових, функціональних просторах та квазікришталі Фур'є» (номер державної реєстрації: 0118U002036).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є отримання аналогів теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для різних випадків та одержання найкращих можливих оцінок наближення, що виникає у цих теоремах.

Завдання дослідження:

– встановити зв'язок між параметром рівномірної неквадратності банахового простору (параметром, який показує наскільки двовимірні підпростори віддалені від $\ell_1^{(2)}$) та сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша;

– довести аналог теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій;

– поширити результат статті Каскалеса, Кадеця та Гуірао “Теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша для рівномірних алгебр” на більш широкий клас просторів Y, які не є рівномірними алгебрами;

– ввести поняття модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів та отримати оцінки для цих модулів у випадку, коли оператор діє у простір з властивістю β.

Об'єкт дослідження – нескінченновимірні банахові простори, лінійні неперервні функціонали, лінійні неперервні оператори, ліпшицеві функції.

Предметом дослідження служать властивості банахових просторів, пов'язані з властивістю Бішопа-Фелпса-Болобаша.

Методи дослідження. Для отримання результатів дисертаційної роботи використовуються загальні методи функціонального аналізу, теорії функцій дійсної та комплексної змінної і геометрії банахових просторів у поєднанні з методами розробленими такими математиками, як Кадець В., Каскалес Б., Гуірао А., Мартін М. та інших. Для отримання результатів розділу два ми використовуємо властивості рівномірно неквадратних просторів, які були введені Джеймсом. Результати третього розділу отримані за допомогою техніки вільних ліпшицевих просторів. У розділі чотири ми користуємось концепцією асплундових просторів. Результати розділу п'ять отримані з використанням техніки, розробленої у роботі Акости М., Арона Р., Гарсії Д. та Маестре М. "The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators".

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі досліджений зв'язок між параметром рівномірної неквадратності банахового простору та сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша. Також вперше введено поняття модифікованого модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша, отримана його оцінка зверху для всіх банахових просторів, та показано, що ця оцінка не може бути покращена у деяких рівномірно неквадратних просторах. В роботі вперше розглядається поняття досягнення норми для ліпшицевої функції у строгому сенсі та досягнення норми за напрямком з точки зору узагальнень теорем Бішопа-Фелпса та Бішопа-Фелпса-Болобаша. Введене поняття модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів та досліджені оцінки цих модулів для деяких випадків. Зокрема, отримані такі результати.

– Отримана оцінка зверху для сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша через параметр рівномірної неквадратності.

– Доведено, що рівномірно опуклі простори мають властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій.

– Введена нова властивість банахових просторів – ACK структура, яка гарантує, що пара просторів (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів, якщо простір Y має таку структуру. Показано, що клас просторів зі структурою ACK включає в себе простори, що є рівномірними алгебрами, але не вичерпується тільки ними.

– Отримана оцінка зверху для модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів, що діють з простору X у простір Y у випадку, коли простір Y має властивість β та досліджена точність цієї оцінки.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати поглиблюють наше уявлення про банахові простори і можуть бути використані в теорії банахових просторів, теорії операторів і інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковому керівникові. Всі результати дисертації отримані авторкою самостійно. Зі статей, які опубліковані у співавторстві, у дисертацію включені лише ті результати, які належать авторці. А саме: робота [1] написана без співавторів, роботи [2] та [3] написані у співавторстві з науковим керівником, йому належить постановка задачі та загальний план дослідження. У роботі [4] результати автора містяться у розділі 3, а саме Proposition 3.1, Proposition 3.2, Theorem 3.3, Lemma 3.5. У роботі [5] автору належить Lemma 4.1, Lemma 4.4, Theorem 5.3. У роботі [6] особистий внесок здобувача - це Lemma 2.9, Theorem 3.4, Theorem 4.5, Theorem 4.9, Theorem 4.11. Результати, що належать співавторам та іншим математикам, згадуються за необхідністю для повноти викладу та супроводжуються відповідними посиланнями.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися й обговорювалися на:

1. IX Міждународній конференції молодих вчених “Сучасні проблеми та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях”, Харків, 2014 р. (Форма участі у конференції: очна.)

2. II Міжнародній конференції “Аналіз та математична фізика”, Харків, 2014 р. (Форма участі у конференції: очна.)

3. III Міжнародній конференції “Аналіз та математична фізика”, Харків, 2015 р. (Форма участі у конференції: очна.)

4. Семинарі по банаховим просторам з нагоди 60-річчя Рафаеля Пайа у Салобренії (Іспанія), 2015. (Форма участі у конференції: доповідь співавтора Кадеця В. М.)

5. Міжнародній науковій конференції, присвяченій 120-річчю з дня народження С. Банаха, Львів, 2017 р. (Форма участі у конференції: очна)

6. Семінарі з функціонального аналізу у Мурсії (Іспанія), 2016.

7. Семінарі з функціонального аналізу у Гранаді (Іспанія), 2017.

Публікації. Результати дисертації знайшли відображення в 11 наукових публікаціях, в тому числі в 6 статтях [1 - 6] у спеціалізованих журналах, з яких одна написана без співавторів, і в тезах виступів [7-11] на 5 конференціях.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків до дисертації і списку використаних джерел. Повний обсяг роботи – 149 сторінки. Обсяг основної частини дисертації – 116 сторінок. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 22 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність досліджуваної проблеми, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури. Відправною точкою нашого дослідження є той факт, що множина функціоналів, що досягають норми, є щільною у спряженому просторі. Під час огляду літератури було визначено мету роботи та важливі відкриті проблеми у цій галузі. Результати дисертаційної роботи наводяться в розділах 2–5.

Другий розділ присвячений вивченню зв'язку між параметром рівномірної неквадратності та сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша $\Phi_X^S(\varepsilon)$. Ми використовуємо такі позначення:

$$\Pi(X) := \big\{(x, x^*) \in X \times X^* \,:\, \|x\| = \|x^*\| = x^*(x) = 1\big\}.$$

$$\Pi_\varepsilon(X) = \{(x, x^*) \in X \times X^* : \|x\| = \|x^*\| = 1,\, x^*(x) \geqslant 1 - \varepsilon\}.$$

Означення 1.9. Нехай X – банаховий простір. *Модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша* простору X називається функція $\Phi_X : (0, 2) \to \mathbb{R}^+$ така, що для $\varepsilon \in (0, 2)$, $\Phi_X(\varepsilon)$ – це інфімум тих $\delta > 0$, що для будь-якої пари $(x, x^*) \in B_X \times B_{X^*}$ з $x^*(x) > 1 - \varepsilon$, існує пара $(y, y^*) \in \Pi(X)$ з $\|x - y\| < \delta$ та $\|x^* - y^*\| < \delta$. Підставляючи $(x, x^*) \in S_X \times S_{X^*}$ замість $(x, x^*) \in B_X \times B_{X^*}$ ми отримуємо означення *сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша* $\Phi_X^S(\varepsilon)$.

Відомо, що $\Phi_X^S(\varepsilon) \leqslant \Phi_X \leqslant \sqrt{2\varepsilon}$ для всіх $\varepsilon \in (0, 2)$. Ця оцінка не може бути покращена у $\ell_1^{(2)}$ – двовимірному просторі з нормою $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$. Більш того, було доведено, що якщо у просторі X оцінка для модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша для деякого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ не може бути покращена, тоді X містить у собі майже ізометричні копії $\ell_1^{(2)}$.

Простори, що не містять майже ізометричних копій $\ell_1^{(2)}$, були вперше розглянуті Джеймсом.

Означення 1.11. Банаховий простір X називається рівномірно неквадратним, якщо існує $\alpha > 0$ таке, що

$$\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) \leqslant 2 - \alpha \text{ для всіх } x, y \in B_X.$$

У Розділі 2 ми розглядаємо такий параметр рівномірної неквадратності:

$$\alpha(X) := 2 - \sup_{x,y \in B_X} \left\{ \frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) \right\}.$$

Ми доводимо деякі властивості цього параметру.

Твердження 2.2. Для будь-якого банахового простору X виконується нерівність $\alpha(X) \leqslant 2 - \sqrt{2}$.

Твердження 2.4. Нехай X – банаховий простір розмірності не менше ніж 3 та $\alpha(X) = 2 - \sqrt{2}$. Тоді X є гільбертовим простором.

Твердження 2.5. Параметр рівномірної неквадратності зберігається при переході до спряженого простору, тобто $\alpha(X) = \alpha(X^*)$ для будь-якого банахового простору X.

Щоб довести оцінку зверху для сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша через параметр рівномірної неквадратності ми доводимо такий результат:

Твердження 2.6. Нехай X – банаховий простір, $k \in (0, 1/2], r \in (0, k)$, $x \in S_X, y \in X/\{0\}$ такі, що

$$\|x - y\| \leqslant k \qquad \text{та} \qquad \left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\| \geqslant 2k - r.$$

Тоді виконується наступна нерівність

$$\alpha(X) \leqslant \frac{3r}{2k}$$

Після цього ми доводимо наш основний результат.

Теорема 2.8. Нехай X – банаховий простір з $\alpha(X) > \tilde{\alpha} > 0$. Тоді

$$\Phi_X^S(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{1}{3}\tilde{\alpha}} \qquad \text{для} \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\tilde{\alpha}\right)$$

та

$$\Phi_X^S(\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon \qquad \text{для} \quad \varepsilon \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\tilde{\alpha}, \frac{1}{2}\right).$$

Далі ми надаємо оцінку знизу для модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша у конкретному рівномірно неквадратному просторі, щоб показати, що оцінка отримана в Теоремі 2.9 не може бути суттєво покращена.

Теорема 2.11. Для будь-якого $\alpha \in [0, 1/2]$ існує банаховий простір X з $\alpha(X) = \alpha$ такий, що

$$\Phi_X^S(\varepsilon) \geqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1-\alpha(X)}$$

для всіх $\varepsilon \in]0, 1[$.

Також ми навели приклад двовимірних просторів, які мають однакове значення параметра рівномірної неквадратності, але різне значення сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша при маленьких значеннях ε, що показує, що модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша не можливо виразити через параметр рівномірної неквадратності.

У *підрозділі 2.3* ми працюємо з одною модифікацією теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша. Ми вводимо таке означення:

Означення 2.16. Модифікований модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша – це функція, яка визначається наступним чином:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_X(\varepsilon) = \inf\{\delta > 0 : &\text{для всіх}\, (x, x^*) \in B_X \times B_{X^*},\ \text{якщо}\ x^*(x) > 1 - \varepsilon,\\ &\text{то існує пара}\ (y, y^*) \in S_X \times X^*\, \text{така, що}\\ &|y^*(y)| = \|y^*\|,\ \text{та}\ \max\{\|x - y\|, \|x^* - y^*\|\} < \delta\}.\end{aligned}$$

Модифікований сферичний модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша – це функція, яка визначається наступним чином:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_X^S(\varepsilon) = \inf\{\delta > 0 : &\text{для всіх}\, (x, x^*) \in S_X \times S_{X^*},\ \text{якщо}\ x^*(x) > 1 - \varepsilon,\\ &\text{то існує пара}\ (y, y^*) \in S_X \times X^*\, \text{така, що}\\ &|y^*(y)| = \|y^*\|,\ \text{та}\ \max\{\|x - y\|, \|x^* - y^*\|\} < \delta\}.\end{aligned}$$

Ключовим моментом для отримання точної оцінки для модифікованих модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша є наступна лема, яка є трошки удосконаленою версією Леми Фелпса:

Лема 2.17. Нехай X – банаховий простір, $x \in B_X$, $x^* \in B_{X^*}$, $\varepsilon \in (0, 2)$ та $x^*(x) > 1 - \varepsilon$. Тоді для будь-якого $k \in (0, 1)$ існують $y^* \in X^*$ та $z \in S_X$ такі, що

$$y^*(z) = \|y^*\|, \qquad \|x - z\| < \frac{1 - \dfrac{1-\varepsilon}{\|x^*\|}}{k}, \qquad \|x^* - y^*\| < k\|x^*\|.$$

Більш того, для будь-якого $\tilde{k} \in [\varepsilon/2, 1)$ існують $z^* \in S_{X^*}$ та $z \in S_X$ такі, що

$$z^*(z) = 1, \qquad \|x - z\| < \frac{\varepsilon}{\tilde{k}}, \qquad \|x^* - z^*\| < 2\tilde{k}.$$

Далі ми надаємо точну оцінку для модифікованих модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша.

Теорема 2.19. Для будь-якого банахового простору X

$$\widetilde{\Phi^S_X}(\varepsilon) \leqslant \widetilde{\Phi_X}(\varepsilon) \leqslant \sqrt{\varepsilon}$$

Також ми показуємо, що існують рівномірно неквадратні простори, у яких оцінка для модифікованого модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша залишається точною:

Теорема 2.20. Нехай $\varepsilon \in (0,1)$, $\alpha \in [0,1/2]$. Існує такий рівномірно неквадратний банаховий простір X з $\alpha(X) = \alpha$ та існує $(x,x^*) \in \Pi_\varepsilon(X)$, що для будь-якої пари $(y,y^*) \in S_X \times X^*$ з $y^*(y) = \|y^*\|$ виконується нерівність $\max\{\|x-y\|, \|x^*-y^*\|\} \geqslant \sqrt{\varepsilon}$. Іншими словами, $\widetilde{\Phi^S_X}(\varepsilon) = \widetilde{\Phi_X}(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$.

У **третьому розділі** ми вивчаємо можливість поширити теорему Бішопа-Фелпса та теорему Бішопа-Фелпса-Болобаша для нелінійних ліпшицевих функцій $f : X \to \mathbb{R}$. Нагадаємо, що банаховий простір $\mathrm{Lip}_0(X)$ складається з функцій $f : X \to \mathbb{R}$ з $f(0) = 0$, які задовольняють (глобально) умові Ліпшица. Норма у цьому просторі задається наступним чином:

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|} : x,y \in X, x \neq y\right\}.$$

По-перше, найбільш природним визначенням досягнення норми для функції $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ є наступне.

Означення 3.1. Функція $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ *досягає норми у строгому сенсі*, якщо існують $x,y \in X$, $x \neq y$ такі, що $\|f\| = \dfrac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|}$. Підмножину тих функцій $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, що досягають норми у строгому сенсі, ми позначаємо $\mathrm{SA}(X)$.

На жаль, у сенсі теореми Бішопа-Фелпса, це визначення занадто обмежувальне.

Теорема 3.2. Множина $\mathrm{SA}(\mathbb{R})$ не є щільною у $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$.

Таким чином ясно, що ми повинні знайти менш обмежувальне поняття. Ми використовуємо наступне означення.

Означення 3.4. Нехай $u \in S_X$. Функція $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ *досягає норми за напрямком* u, якщо існує послідовність пар $x_n, y_n \in X, x_n \neq y_n$ таких, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|} = u \ \text{ та } \ \lim_{n\to\infty} \frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{\|x_n-y_n\|} = \|f\|.$$

Ми кажемо, що функція f *досягає норми за напрямком*, якщо вона досягає норми за деяким напрямком $u \in S_X$. Множину тих $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, які досягають норми за напрямком, ми позначаємо $\mathrm{DA}(X)$.

Також ми вводимо наступне означення.

Означення 3.5. Банаховий простір X *має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій* ($X \in \mathrm{LipBPB}$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої функції $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ з $\|f\| = 1$ і для будь-якої пари $x, y \in X, x \neq y$ такої, що $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} > 1 - \delta$ існує функція $g \in \mathrm{Lip}_0(X)$ з $\|g\| = 1$ та існує $u \in S_X$ такі, що g досягає норми у напрямку u, $\|g - f\| < \varepsilon$, та $\left\|\dfrac{x - y}{\|x - y\|} - u\right\| < \varepsilon$.

Основний результат третього розділу – це теорема, що рівномірно опуклі банахові простори мають властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій. Нагадаємо, що банаховий простір X називається рівномірно опуклим, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх $x, y \in S_X$ з $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ виконується, що $\dfrac{\|x + y\|}{2} \leqslant 1 - \delta$.

Теорема 3.11. Будь-який рівномірно опуклий простір X має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій.

У **четвертому розділі** ми поширюємо результати щодо властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів, які були дані Ароном, Каскалесом і Кожушкіною та Каскалесом, Кадецем і Гуірао, на більш широкий клас просторів. У цьому розділі, на відміну від попередніх, ми розглядаємо і дійсні, і комплексні простори, щоб не втрачати важливих прикладів, які виникають у задачах комплексного аналізу.

Означення 4.3. Банаховий простір Y має *властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів* (скорочено A-BPB), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якого банахового простору X та будь-якого асплундового оператору $T \in S_{L(X,Y)}$, якщо $x_0 \in S_X$ і виконується нерівність $\|T(x_0)\| > 1 - \delta(\varepsilon)$, тоді існує $u_0 \in S_X$ і асплундовий оператор $\widetilde{T} \in S_{L(X,Y)}$, такі що

$$\|\widetilde{T}(u_0)\| = 1, \|x_0 - u_0\| < \varepsilon \text{ та } \|T - \widetilde{T}\| < \varepsilon.$$

Нагадаємо, що банаховий простір X називається *асплундовим*, якщо для будь-якої неперервної дійснозначної опуклої функції f, визначеної на відкритій опуклій множині $U \subset X$, множина точок із U, в яких f диференційовна за Фреше, є щільною G_δ множиною в U. Оператор $T \in L(X, Y)$ називається *асплундовим оператором*, якщо він факторизується через асплундовий простір, тобто існує асплундовий простір Z та оператори $T_1 \in L(X, Z), T_2 \in L(Z, Y)$ такі, що $T = T_2 \circ T_1$. Наприклад, кожний слабко компактний оператор є асплундовим оператором. Очевидно, що якщо X або Y – це асплундовий простір, то $T \in L(X, Y)$ є асплундовим оператором. Щоб довести наш основний результат, спочатку ми покращуємо результат, наданий у роботі Каскалеса, Кадеця і Гуірао:

Лема 4.8. Нехай $T\colon X \to Y$ – асплундовий оператор з $\|T\| = 1$, $x_0 \in S_X$ задовольняють нерівності $\|T(x_0)\| > 1 - \varepsilon$, та $\Gamma \subset B_{Y^*}$ – 1-нормуюча множина. Якщо ми позначимо $M = T^*(\Gamma)$, тоді для будь-якого $r > 0$ та для будь-якого $\varepsilon/2 \leqslant k < 1$ існує:

1. w^*-відкрита множина $U_r \subset X^*$ з $U_r \cap M \neq \emptyset$, та
2. точки $x_r^* \in S_{X^*}$ та $u_r \in S_X$ з $|x_r^*(u_r)| = 1$ такі, що

$$\|x_0 - u_r\| \leqslant \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{та} \quad \|z^* - x_r^*\| \leqslant r + 2k$$

   для будь-якого $z^* \in U_r \cap M$.

Замість того, щоб доводити теорему Бішопа-Фелпса-Болобаша для кожного простору, ми зосереджуємо всі технічні аспекти процедури наближення в одному місці шляхом введення нової властивості банахових просторів, яка називається ACK$_\rho$.

Означення 4.9. Банаховий простір Y має *структуру ACK з параметром* $\rho \in (0,1)$ (скорочено $Y \in \mathrm{ACK}_\rho$), якщо існує 1-нормуюча множина $\Gamma \subset B_{Y^*}$ така, що для будь-якого $\varepsilon' > 0$ та для будь-якої відносно w^*-відкритої підмножини $U \subset \Gamma$, $U \neq \emptyset$ існують відносно w^*-відкрита підмножина $V \subset U$, $V \neq \emptyset$, функціонал $y_1^* \in V$, елемент $e \in S_Y$ та оператор $F \in L(Y)$ з наступними властивостями:

(I) $\|F(e)\| = \|F\| = 1$;

(II) $y_1^*(F(e)) = 1$;

(III) $F^*(y_1^*) = y_1^*$;

(IV) $|y^*(F(e))| + (1 - \varepsilon')\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| \leqslant 1$ для будь-якого $y^* \in V$;

(V) $\operatorname{dist}(F^*(y^*), \operatorname{aconv}\{0, V\}) < \varepsilon'$ для будь-якого $y^* \in \Gamma$;

(VI) $|v^*(e) - 1| \leqslant \varepsilon'$ для будь-якого $v^* \in V$;

(VII) $|v^*(F(e))| \leqslant \rho$ для будь-якого $v^* \in \Gamma \setminus V$

Банаховий простір Y має *просту структуру ACK* ($Y \in \mathrm{ACK}$), якщо попереднє означення виконується з двома змінами: по-перше, властивість (IV) змінюється на сильнішу:

(IV)' $|y^*(F(e))| + (1 - \varepsilon')\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| \leqslant 1$ для будь-якого $y^* \in \Gamma$,

і по друге, властивість (VII) зникає.

Головною причиною ввести Означення 4.9 стала наступна теорема:

Теорема 4.11. Кожний банаховий простір $Y \in \text{ACK}$ та кожний банаховий простір $Y \in \text{ACK}_\rho$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів.

У випадку, коли $Y \in \text{ACK}$, ми можемо надати кількісну оцінку.

Наслідок 4.12. Нехай X – банаховий простір, $Y \in \text{ACK}$ та $T\colon X \to Y$ – асплундовий оператор з $\|T\| = 1$, $0 < \varepsilon < 1$ та $x_0 \in S_X$ – такий елемент, що $\|Tx_0\| > 1 - \varepsilon$. Тоді існує $u_0 \in S_X$ та асплундовий оператор $\widetilde{T} \in S_{L(X,Y)}$, що $\|\widetilde{T}u_0\| = 1$, та

$$\max\{\|x_0 - u_0\|, \|T - \widetilde{T}\|\} \leqslant \sqrt{2\varepsilon}.$$

Кожний банаховий простір $Y \in \text{ACK}$ та кожний банаховий простір $Y \in \text{ACK}_\rho$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів. У *підрозділі 4.3* ми наводимо приклади просторів з такою структурою.

Теорема 4.16. Нехай $Y \subset C(K)$ – рівномірна алгебра. Тоді Y має просту структуру ACK.

Інший клас просторів, який має структуру ACK – це простори з властивістю Лінденштрауса.

Означення 1.2. Банаховий простір Y має властивість β, якщо існують дві множини $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{y_\alpha^* : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y^*$ та число $0 \leqslant \rho < 1$ такі, що виконуються наступні умови

1. $y_\alpha^*(y_\alpha) = 1$,
2. $|y_\alpha^*(y_\gamma)| \leqslant \rho$, якщо $\alpha \neq \gamma$,
3. $\|y\| = \sup\{|y_\alpha^*(y)| : \alpha \in \Lambda\}$, для всіх $y \in Y$.

Теорема 4.17. Нехай банаховий простір Y має властивість β. Тоді Y має структуру ACK з тим самим параметром ρ, як у Означенні 1.2.

Також ми довели стабільність властивості ACK відносно деяких важливих операцій.

Теорема 4.19. Нехай Y_1 має структуру ACK з параметром ρ_1 та Y_2 має структуру ACK з параметром ρ_2. Тоді $Y := Y_1 \bigoplus_\infty Y_2$ має структуру ACK з параметром $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$. Якщо $Y_1, Y_2 \in \text{ACK}$, тоді $Y \in \text{ACK}$.

Теорема 4.20. Нехай K – компактний гаусдорфів топологічний простір. Тоді,

$$(Y \in \text{ACK}_\rho) \Rightarrow (C(K, Y) \in \text{ACK}_\rho);$$

$$(Y \in \text{ACK}) \Rightarrow (C(K, Y) \in \text{ACK}).$$

У **п'ятому розділі** ми даємо оцінку для модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів, які діють у простір з властивістю β. У 2008 Акоста, Арон, Гарсія та Маестре ввели властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша як поширення теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша на векторозначний випадок.

Акоста, Арон, Гарсія та Маестре довели, що якщо Y має властивість β (Означення 4.17), тоді для будь-якого банахового простору X пара (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів, тобто будь-яку пару $(x, T) \in S_X \times S_{L(X,Y)}$ з $\|T(x)\| > 1 - \varepsilon(\delta)$ можна наблизити парою $(z, F) \in S_X \times S_{L(X,Y)}$ з $F(z) = 1$. Ми вводимо аналог модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для векторозначного випадку.

Означення 5.1. Нехай X, Y банахові простори. *Модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша* (*сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша*) для пари просторів (X, Y) називається функція $\Phi(X, Y, \cdot) : (0, 1) \to \mathbb{R}^+$ ($\Phi^S(X, Y, \cdot) : (0, 1) \to \mathbb{R}^+$), значення якої у точці $\varepsilon \in (0, 1)$ визначається як інфімум тих $\delta > 0$ що для будь-якої пари $(x, T) \in B_X \times B_{L(X,Y)}$ ($(x, T) \in S_X \times S_{L(X,Y)}$ відповідно) з $\|T(x)\| > 1 - \varepsilon$, існує пара $(z, F) \in S_X \times S_{L(X,Y)}$ з $\|F(z)\| = 1$, $\|x - z\| < \delta$ та $\|T - F\| < \delta$.

Ми надаємо оцінку зверху для $\Phi(X, Y, \varepsilon)$, коли Y має властивість β:

Теорема 5.3. Нехай X та Y – банахові простори та $\beta(Y) \leqslant \rho$. Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\Phi^S(X, Y, \varepsilon) \leqslant \Phi(X, Y, \varepsilon) \leqslant \min\left\{\sqrt{2\varepsilon}\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}},\ 2\right\}.$$

Підрозділ 5.3 присвячений отриманню оцінки знизу для $\Phi(X, Y, \varepsilon)$.

Теорема 5.10. Для будь-якого банахового простору Y

$$\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \geqslant \min\{\sqrt{2\varepsilon}, 1\}.$$

Теорема 5.12. Нехай $\rho \in [1/2, 1)$, $0 < \varepsilon < 1$. Тоді існує простір Y з $\beta(Y) \leqslant \rho$ такий, що

$$\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \geqslant \min\left\{\sqrt{\frac{2\rho\varepsilon}{1-\rho}}, 1\right\}.$$

З цих оцінок, отриманих у теоремах 5.3 та 5.12, ми побачили цікавий ефект (Теорема 5.13), що $\Phi(X, Y, \varepsilon)$ не є неперервним відносно простору Y.

У *підрозділі 5.3.3* ми вимірюємо поведінку $\Phi^S(X, Y, \varepsilon)$ коло 0. Ми водимо таку характеристику

$$\Psi(X, Y) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi^S(X, Y, \varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

Також визначимо величину

$$\Psi(\rho) := \sup_{Y : \beta(Y) \leqslant \rho} \sup_X \limsup_{\varepsilon \to 0} \Psi(X, Y),$$

яка вимірює найгіршу можливу поведінку коло 0 модуля $\Phi^S(X, Y, \varepsilon)$, коли $\beta(Y) \leqslant \rho$. З Теореми 5.4 ми знаємо, що

$$\Psi(\rho) \leqslant \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}.$$

Ми довели таку оцінку знизу.

Теорема 5.17.

$$\Psi(\rho) \geqslant \max\left\{\sqrt{\frac{2\rho}{1-\rho}}, 1\right\}$$

для всіх значень $\rho \in (0, 1)$.

У *підрозділі 5.4* ми розглядаємо модифіковану версію модулів, яка виникає, якщо ми наближуємо парою (y, F) з $\|F\| = \|Fy\|$ без умови $\|F\| = 1$.

Означення 5.18. *Модифікованим модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша* (*модифікованим сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша*) для пари просторів (X, Y) називається функція $\widetilde{\Phi}(X, Y, \cdot) : (0, 1) \to \mathbb{R}^+$ ($\widetilde{\Phi^S}(X, Y, \cdot) : (0, 1) \to \mathbb{R}^+$), значення якої у точці $\varepsilon \in (0, 1)$ визначається як інфімум тих $\delta > 0$, що для будь-якої пари $(x, T) \in B_X \times B_{L(X,Y)}$ ($(x, T) \in S_X \times S_{L(X,Y)}$ відповідно) з $\|T(x)\| > 1 - \varepsilon$, існує пара $(y, F) \in S_X \times L(X, Y)$ з $F(y) = \|F\|$, $\|x - y\| < \delta$ та $\|T - F\| < \delta$.

Ми доводимо такі оцінки.

Теорема 5.19. Нехай X та Y – банахові простори, Y має властивість β з параметром ρ. Тоді пара (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, та для будь-якого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\widetilde{\Phi^S}(X, Y, \varepsilon) \leqslant \widetilde{\Phi}(X, Y, \varepsilon) \leqslant \min\left\{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}, 1\right\}.$$

Теорема 5.21. Нехай $\rho \in [1/2, 1)$, $0 < \varepsilon < 1$. Тоді існує простір Y з $\beta(Y) \leqslant \rho$ такий, що

$$\widetilde{\Phi^S}(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \geqslant \min\left\{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{2\rho}{1-\rho}}, 1\right\}.$$

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша та її зв'язку з геометричними властивостями банахових просторів. У першому розділі ми зробили огляд відомих результатів. У другому розділі ми дослідили деякі властивості параметра рівномірної неквадратності та встановили зв'язок з іншими характеристиками рівномірно неквадратних просторів. Ми отримали кількісну версію теореми, що рівномірно неквадратні простори не можуть мати максимальне можливе значення модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша. Також ми ввели означення модифікованих модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для функціоналів, отримали для них верхню границю, а також показали, що на відміну від звичайного модуля, оцінка зверху залишається точною в деяких рівномірно неквадратних просторах. У третьому розділі ми розглянули два поняття досягнення норми для ліпшицевих функцій: досягнення норми у строгому сенсі та досягнення норми за напрямком. Ми ввели властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій та довели аналог теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для рівномірно опуклих просторів. У четвертому розділі ми ввели нову властивість банахових просторів – ACK структуру – та показали, що якщо простір Y має таку структуру, то пара просторів (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів. Далі ми навели приклади просторів, які мають структуру ACK. В останньому, п'ятому, розділі ми ввели поняття модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів. Ми отримали оцінки зверху і знизу для модулів у випадку, коли оператори діють у простір з властивістю β Лінденштрауса.

У дисертації отримані наступні нові результати:

– Отримана оцінка для сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша через параметр рівномірної неквадратності.

– Доведено, що модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша не виражається через параметр рівномірної неквадратності.

– Введено поняття модифікованих модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша та отримана точна оцінка зверху.

– Наведені приклади рівномірно неквадратних просторів, у яких оцінка для модифікованого модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша залишається точною.

– Наведено приклад, коли множина ліпшицевих функцій, які досягають норми у строгому сенсі не є щільною у просторі ліпшицевих функцій.

– Введено властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій у сенсі досягнення норми за напрямком.

– Доведено, що рівномірно опуклі простори мають властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій.

– Введена властивість ACK та наведені приклади просторів, які мають цю властивість, та просторів, які не мають цієї властивості.

– Доведено, що якщо простір Y має АСК структуру, то для будь-якого простору X пара (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів.

– Доведено, що якщо Y має структуру АСК з параметром ρ, то простір $C(K, Y)$ має структуру АСК з тим самим параметром.

– Встановлено, що структура АСК зберігається при операції $\bigoplus_\infty$ між просторами.

– Введено поняття модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів, отримані оцінки зверху для цих модулів, коли простір, у який діють оператори, має властивість β та виконано дослідження цих оцінок на точність.

Всі основні результати дисертації наведені з повними і строгими математичними доведеннями. Отримані результати мають теоретичний характер та можуть бути використані у функціональному аналізі, теорії операторів, та при роботі з ліпшицевими функціями.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧКИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Soloviova, M.: Bishop-Phelps-Bollobás modulus of a uniformly non-square Banach space. Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics 81, 4–9 (2015)

   (**Фахове** видання України; входить до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH, Google Scholar.)

2. Kadets, V., Soloviova, M.: A modified Bishop-Phelps-Bollobás theorem and its sharpness. Matematychni Studii 44 (1), 84–88 (2015)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet.)

3. Kadets, V., Soloviova, M.: Quantitative version of the Bishop-Phelps-Bollobás thorem for operators with values in a space with the property β. Matematychni Studii 47(1), 71–90 (2017)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, Google Scholar, MathSciNet.)

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

4. Chica, M., Kadets, V., Martin, M., Meri, J., Soloviova, M.: Two refinements of the Bishop-Phelps-Bollobás modulus. Banach J. Math. Anal. 9(4), 296–315 (2015)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus, Web of Science** (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 0.8), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet.)

5. Kadets, V., Martin, M., Soloviova, M.: Norm-attaining Lipschitz functionals. Banach J. Math. Anal. 10(3), 621–637 (2016)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus, Web of Science** (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 0.833), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet.)

6. Cascales, B., Kadets, V., Guirao, A. J., Soloviova, M.: Γ-flatness and Bishop-Phelps-Bollobás type theorems for operators. J. Funct. Anal. 274(3), 863–888 (2018)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus, Web of Science** (Science Citation Index Expanded, CompuMath Citation Index; Impact Factor 2017: 1.254), Google Scholar, MathSciNet, Zentralblatt MATH.)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Соловьева, М.: О приближении функционалами, достигающими нормы. Сборник тезисов докладов IX международной конференции молодых ученых "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях Харьков, с. 43 (2014)

8. Soloviova, M.: A new estimate for the Bishop-Phelps-Bollobás modulus of a Banach space. In: Book of Abstracts of II International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, pp. 43–44 (2014)

9. Kadets, V., Soloviova, M. Bishop-Phelps-Bollobás theorem for Lipschitz functionals in uniformly convex Banach spaces. In: Book of Abstracts of III International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, p. 24 (2015)

10. Kadets, V., Martin, M., Soloviova, M.: Possible analogues of Bishop-Phelps and Bishop-Phelps-Bollobás theorems for Lipschitz functionals. In: Workshop on

Banach spaces Granada 2015 on the occasion of the 60th birthday of Rafael Paya, Salobrena pp. 10–12 (2015)

11. Kadets, V., Soloviova, M.: Quantitative versions of the Bishop-Phelps-Bollobás theorem. In: Book of Abstracts of International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, p. 30 (2017)

АНОТАЦІЯ

Соловйова М. В. Наближення операторами і функціоналами, що досягають норми. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 "Математичний аналіз". - Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2018.

Дисертаційна робота присвячена наближенню функціоналів та операторів такими функціоналами та операторами, що досягають своєї норми. Теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша дозволяє апроксимувати водночас функціонал та вектор, на якому майже досягається норма. Ми пов'язуємо сферичний модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша з параметром рівномірної неквадратності даного банахового простору. Також ми вводимо два поняття досягнення норми для ліпшицевих функцій и вивчаємо їх властивості.

Властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів має справу з одночасним наближенням оператора T і вектора x, на якому T майже досягає своєї норми, оператором T_0 та вектором x_0 відповідно, такими, що T_0 досягає своєї норми на x_0. Ми поширюємо вже відомі результати про властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів на більш широкий клас банахових просторів. Ми вводимо поняття модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів та вивчаємо можливі оцінки зверху та знизу для випадку, коли Y має властивість β.

Ключові слова: властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, функціонал, що досягає норми, оператор, що досягає норми, ліпшицеві функції, рівномірно опуклий банаховий простір, рівномірно неквадратний банаховий простір, властивість β, асплундовий оператор.

АННОТАЦИЯ

Соловьёва М. В. Приближение операторами и функционалами, которые достигают норми. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, 2018.

Диссертация посвящена приближению функционалов и операторов такими функционалами и операторами, которые достигают своей нормы. Теорема Бишопа-Фелпса-Болобаша позволяет аппроксимировать одновременно функционал и вектор, на котором почти достигается норма.

Недавно Чика, Кадец, Мартин, Морено-Пулидо, Рамбла-Барено в статье "Модули Бишопа-Фелпса-Болобаша банахового пространства"ввели две характеристики, которые измеряют для данного банахового пространства, что является лучшей возможной теоремой Бишопа-Фелпса-Болобаша в этом пространстве. В частности, они доказали, что сферический модуль Φ_X^S не привосходит $\sqrt{2\varepsilon}$ в любом банаховом пространстве. Кроме того, они показали, что необходимым условием для того, чтобы пространство X имело максимальное значение модуля является то, что X содержит почти изометричные копии пространства $\ell_1^{(2)}$.

Мы связываем сферический модуль Бишопа-Фелпса-Болобаша с параметром равномерной неквадратности данного банахового пространства $\alpha(X)$, в частности, получаем более простое, количественное доказательство того факта, что равномерно неквадратные пространства не могут иметь максимальное значение модуля Бишопа-Фелпса-Болобаша. А именно, мы показываем, что $\Phi_X^S(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon} \cdot \sqrt{1 - 1/3\alpha(X)}$ для малых значений ε. Кроме того мы вводим понятие модифицированного модуля Бишопа-Фелпса-Болобаша и исселедуем его свойства. Мы получаем оценку сверху для модифицированного модуля, и показываем, что эта теорема точна для целого семейства двумерных нормированных пространств, что существенно отличается от ситуации с исходной теоремой Бишопа-Фелпса-Боллобаша, где единственное (с точностью до изометрии) двумерное пространство, в котором теорема точна – это $\ell_1^{(2)}$.

Мы вводим два понятия достижения нормы для липшицевых функций. Мы показываем, что подмножество функций, которые достигают нормы в строгом смысле, не является плотным в $\mathrm{Lip}_0(X)$. Мы изучаем более слабую концепцию достижения нормы и показываем, что для равномерно выпуклых пространств X справедлив аналог теоремы Бишопа-Фелпса-Болобаша.

Свойство Бишопа-Фелпса-Болобаша для операторов имеет дело с одновременным приближением оператора T и вектора x, на котором T почти достигает своей нормы, оператором T_0 и вектором x_0 соответственно, такими, что T_0 достигает своей нормы на x_0. Мы распространяем уже известный результат о свойстве Бишопа-Фелпса-Болобаша для асплундовых операторов на более широкий класс банаховых пространств. Мы вводим новое свойство банаховых пространств, которое называем структура ACK_ρ. Мы доказываем общую теорему типа Бишопа-Фелпса-Болобаша для асплундовых операторов, действующих в пространство со структурой ACK_ρ, и показываем, что равномерные алгебры и пространства со свойством β имеют структуру АСК$_\rho$.

Мы вводим понятие модулей Бишопа-Фелпса-Болобаша для операторов и изучаем возможные оценки сверху и снизу для случая, когда Y имеет свойство β.

Ключевые слова: свойство Бишопа-Фелпса-Болобаша, функционал, достигающий нормы, оператор, достигающий нормы, липшицевы функции, равномерно выпуклое банахово пространство, равномерно неквадратное банахово пространство, свойство β, асплундовый оператор.

ABSTRACT

Soloviova M. Approximation by norm attaining functionals and operators. – Qualifying scientific work as a manuscript.

A thesis on the degree of Candidate of Science (PhD) on specialty 01.01.01 "Mathematical analysis". – V.N.Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2018.

The PhD thesis deals with approximation of linear continuous functionals and operators by norm attaining one. The Bishop-Phelps-Bollobás theorem allows to approximate at the same time a functional and a vector in which it almost attains the norm. We relate the modulus of uniform non-squareness with the Bishop-Phelps-Bollobás modulus. Also we introduce two concepts of norm attainment for Lipschitz functionals and study their properties.

The Bishop-Phelps-Bollobás property for operators deals with simultaneous approximation of an operator T and a vector x at which T nearly attains its norm by an operator T_0 and a vector x_0, respectively, such that T_0 attains its norm at x_0. We extend the already known results about the Bishop-Phelps-Bollobás property for Asplund operators to a wider class of Banach spaces. We introduce the Bishop-Phelps-Bollobás moduli for operators and study the possible estimates from above and from below for the case of Y having the property β of Lindenstrauss.

Keywords: Bishop-Phelps-Bollobás property, norm-attaining functional, norm-attaining operator, Lipschitz functional, uniformly convex Banach space, uniformly non-square Banach space, property β, Asplund operator.

Підписано до друку з авторського оригінал-макету 10.07.2018 р.
Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 0,9. Наклад 100 прим. Зам.№ 18352426

Надруковано у копі-центрі “МОДЕЛІСТ”
(ФО-П Миронов М.В., Свідоцтво ВО4№022953)
М. Харків, вул. Мистецтв, 3 літер Б-1
Тел. 7-170-354
www.modelist.in.ua