

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА**

**Поцелуєв Сергій Іванович**

УДК 537.84

**БАГАТОПАРАМЕТРИЧНЕ ЗБУДЖЕННЯ ПОВЕРХНЕВИХ  
І ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ У МАГНІТНИХ РІДИНАХ**

*01.02.05 - механіка рідини, газу та плазми*

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна МОН України, м. Харків.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, доцент  
**Пацегон Микола Федорович**,  
Харківський національний університет  
імені В. Н. Каразіна МОН України,  
професор кафедри прикладної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор  
**Авраменко Ольга Валентинівна**,  
Кіровоградський державний педагогічний  
університету імені Володимира Винниченка  
МОН України (м. Кропивницький),  
завідувач кафедри прикладної математики,  
статистики та економіки;

доктор технічних наук, професор  
**Аврамов Костянтин Віталійович**,  
Інститут проблем машинобудування  
імені А. М. Підгорного НАН України (м. Харків),  
завідувач відділу надійності та динамічної міцності.

Захист дисертації відбудеться 9 червня 2017 р. о 15:15 на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 при Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4, ауд. 6-49.

З дисертацією можна ознайомитися у Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Автореферат розісланий «\_\_» травня 2017 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради

С. Ю. Ігнатович

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Зовнішнє магнітне поле є ефективним засобом впливу на рух намагнічуваних рідин завдяки наявності пондеромоторних сил та енергетичному обміну між полем і рідиною. Магнітні рідини є одним із перших представників нанотехнологічних середовищ. Вони є штучно синтезованими колоїдами, що складаються з ферочасток із характерним лінійним розміром порядку 10 нм, покритих шаром поверхнево-активної речовини, і рідини-носія, вибір якої залежить від практичного призначення. Властивостям ферорідин та їх застосуванню присвячено монографії Р. Розенцвейга (1989); В. Г. Баштового, Б. М. Берковського, А. М. Вісловіча (1985); Е. Я. Блума, М. М. Майорова, А. О. Цеберса (1989); С. Такетомі, С. Тікадзумі (1993); В. М. Полуніна (2012); С. Оденбаха й ін. (2009) та наведена в них бібліографія. Магнітні рідини використовуються у вузлах тертя для герметизації та змащення, у сепараторах кольорових металів, у герметизуючих обладнаннях, в акустичних динаміках для демпфування мембрани, у тепломасообмінниках та в багатьох інших інженерно-технічних пристроях. Проте багато перспективних застосувань ферорідин знаходяться на стадії лабораторних досліджень. Тому для моделювання різних фізичних процесів у системах, що містять намагнічувані рідини, перспективними для розгляду є шари ферорідин, які контактують із твердими, рідкими й газоподібними середовищами. Широко відомий вплив механічних вібрацій на стійкість механічних систем, протікання механічних і тепломасобмінних процесів (В. В. Болотін, 1978). Набагато менше вивчений вплив пондеромоторних сил на параметричну стійкість розв'язків зв'язаних задач електродинаміки та механіки суцільних середовищ.

У зв'язку з поширеністю в техніці періодичних впливів (коливання температури, механічні вібрації, звукові та електромагнітні поля і т.д.), дослідження збудження поверхневих і внутрішніх хвиль у магнітних рідинах при дії нестационарних полів різної природи є актуальною задачею.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана на кафедрі прикладної математики і кафедрі теоретичної та прикладної механіки Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна в межах держбюджетних тем: «Комбінаційні резонанси, біфуркації та параметрична стабілізація в механічних системах» (2012 – 2014 рр., № 0112U001313), «Розробка математичних моделей та чисельно-аналітичних методів дослідження хвильових рухів континуальних систем ускладненої структури» (2015 – 2016 рр., № 0115U000480), «Дослідження якісної поведінки динамічних систем різної природи» (2016 – 2017 рр., № 0116U000823).

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є дослідження умов виникнення поверхневих і внутрішніх хвиль у шарах намагнічуваних рідин, взаємодіючих із зовнішнім магнітним та вібраційним полями. Для досягнення мети в дисертаційній роботі було вирішено наступні задачі:

1. Сформулювати задачу параметричної стійкості необмеженої вільної поверхні шару в'язкої капілярної ферорідини з найбільш загальним ізотропним законом намагнічування при впливі механічних вібрацій та довільно орієнтованого відносно горизонтальної поверхні нестационарного магнітного поля.

2. Описати процедуру побудови областей нестійкості, що відповідають збудженню поверхневих хвиль, у просторі ключових фізичних параметрів розглянутої системи при спільному впливі магнітних та інерційних сил, які змінюються за гармонічними законами з різними амплітудами та частотами.

3. Проаналізувати відмінності між параметричним збудженням хвильових рухів вільної поверхні ферорідини в осцилюючому магнітному полі та при механічних вібраціях. Дослідити спільний вплив цих періодичних збуджуючих сил на виникнення хвиль на вільній поверхні шару намагнічуваної рідини при різній орієнтації нестационарного магнітного поля.

4. Сформулювати задачу стійкості рівноважного стану двошарової систем незмішуваних магнітних рідин, розділених горизонтальною пластиною з отвором. Описати метод побудови границі області стійкості розглянутої системи в стаціонарному вертикальному магнітному полі. Для випадку кругового отвору провести розрахунки границі області стійкості та мод найшвидше зростаючих збурень, що описують початкову стадію еволюції системи в закритичному магнітному полі.

5. Дослідити стійкість поверхні розділу намагнічуваних рідин, розташованих у соленоїді з круглим і прямокутним поперечними перерізами. Провести розрахунки границь областей стійкості у випадку стаціонарного та осцилюючого вертикального магнітного поля. Визначити моди та форми найшвидше зростаючих збурень поверхні.

6. Дослідити можливість виникнення об'ємного параметричного резонансу в намагнічуваних рідинах при періодичній дії нестационарного однорідного магнітного поля.

**Об'єктом дослідження** є гідродинамічні системи, заповнені магнітними рідинами, які мають поверхню розділу або вільну поверхню.

**Предметом дослідження** є виникнення поверхневих та внутрішніх хвиль у шарах ферорідин при впливі різних дестабілізуючих факторів, таких як механічні вібрації, стаціонарні та осцилюючі магнітні поля.

**Методи дослідження.** Для математичного моделювання об'єкта дослідження використовуються рівняння ферогідродинаміки (гідродинаміки неелектропровідних намагнічуваних рідин), методи теорії стійкості розв'язків диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами, чисельні методи лінійної алгебри, аналітичні методи математичної фізики, асимптотичні методи, метод Бубнова-Гальоркіна.

### **Наукова новизна отриманих результатів**

У роботі вперше отримано наступні результати:

– Показано, що магнітне поле, яке складається з постійної та осцилюючої частин, здійснює двочастотний параметричний вплив на стійкість вільної поверхні ферорідини. Додавання стаціонарної компоненти до тільки коливного магнітного поля призводить до виникнення додаткових областей нестійкості. Встановлено, що зміна кута орієнтації магнітного поля відносно горизонтальної вільної поверхні або збільшення стаціонарної складової магнітного поля можуть призводити до виникнення бікритичних точок і переходу від гармонічних до субгармонічних коливань системи.

– Виявлено можливість стабілізації параметричної нестійкості вільної поверхні ферорідини при механічних вібраціях за рахунок накладання нестационарного магнітного поля. У випадку двочастотної параметричної дії проаналізовано вплив від-

ношень амплітуд і частот різних модуляцій на структуру областей нестійкості, перехід від субгармонічних до гармонічних коливань, виникнення додаткових областей нестійкості.

– Для нелінійно намагнічуваної рідини показано можливість збудження параметричної нестійкості вільної поверхні в результаті гармонічного збурення температури за рахунок магнітокалоричного ефекту.

– Запропоновано чисельно-аналітичний метод побудови границі області стійкості для поверхні розділу двошарової системи намагнічуваних рідин, розділених тонкою пластиною з отвором, при впливі вертикального стаціонарного магнітного поля. Для випадку кругового отвору проведені розрахунки границі області стійкості, мод та форм найшвидше зростаючих збурень.

– Для двошарової системи магнітних рідин, розташованих у соленоїді з круглим і прямокутним поперечними перерізами, побудовано границі областей стійкості у вертикальному магнітному полі. Визначено моди найнебезпечніших збурень поверхні розділу для різних значень фізичних параметрів розглянутої системи.

– Обґрунтовано метод збудження ультразвукових хвиль нестационарним магнітним полем у результаті об'ємної параметричної нестійкості. Визначено параметри виникаючих акустичних хвиль, вплив осцилюючої частини магнітного поля на дисперсність звуку та швидкість його поширення.

#### **Практична цінність отриманих результатів.**

На підставі рівнянь ферогідродинаміки запропоновано методи дослідження широкого класу задач стійкості рівноваги вільної поверхні або поверхні розділу намагнічуваних рідин. Отримані результати дослідження умов виникнення поверхневих і внутрішніх хвиль у магнітних рідинах в однорідних нестационарних полях різної природи становлять практичний інтерес у зв'язку з використанням ферорідин у різних магнітооптичних пристроях, газоочисних, тепло- і масообмінних апаратах. Вони можуть знайти застосування при проектуванні відповідного обладнання для оцінки параметрів, які гарантують його надійність та ефективність роботи.

**Особистий внесок здобувача.** У спільних статтях співавторам належать постановки задач, підходи до їх розв'язку та обговорення результатів. Решта результатів отримані автором дисертації самостійно.

#### **Апробація результатів дисертації.**

Результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на: міжнародній конференції «Сучасні проблеми математики і її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (Харків, 17 – 22 квітня 2011 р.), міжнародній школі-конференції «Сучасні проблеми математики, механіки й інформатики» (Харків, 29 вересня – 4 жовтня 2013 р.), міжнародній математичній конференції «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій і математичні методи механіки» (Київ, 23 – 24 квітня 2014 р.), міжнародній конференції «Сучасні проблеми природничих наук» (Харків, 1 – 15 березня 2016 р.), міжнародній конференції «Диференціальні рівняння й теорія керування» (Харків, 26 – 28 вересня 2016 р.), 5-й міжнародній конференції для молодих учених «Диференціальні рівняння і їх застосування» (Київ, 9 – 11 листопада 2016 р.).

**Публікації.** Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в статтях [1 – 7] та в тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях [8 – 16].

**Структура й об'єм дисертації.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел з 107 найменувань на 10 сторінках. Робота включає 25 рисунків, загальний обсяг дисертації 154 сторінки. На захист виносяться результати, які сформульовано в розділах 2, 3 та 4.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

**У вступі** обґрунтовано актуальність досліджуваної проблеми, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і практичне значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

**У першому розділі** проведено аналіз основних результатів досліджень стійкості рівноважних станів рідин, які мають вільну поверхню або поверхню розділу. Виписано основну систему рівнянь ферогідродинаміки ізотропно намагнічуваних середовищ, яка вперше була отримана Й. Л. Нойрінгером та Р. Е. Розенцвейгом (1964), а її узагальнення на випадок середовищ, які нелінійно намагнічуються і поляризуються, а її термодинамічне обґрунтування надав І. Є. Тарапов (1972):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + M \nabla H + \eta \Delta \vec{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v}, \rho T \frac{ds}{dt} = \kappa \Delta T + \tau_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = 0, \vec{B} = \mu(\rho, T, H) \vec{H}, \tau_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ik},$$

де  $\vec{v}$  – швидкість середовища,  $\rho$  – густина,  $p$  – сумарний тиск,  $M$  – намагніченість середовища,  $\mu$  – магнітна проникність,  $\vec{B}$  – магнітна індукція,  $\vec{H}$  – напруженість магнітного поля,  $\eta$  та  $\zeta$  – коефіцієнти зсувної та об'ємної в'язкостей,  $s$  – масова щільність ентропії,  $\kappa$  – коефіцієнт теплопровідності,  $T$  – температура середовища,  $\tau_{ik}$  – компоненти тензора в'язких напружень,  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера. По повторюваних індексах проводиться підсумовування в межах їх зміни.

Сформульовано граничні умови на поверхнях розділу. На основі проведеного аналізу літератури зроблено висновок про недостатньо повне дослідження виникнення поверхневих і внутрішніх хвиль у магнітних рідинах при параметричному впливі. За результатами огляду стану проблеми визначено мету роботи.

**В другому розділі** досліджено задачі параметричної стійкості необмеженої вільної поверхні шарів нелінійно намагнічуваної рідини й динамічної стабілізації поверхневої нестійкості за допомогою осцилюючих магнітних і вібраційного полів.

Розглянуто шар магнітної рідини скінченної глибини  $h$ , розташований на твердій немагнітній пластині й обмежений зверху повітрям, впливом якого на рух рідини нехтуємо (див. рис. 1). Область, яку займає рідина в рівновазі, позначено через  $\Omega_1 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, -h < z < 0\}$ , повітря –  $\Omega_2 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, 0 < z < \infty\}$ , тверда стінка –  $\Omega_3 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, -\infty < z < -h\}$ . Надалі нижні індекси при відповідних величинах позначають області, до яких вони відносяться. Вважається, що рідина перебуває в довільно орієнтованому відносно її вільної горизонтальної пове-

рхні однорідному нестационарному магнітному полі  $\vec{H}(t)$ , а пластина здійснює вертикальні гармонічні коливання з амплітудою  $a_g$  й частотою  $\omega_g$ .

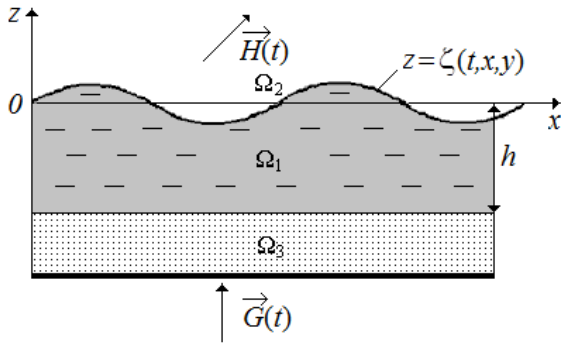


Рис. 1: Шар магнітної рідини з необмеженою вільною поверхнею

Введено неінерціальну систему координат  $(x, y, z)$ , яка поступально рухається у вертикальному напрямі, з початком у точці  $0$  на початково незбуреній поверхні  $z=0$  рідини;  $z = \zeta(t, x, y)$  – рівняння збуреної вільної поверхні. Ферорідина вважається капілярною, в'язкою, нестисливою, нетеплопровідною, і для неї прийнятий загальний ізотропний закон намагнічування  $\mu_1 = \mu(\rho, T, H)$ ,  $\mu_2 = \mu_3 = 1$ . Тоді система рівнянь (1) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} = 0, \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(p_0 + \psi^{(\rho)}) + M\nabla H + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{G}, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = 0, \rho T \frac{ds}{dt} = \tau_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \\ s = s_0 + \frac{1}{\rho} \int_0^H \frac{\partial M}{\partial T} dH = \text{const}, s_0 = c_v \ln T + \text{const}, \psi^{(\rho)} = \int_0^H \left( M - \rho \frac{\partial M}{\partial \rho} \right) dH, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $p_0$  – механічний тиск,  $\psi^{(\rho)}$  – магнітострикційний тиск,  $c_v$  – теплоємність,  $\vec{G}(t) = (-g + \omega_g^2 a_g \cos(\omega_g t)) \vec{e}_z$  – модульоване гравітаційне прискорення, обумовлене механічними вібраціями,  $g$  – гравітаційне прискорення,  $\vec{e}_z$  – одиничний орт осі  $(z)$ .

Система рівнянь (2) доповнюється граничними умовами

$$v_n = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}}, \langle p_{jk} n_k \rangle = 0 (j = \overline{1, 2}), \langle p_{nn} \rangle = -\sigma \operatorname{div} \vec{n} \text{ при } z = \zeta; \quad (3)$$

$$\vec{v} = 0 \text{ при } z = -h; \langle \vec{B} \cdot \vec{n} \rangle = 0, \langle \vec{H} \cdot \vec{\tau} \rangle = 0 \text{ при } z = \zeta, z = -h; \vec{H} = \vec{H}_\infty \text{ при } |z| \rightarrow \infty.$$

Тут  $p_{jk} = -\left( p_0 + \psi^{(\rho)} + \frac{H^2}{8\pi} \right) \delta_{jk} + \frac{H_j B_k}{4\pi} + \tau_{jk}$  – компоненти тензора напружень в'язкої

ферорідини,  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу,  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до вільної поверхні,  $\vec{\tau}_1$  і  $\vec{\tau}_2$  – дотичні вектори до вільної поверхні,  $\langle \dots \rangle$  – стрибок величин, взятих у дужки, на поверхнях розділу.

Задачу сформульовано у термінах потенціалу напруженості магнітного поля  $\Phi$  ( $\vec{H} = \nabla \Phi$ ). Для плоского випадку система рівнянь і граничних умов записана в термінах функції струму. Проведено лінеаризацію системи рівнянь і граничних умов поблизу рівноважного стану ферорідини з горизонтальною вільною поверхнею. Використовуючи метод роботи К. Кумара (1996) з системи рівнянь (2), виключено всі компоненти швидкості рідини, окрім вертикальної  $v_z$ . Таким чином, отримано наступну крайову задачу

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \Delta v_z = 0 \text{ при } -h < z < 0; \Delta \Phi_1 + c_0 \vec{H}_0 \nabla (\vec{H}_0 \nabla \Phi_1) = 0 \text{ в } \Omega_1; \Delta \Phi_j = 0 \text{ в } \Omega_j, j = \overline{2, 3}; \quad (4)$$

$$v_z = 0, \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h; \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z, \eta \left( \Delta_\Gamma - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z = 0 \text{ при } z = 0;$$

$$\Phi_1 = \Phi_3, \quad \mu \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + c_0 H_{0z} (\vec{H}_0 \nabla \Phi_1) = 0 \text{ при } z = -h;$$

$$\mu \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + c_0 H_{0z} (\vec{H}_0 \nabla \Phi_1) = (\vec{H}_0 \nabla \zeta) (\mu - 1) \text{ при } z = 0;$$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = - \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) \zeta \text{ при } z = 0; \nabla \Phi_j = 0, \quad j = 2, 3 \text{ при } |z| \rightarrow \infty;$$

$$\left( \rho \frac{\partial}{\partial t} - \eta \Delta - 2\eta \Delta_\Gamma \right) \frac{\partial v_z}{\partial z} = -(\rho G(t) + \sigma \Delta) \Delta_\Gamma \zeta -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \Delta_\Gamma \left\langle \frac{(\mu - 1)^2}{\mu} H_{0z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \vec{H}_0 \nabla \zeta \right) + \frac{(\mu - 1)(\mu + c_0 H_{0z}^2)}{\mu} (\vec{H}_0 \nabla \Phi) \right\rangle_{z=0} \text{ при } z = 0,$$

$$\text{де } \Delta_\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad c_0 = \frac{4\pi}{\mu H_0^2} \left( \frac{\partial M}{\partial H} - \frac{T}{c_v \rho} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)^2 - \frac{M}{H} \right).$$

Сформульована задача (4) дозволяє дослідити питання параметричної нестійкості вільної поверхні капілярної в'язкої магнітної рідини для випадку нелінійної залежності намагніченості від напруженості поля й температури та довільній орієнтації магнітного поля відносно горизонтальної поверхні рідини.

Розв'язок задачі (4) відшукувався у вигляді

$$v_z(t, x, y, z) = w(t, z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \zeta(t, x, y) = \xi(t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \Phi_j(t, x, y, z) = \psi_j(t, z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad \vec{r} = (x, y),$$

де  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  – хвильове число збурень, які поширюються по вільній поверхні.

Отримано вирази для потенціалу напруженості магнітного поля в кожній з областей.

Нахилене нестационарне магнітне поле задається у вигляді

$$H_{0z} = H_0(t) \sin(\theta), \quad H_\tau = H_0(t) \cos(\theta), \quad H_0(t) = H_{00} + m_H \cos(\omega_H t),$$

де  $\theta$  – кут орієнтації магнітного поля,  $H_{0z}$  і  $H_\tau = (\vec{H}_0 \cdot \vec{k})/k$  – вертикальна і ефекти-

вна горизонтальна компоненти напруженості магнітного поля. Якщо частоти механічних вібрацій  $\omega_g$  і осцилюючого магнітного поля  $\omega_H$  задовольняють умові

$\omega_g = n_g \omega$ ,  $\omega_H = n_H \omega$ , де  $n_g, n_H$  – цілі числа, тоді права частина останнього рівняння системи (4) буде періодичною функцією з періодом  $2\pi/\omega$ . Отже, збурення  $w$  й  $\xi$  можуть бути представлені у формі Флоке:

$$w(t, z) = e^{\gamma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(z) e^{in\omega t}, \quad \xi(t) = e^{\gamma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{in\omega t}, \quad \text{де } \gamma = s + i\alpha \text{ показник Флоке.}$$

Для глибокого шару нелінійно намагнічуваної рідини отримано рівняння:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{[s+i(\alpha+n)\omega]t} \left( \nu^2 [-4k^3 q_n + (k^2 + q_n^2)^2] + \frac{\sigma k^3}{\rho} - G(t)k - \right) \quad (5)$$



$$\frac{k^2(\mu-1)^2 H_{0z}(t)^2 \sqrt{1+c_{1\infty}} - H_\tau(t)^2 \mu}{4\pi\mu (1+\mu\sqrt{1+c_{1\infty}})} = 0, \quad c_{1\infty} = \frac{4\pi}{\mu_\infty} \left( \frac{\partial M}{\partial H} - \frac{T}{c_v \rho} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)^2 - \frac{M}{H} \right)_\infty,$$

де  $\nu$  - кінематична в'язкість,  $q_n^2 = k^2 - (s + i(\alpha + n)\omega) / \nu$ . Для випадку лінійного намагнічування для шару ферорідини товщини  $h$  отримано співвідношення

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{[s+i(\alpha+n)\omega]t} \left[ \frac{(\mu-1)^2 k^2 H_0^2(t)}{4\pi((\mu^2+1)\text{th}(kh) + 2\mu)} \left[ \cos^2(\theta)(\text{th}(kh) + \mu) - \sin^2(\theta) \left( \text{th}(kh) + \frac{1}{\mu} \right) \right] + \frac{\nu^2}{q_n \text{cth}(q_n h) - k \text{cth}(kh)} \left\{ k(4q_n^2 k^2 + (q_n^2 + k^2)^2) - \right. \right. \quad (6)$$

$$\left. \left. -q_n \left[ 4k^4 + (q_n^2 + k^2)^2 \right] \text{cth}(q_n h) \text{cth}(kh) + \frac{4q_n k^2 (q_n^2 + k^2)}{\text{sh}(q_n h) \text{sh}(kh)} \right\} - \rho G(t)k + \sigma k^3 \right] = 0.$$

Оскільки коефіцієнти рядів Фур'є (5), (6) дорівнюють нулю, то, підставивши вирази для  $H_0(t)$  та  $G(t)$ , отримано рекурентні співвідношення для невідомих коефіцієнтів  $\xi_n$ , які можна записати у матричному вигляді.

$$(m_H^2 A + m_H B + a_g C + D) \xi = 0, \quad \xi = (\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots)^T \quad (7)$$

де  $D$  - діагональна матриця безкінечного порядку з комплексними коефіцієнтами,  $B$  й  $C$  - дводіагональна матриця,  $A$  - тридіагональна матриця. Номери ненульових діагоналей матриць  $A, B$  і  $C$  залежать від співвідношення частот механічних вібрацій та осцилюючого магнітного поля.

З рівняння для квадратичного пучка матриць (7) отримано лінійну алгебраїчну задачу на власні значення

$$-(m_H^2 A + m_H B + D)^{-1} C \xi = \frac{1}{a_g} \xi \quad \text{або} \quad \begin{pmatrix} -A^{-1}B & -A^{-1}(a_g C + D) \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix} = m_H \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \zeta := m_H \xi, \quad (8)$$

де  $I$  - одинична матриця, а в якості спектрального параметра може виступати або амплітуда механічних вібрацій, або амплітуда осциляцій магнітного поля.

Розглянуто окремі випадки зовнішніх періодичних впливів. При проведенні чисельних розрахунків матриць  $A, B, C$  і  $D$  (які залежать від параметрів системи) обрізувались до розмірів, що забезпечували необхідну точність обчислень. Показник Флоке  $\gamma = s + i\alpha$  фіксувався на значеннях  $s = 0$  і  $\alpha = 0$  ( $\alpha = 1/2$ ), що відповідають випадку гармонічних (субгармонічних) коливань. При зміні параметра  $k$  розв'язувалась алгебраїчна спектральна задача (8) і визначались дійсні власні значення, які відповідають найменшій амплітуді параметричного збудження. Таким чином, у площині  $(k, m_H)$  або  $(k, a_g)$  будувалися нейтральні криві стійкості, які утворюють області ("язики"); значення параметрів поза (всередині) цих областей відповідають стійкості (нестійкості). Абсолютному мінімуму на перехідних кривих відповідають критична амплітуда параметричного збудження й критичне хвильове число  $k_c$ , при яких настає нестійкість і виникають поверхневі хвилі. Розрахунки проводились при  $\nu = 0.1(\text{П}), \mu = 5, \sigma = 30 \left( \frac{\text{срг}}{\text{см}^2} \right), \rho = 1 \left( \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right), \omega = 50(\text{Гц}), \theta = 0, h = \infty.$

Нейтральні криві стійкості в магнітному полі, яке складається зі стаціонарної вертикальної та осцилюючої горизонтальної частин, зображені на рис 2.a). Причому вертикальна компонента поля перевищує критичне поле Розенцвейга для глибокого шару ферорідини:

$$H_{0z}^2 > H_R^2 = 8\pi\sqrt{\sigma\rho g\mu(\mu+1)}/(\mu-1)^2$$

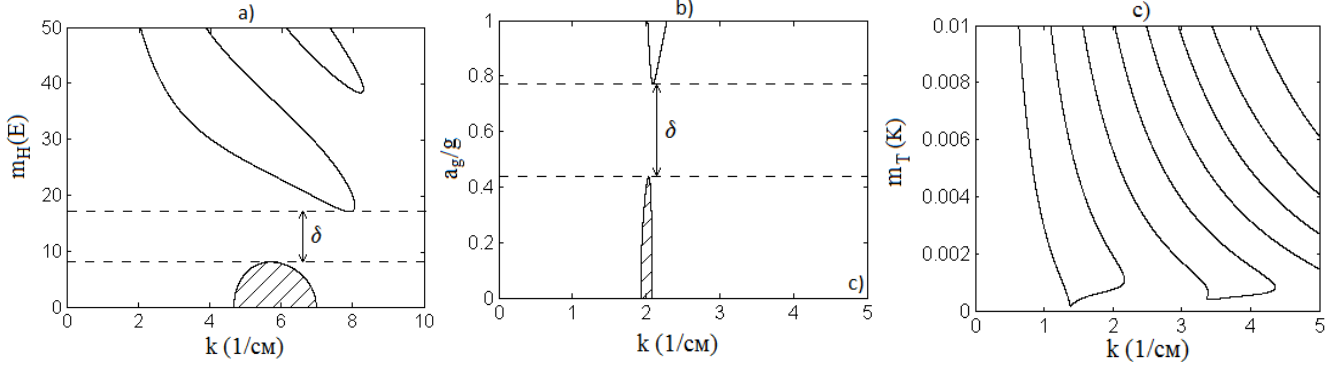


Рис. 2: Перехідні криві стійкості для значення параметрів а)  $H_{0z} = 1.01H_R, T = const$ , б)  $n_g = n_H = 1, m_H = 1.5m_{Hc}, T = const$ , в)  $H_{00} = 100(E), T = T_0 + m_T \cos(\omega t)$ .

Заштрихована область рис. 2.a) відповідає нестійкості Розенцвейга в нормальному полі, а незаштриховані язички – магнітній нестійкості Фарадея. Однак існує область ширини  $\delta$  значень параметрів системи, в якій усі хвильові числа належать області стійкості. Таким чином, має місце механізм параметричної стабілізації нестійкості Розенцвейга за рахунок осциляцій магнітного поля. Підвищення порогу виникнення нестійкості Розенцвейга за рахунок механічних вібрацій шару було виявлено в роботі Х. В. Мюллера (1998).

Перехідні криві стійкості при спільній дії механічних вібрацій і осцилюючого горизонтального магнітного поля, частоти яких співпадають, зображені на рис. 2.b). Амплітуда коливань горизонтального магнітного поля перевищує критичне значення  $m_{Hc} = 64\pi\eta n_H \omega(\mu+1)/(\mu-1)^2$ , при якому збуджується магнітна нестійкість Фарадея, якій відповідає заштрихована область рис. 2.b), а незаштрихований "язик" – перша область параметричної нестійкості при механічних вібраціях. Область стійкості ширини  $\delta$  відображає механізм параметричної стабілізації при спільній дії вібрацій і коливань магнітного поля з однаковою частотою. При пропорційному відношенні частот параметричних дій цей ефект проявляється значно слабше.

На рис. 2.c) показано принципову можливість збудження параметричної нестійкості вільної поверхні намагнічуваної рідини в результаті гармонічного збурення її температури за рахунок магнітокалоричного ефекту. При адіабатичності руху в результаті коливань температури виникають осциляції магнітного поля, які можуть призводити до збудження параметричної нестійкості.

У випадку ідеальної рідини задача параметричної стійкості сформульована в термінах потенціалів швидкості та напруженості магнітного поля. Узагальнено інтеграл Коші – Лагранжа при врахуванні магнітокалоричного ефекту. В лінійному наближенні задача зведена до дослідження рівняння Мат'є-Хілла для амплітуди збурень вільної поверхні магнітної рідини.

У третьому розділі розглянуто двошарову систему незмішуваних ферорідин, розташованих у соленоїді з ідеально провідною боковою стінкою  $S$ . Намагнічувані рідини обмежені зверху й знизу горизонтальними твердими поверхнями (див. рис. 3). Вважається, що рідини перебувають під дією сил поверхневого натягу, гравітаційного поля та магнітного поля, яке спрямоване вертикально вгору.

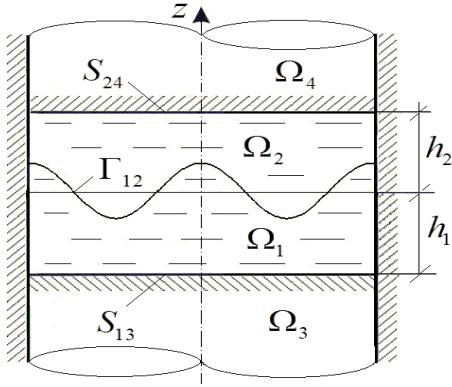


Рис. 3: Двошарова система ферорідин в соленоїді

Через  $\Omega_1, \Omega_2$  позначено області, які займають нижня й верхня рідини у стані рівноваги, через  $\Omega_3, \Omega_4$  – напівнескінченні області, що примикають до  $\Omega_1, \Omega_2$  знизу і зверху відповідно. Середовища в кожній з областей  $\Omega_k, k \in \overline{1,4}$  вважаються неелектропровідними, а намагнічувані рідини нев'язкими. Індукція  $\vec{B}$  і напруженість  $\vec{H}$  магнітного поля в  $\Omega_k, k = \overline{1,4}$  зв'язані співвідношенням (у системі одиниць СІ):  $\vec{B}^{(k)} = \mu_0 \mu_k (H^{(k)}) \vec{H}^{(k)}, k \in \overline{1,4}$ , де  $\mu_0$  – абсолютна магнітна проникність вакууму,  $\mu_k$  – відносна магнітна проникність  $k$ -го середовища.

Надалі верхній індекс у круглих дужках означає номер області, до якої відноситься та або інша фізична величина.

Окремо розглянуто малі коливання нев'язких магнітних рідин поблизу рівноважного стану в стаціонарному магнітному полі  $B_0$  при відсутності механічних вібрацій. У цьому випадку малі збурення рівноважного стану і подальшу еволюцію поверхні розділу  $\Gamma$  визначають потенціальні складові поля швидкості рідини  $\vec{v}^{(k)} = \nabla(\partial\varphi^{(k)} / \partial t), k = 1, 2$ , де  $\varphi^{(k)}(t, \vec{x})$  – потенціал малих зміщень часток  $k$ -ї рідини. Позначимо через  $\zeta(t, x, y)$  відхилення поверхні  $\Gamma$  від горизонтального рівня, через  $\psi^{(k)}(t, \vec{x}), k = \overline{1,4}$  – збурення потенціалу магнітного поля в області  $\Omega_k$ . У лінійному наближенні рух рідин поблизу рівноважного стану описується наступною системою рівнянь (відносно  $\varphi, \zeta, \psi$ ):

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^{(k)}(t, \vec{x}) &= 0 \quad \text{в } \Omega_k, k = 1, 2; \quad \frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial z} = \zeta \quad \text{на } \Gamma, k = 1, 2; \quad (9) \\ \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial n_s} &= 0 \quad \text{на } S \cup S_{13}, \quad \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial n_s} = 0 \quad \text{на } S \cup S_{24}; \quad \frac{\partial\zeta}{\partial n_s} = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma; \\ \rho_1 \frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2\varphi^{(2)}}{\partial t^2} + \sigma(-\Delta_\Gamma + b)\zeta - B_0 \left( q_1 \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z} - q_2 \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z} \right) &= c_\Gamma(t) \quad \text{на } \Gamma; \\ \operatorname{div} \mu_k \widehat{\nabla}^{(k)} \psi^{(k)} &= 0, \quad \text{в } \Omega_k, \quad k \in \overline{1,4}; \quad \psi^{(1)} - \psi^{(2)} = (H_0^{(1)} - H_0^{(2)})\zeta \quad \text{на } \Gamma, \\ \psi^{(j)} &= \psi^{(k)}, \quad \mu_j q_j \frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial z} = \mu_k q_k \frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial z} \quad \text{на } S_{jk}, \quad jk = 13, 24; \\ \mu_1 q_1 \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z} &= \mu_2 q_2 \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z} \quad \text{на } \Gamma; \quad \frac{\partial\psi^{(m)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S, m = \overline{1,4}; \end{aligned}$$

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty; \quad \zeta|_{t=0} = \zeta^0(x, y), \quad \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{t=0} = \zeta^1(x, y) \quad \text{на} \Gamma;$$

$$b := \frac{(\rho_1 - \rho_2) \mathbf{g}}{\sigma}, \quad \widehat{\nabla}^{(k)}(\cdot) := \nabla(\cdot) + \frac{\mu_H^{(k)}}{\mu_k} \vec{H}_0^{(k)} \frac{\partial(\cdot)}{\partial z},$$

$$q_k := 1 + \frac{\mu_H^{(k)} H_0^{(k)}}{\mu_k}, \quad \mu_k := \mu^{(k)}(H_0^{(k)}), \quad \mu_H^{(k)} := \left( \frac{d\mu^{(k)}}{dH} \right) \Big|_{H=H_0^{(k)}}, \quad k \in \overline{1, 4}.$$

Тут  $H_0^{(k)}$  – напруженість магнітного поля в області  $\Omega_k$  в стані рівноваги;  $S_{jk}$  – тверда поверхня розділу  $j$ -ої та  $k$ -ої областей;  $\Delta_\Gamma$  – оператор Лапласа на  $\Gamma$ ;  $\zeta^0, \zeta^1$  – початкові відхилення й швидкості точок поверхні розділу рідин.

Власні коливання рідин описуються розв'язками задачі (9), які залежать від часу по закону  $(\zeta, \varphi, \psi) = (u(x, y), \varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})) \exp(i\omega t)$ . Підставивши ці розв'язки в систему рівнянь і граничних умов (9), одержимо спектральну крайову задачу. Отримано розв'язки (тобто, власні значення  $\lambda_n := \omega_n^2$  і власні функції  $u_n(x, y)$ ,  $\varphi_n(\vec{x})$ ,  $\psi_n(\vec{x})$ ) цієї задачі):

$$\bar{\lambda}_n = \frac{k_n^3 - Wk_n^2 + \text{Bo}k_n}{\text{cth}(k_n h_1) + (\rho_2 / \rho_1) \text{cth}(k_n h_2)}, \quad n = 1, 2, \dots \left( \bar{\lambda}_n := \omega_n^2 \frac{\rho_1 L^3}{\sigma} \right), \quad (10)$$

$$\varphi_n^{(1)} = \frac{\text{ch}(k_n(h_1 + z)/L)}{k_n \text{sh}(k_n h_1)} u_n(x, y), \quad \varphi_n^{(2)} = -\frac{\text{ch}(k_n(h_1 - z)/L)}{k_n \text{sh}(k_n h_2)} u_n(x, y),$$

$$\psi_n^{(1)} = A_1 \left[ \text{ch} \frac{k_n(h_1 + z)}{L\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_3 \sqrt{q_3}}{\mu_1 \sqrt{q_1}} \text{sh} \frac{k_n(h_1 + z)}{L\sqrt{q_1}} \right] u_n(x, y), \quad \psi_n^{(3)} = A_1 \exp \frac{k_n(h_1 + z)}{L\sqrt{q_3}} u_n(x, y),$$

$$\psi_n^{(2)} = A_2 \left[ \text{ch} \frac{k_n(h_2 - z)}{L\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_4 \sqrt{q_4}}{\mu_2 \sqrt{q_2}} \text{sh} \frac{k_n(h_2 - z)}{L\sqrt{q_2}} \right] u_n(x, y), \quad \psi_n^{(4)} = A_2 \exp \frac{k_n(h_2 - z)}{L\sqrt{q_4}} u_n(x, y),$$

$$A_1 := -\frac{B_0(\mu_1 - \mu_2)\sqrt{q_2} S_1}{\mu_0 \mu_1 D}, \quad A_2 := \frac{B_0(\mu_1 - \mu_2)\sqrt{q_1} S_2}{\mu_0 \mu_2 D}, \quad D := \mu_1 \sqrt{q_1} S_1 C_2 + \mu_2 \sqrt{q_2} S_2 C_1,$$

$$S_1 := \text{sh} \left( \frac{k_n h_1}{L\sqrt{q_1}} \right) + \frac{\mu_3 \sqrt{q_3}}{\mu_1 \sqrt{q_1}} \text{ch} \left( \frac{k_n h_1}{L\sqrt{q_1}} \right), \quad S_2 := \text{sh} \left( \frac{k_n h_2}{L\sqrt{q_2}} \right) + \frac{\mu_4 \sqrt{q_4}}{\mu_1 \sqrt{q_4}} \text{ch} \left( \frac{k_n h_2}{L\sqrt{q_2}} \right),$$

$$C_1 := \text{ch} \left( \frac{k_n h_1}{L\sqrt{q_1}} \right) + \frac{\mu_3 \sqrt{q_3}}{\mu_1 \sqrt{q_1}} \text{sh} \left( \frac{k_n h_1}{L\sqrt{q_1}} \right), \quad C_2 := \text{ch} \left( \frac{k_n h_2}{L\sqrt{q_2}} \right) + \frac{\mu_4 \sqrt{q_4}}{\mu_2 \sqrt{q_2}} \text{sh} \left( \frac{k_n h_2}{L\sqrt{q_2}} \right).$$

$$\text{Bo} := \frac{g(\rho_1 - \rho_2)L^2}{\sigma}, \quad W = \frac{B_0^2(\mu_1 - \mu_2)^2 L \sqrt{q_1 q_2} S_1 S_2}{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \sigma D}$$

Тут  $h_i$  – товщина  $i$ -го шару рідини,  $k_n$  – безрозмірні хвильові числа,  $u_n(x, y)$  – власні моди коливань поверхні розділу рідин (функції  $u_n(x, y)$  і хвильові числа  $k_n$  уточнюються нижче),  $L$  – характерний лінійний розмір. Безрозмірні параметри  $\text{Bo}$  (чис-

ло Бонда) і  $W$  характеризують відношення сил, обумовлених гравітаційним і магнітним полями, до капілярних сил, відповідно.

Умова нестійкості плоскої вільної поверхні магнітної рідини має вигляд:

$$W > W^* = \min_j \left( k_j + \frac{Bo}{k_j} \right) \text{ умова нестійкості} \quad (11)$$

Розглянуто процеси виникнення і зростання впорядкованих структур вільної поверхні магнітної рідини на прикладі циліндра з прямокутним поперечним перерізом. Горизонтальні осі координат  $Ox, Oy$  спрямовано вздовж бічних граней циліндра. Через  $L_x, L_y$  позначено розміри перерізу в напрямку осей  $Ox, Oy$ , відповідно. Характерний лінійний розмір вибрано у вигляді  $L = (L_x L_y)^{1/2}$ . У цьому випадку моди власних коливань рідини  $u_j$  і хвильові числа  $k_j$  мають вид:

$$u_j = a_j \cos \frac{m_j \pi x}{L_x} \cos \frac{n_j \pi y}{L_y}, \quad k_j := \pi \left( m_j^2 \kappa_L + n_j^2 / \kappa_L \right)^{1/2}, \quad m_j, n_j = 0, 1, 2, \dots, m_j + n_j > 0, \quad (12)$$

де  $a_j$  - амплітудні множники,  $\kappa_L = L_y / L_x$  - відношення сторін поперечного перерізу.

Границя області стійкості в просторі безрозмірних параметрів  $Bo, W, \kappa_L$  визначається рівнянням:

$$W = W^*(Bo, \kappa_L) := k_j + \frac{Bo}{k_j} \quad (k_{j-1} k_j \leq Bo \leq k_j k_{j+1}), j = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

У (11) вважається, що усі хвильові числа  $k_j$ , доповненні числом  $k_0 \equiv 0$ , розташовані в порядку зростання. У випадку лінійного намагнічування ( $\mu_1 = \text{const}$ ,  $\mu_j = 1, j = \overline{2, 4}$ ) графік залежності  $W = W^*(Bo)$  при  $\kappa_L = 3/4, h_1 = \infty$  показаний на рис. 4.а). Пунктирні лінії в області нестійкості виділяють зони, у межах яких найбільш швидко зростаючим модам збурень  $u_j(x, y)$  відповідають певні номери  $(m_j, n_j)$ . Саме ці моди дають наочне уявлення про структуру вільної поверхні, яка виникає в закритичній області значень параметра  $W > W^*$ . При цьому вважається, що індукція магнітного поля  $B_0$  приймає закритичні значення за час значно менший характерного часу гідродинамічних процесів.

Встановлено, що вплив параметра  $\kappa_L$  на критичні значення  $W^*(Bo, \kappa_L)$  суттєвий для порівняно невеликих значень числа Бонда  $Bo$ . При зростанні  $Bo$  критичні значення  $W^*$  для різних  $\kappa_L$  практично збігаються. При певних значеннях параметрів  $\kappa_L, Bo$  можуть виникати одномірні структури у вигляді гофрованої вільної поверхні, яка відповідає модам збурень із номерами  $m_j > 0, n_j = 0$  або  $m_j = 0, n_j > 0$ . Зростання  $Bo$  супроводжується збільшенням цілочислових параметрів  $m_j, n_j$ , що відповідають найбільш швидко зростаючим модам збурень. Це призводить до збільшення хвильових чисел  $k_j$  і до зменшення внутрішніх масштабів (тобто відстаней між сусідніми піками й впадинами) структур, що виникають на вільній поверхні рідини в закритичній області значень параметрів.

Для кругового циліндра умова стійкості рівноваги має такий же вигляд (11), що й для циліндра з прямокутним поперечним перерізом. Моді збурень у цьому випадку в циліндричній системі координат  $r, \vartheta, z$  мають вигляд:

$$u_j = a_j J_{m_j} (k_{m_j n_j} r / R) \begin{cases} \cos(m_j \vartheta), \\ \sin(m_j \vartheta), \end{cases} m_j = 0, 1, 2, \dots, n_j = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Тут  $J_m(\cdot)$  – функція Бесселя 1-го роду  $m$ -го порядку,  $k_{mn} - n$  - й ненульовий корінь рівняння  $J'_m(k) = 0$ ,  $R$  – радіус циліндра ( $L = R$ ). Результати розрахунків границі області стійкості й номерів найбільш швидко зростаючих мод збурень при  $h_1 = \infty$  для кругового циліндра наведені на рис. 4.б).

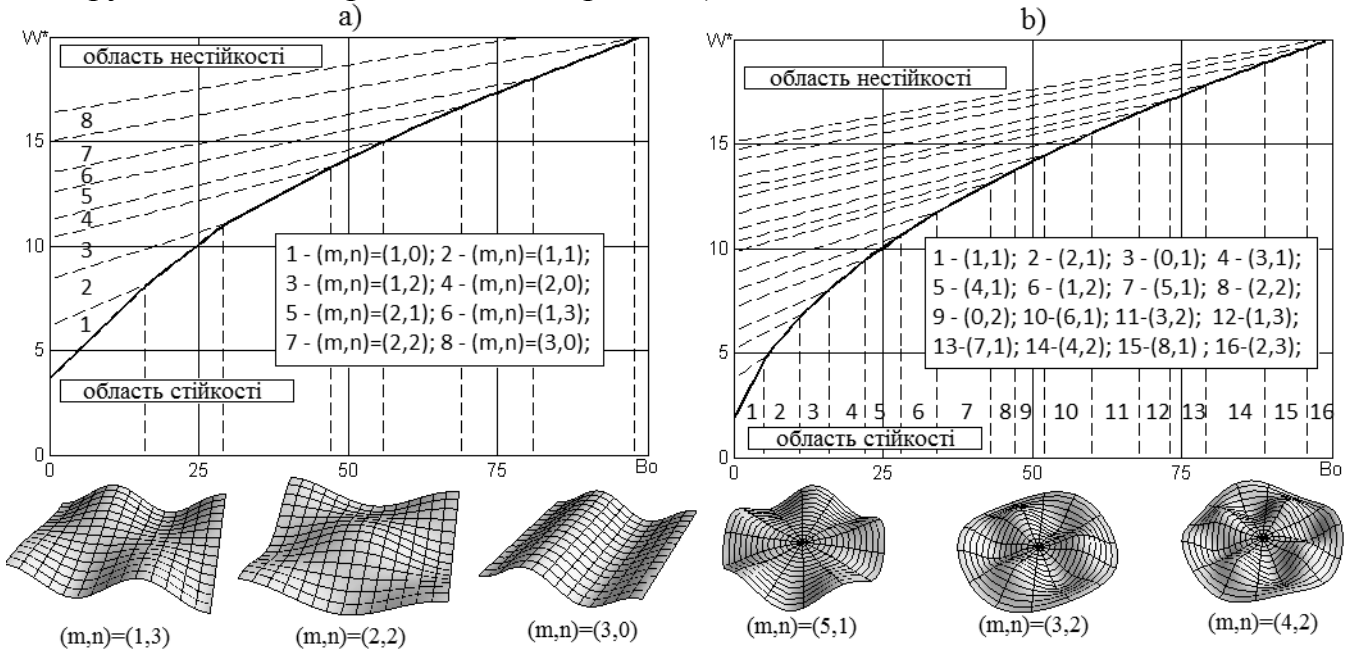


Рис. 4: Границі областей стійкості та форми найбільш швидко зростаючих збурень вільної поверхні а) для циліндру з прямокутним поперечним перерізом б) для кругового циліндра

Критична індукція магнітного поля  $B^*$  й номери мод найнебезпечніших збурень  $m_j, n_j$  визначаються по значенням  $W^*$ . Вплив бічних стінок соленоїда є суттєвим для порівняно невеликих значень числа Бонда  $Bo$ . Зі збільшенням  $Bo$  критичні значення індукції магнітного поля наближаються до значень, що відповідають випадку необмеженої вільної поверхні рідини.

Виписано умову стійкості (нестійкості) рівноважного стану рідини, яка намагнічується за законом Ланжевена. Показано, що зростання індукції  $B_0$  неминує призводити до виникнення від'ємних власних значень, а отже, до нестійкості рівноважного стану рідин. У випадку кругового циліндра побудовано границю областей стійкості рівноваги в просторі  $(Bo, \bar{B})$ , де  $\bar{B}$  - безрозмірна індукція, для різних значень інших параметрів системи.

Розглянуто систему незмішуваних магнітних рідин, розділених горизонтальною пластиною з отвором (рис. 5), які знаходяться у стаціонарному вертикальному магнітному полі. Товщина пластини  $\delta$ , що розділяє рідини, вважається малою в по-

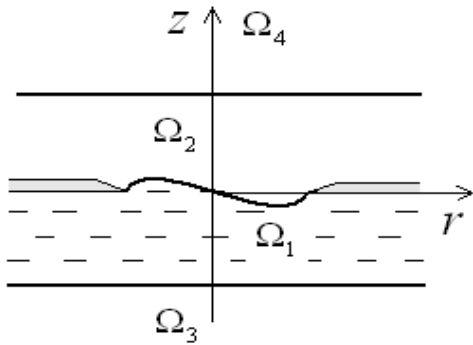


Рис. 5: Схема двошарової системи незмішуваних ферорідин

$\zeta = 0$  на  $\partial\Gamma$ , яка означає, що контур  $\partial\Gamma$ , що збігається з гострим краєм пластини, у процесі коливаний рідин залишається нерухомим. Ця умова підтверджується експериментально для досить малих зовнішніх збурень. Інші рівняння і умови на поверхнях розділу аналогічні системі (9).

Докладно розглянуто випадок кругового отвору. За допомогою перетворень Ганкеля задачу про власні коливання рідин зведено до інтегро-диференціального рівняння зі спектральним параметром відносно мод коливаний поверхні розділу рідин  $\zeta(r, \vartheta)$  ( $r, \vartheta$  – циліндричні координати). Розв'язки отриманої спектральної задачі розшукувались з використанням методу Гальоркіна. Функції  $\zeta(r, \vartheta)$  представлялись

при цьому у вигляді:  $\zeta(r, \vartheta) = \sum_{n,j=1}^N a_{nj} J_n(k_{nj} r / R) \cos(n\vartheta)$ , де  $J_n(\cdot)$  – функція Бесселя 1-го роду  $n$ -го порядку,  $k_{nj}$  – додатні корені рівняння  $J_n(k_{nj}) = 0$ . Запропоновано метод побудови границі області стійкості в просторі фізичних параметрів системи. У випадку рідини, намагнічуваної за законом Ланжевена, проведено розрахунок границі області стійкості, визначено моди найшвидше зростаючих збурень. Встановлено, що при невеликих значеннях числа Бонда  $Bo$  найнебезпечнішими є вісесиметричні збурення ( $n = 0$ ), або збурення по першій ( $n = 1$ ), або другій ( $n = 2$ ) гармоніках. У певному діапазоні значень числа Бонда рівною мірою можуть бути небезпечними вісесиметричні збурення і збурення по другій гармоніці, це пояснюється збігом спектрів власних значень задачі при  $n = 0$  й  $n = 2$ . З ростом значень числа Бонда при фіксованих значеннях інших параметрів зростають критичні значення індукції магнітного поля  $\bar{B}^*$ , при цьому  $\bar{B}^*$  асимптотично зростає як  $Bo^{1/2}$ .

Розглянуто параметричне збудження хвиль на поверхні розділу рідин, розташованих у циліндричному соленоїді (див. рис. 3). У випадку нестационарного магнітного поля в системі (9) замість  $B_0 = const$  слід покласти  $B(t) = B_0 + \beta \cos(\omega_0 t)$ , де  $\beta$  та  $\omega_0$  – амплітуда та частота осциляцій магнітного поля, а для випадку механічних вібрацій до сили тяжіння  $g$  додати переносні сили інерції ( $G(t) = -g + \omega_g^2 a_g \cos(\omega_g t)$ ). Розв'язок задачі у випадку лінійного намагнічування ( $\mu_1 = const, \mu_j = 1, j = \overline{2,4}$ ) відшукувався у вигляді

рівнянні з товщиною  $h_1$  нижнього й  $h_2$  верхнього шарів рідин. Це дозволяє ототожнювати пластину з її серединною поверхнею, вважаючи  $\delta = 0$ . Середовища в кожній з областей  $\Omega_k, k \in \overline{1,4}$  вважаються однорідно намагнічуваними. Горизонтальна поверхня розділу  $z = 0$  й однорідне магнітне поле відповідають одному з можливих станів рівноваги рідин. Для описання руху рідин поблизу цього рівноважного стану в системі рівнянь (9) замість умови збереження кута змочування бічної стінки соленоїда на  $\partial\Gamma$  слід прийняти умову

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) u_n(x, y), \quad \varphi^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varphi_n^{(k)}(\bar{x}), \quad k = 1, 2, \quad \psi^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \psi_n^{(k)}(\bar{x}), \quad k = 1, 4,$$

Функції  $u_n(x, y), \varphi_n^{(k)}(\bar{x}), \psi_n^{(k)}(\bar{x})$  співпадають з виразами, наведеними у (10), у випадку лінійного намагнічування. Для коефіцієнтів  $c_n(t)$  отримано однотипні диференціальні рівняння.

$$\frac{d^2 c_n}{dt^2} + [p_0 + p_1 \cos(\omega_0 t) + p_2 \cos(2\omega_0 t) + p_3 \cos(\omega_g t)] c_n = 0, \quad (15)$$

$$p_0 := \frac{1}{A} \left[ \sigma k_n^3 + (\rho_1 - \rho_2) g k_n \right] - \left( B_0^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 S_1 S_2 k_n^2}{\mu_0 \mu_1 \mu_2 A D},$$

$$p_1 := -\frac{2\beta B_0 (\mu_1 - \mu_2)^2 S_1 S_2 k_n^2}{\mu_0 \mu_1 \mu_2 A D}, \quad p_2 := -\frac{\beta^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 S_1 S_2 k_n^2}{2\mu_0 \mu_1 \mu_2 A D},$$

$$p_3 := -\frac{(\rho_1 - \rho_2) \omega_e^2 a_e k_n}{A}, \quad A := \rho_1 (k_n h_1) + \rho_2 (k_n h_2).$$

Рівняння (15) для кожної моди коливань є рівнянням Мат'є – Хілла, якщо відношення амплітуд механічних вібрацій  $\omega_g$  та осцилюючого магнітного поля  $\omega_0$  - раціональне число. Дослідження цього звичайного диференціального рівняння другого порядку з періодичними коефіцієнтами проведено стандартними методами.

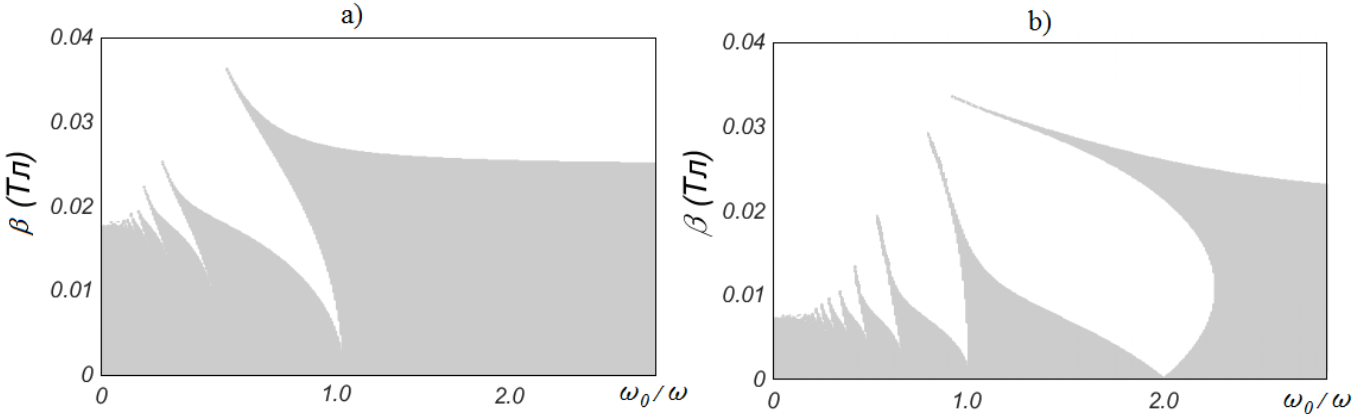


Рис. 6: Области параметричної нестійкості для кругового циліндра

a)  $B_0 = 0$ , b)  $B_0 = 0.005$  (Тл)

Незафарбовані "язики" на діаграмах стійкості відповідають збудженню поверхневих хвиль нестационарним магнітним полем. Для тільки осцилюючого магнітного поля найширша область параметричної нестійкості відповідає гармонічним коливанням (див рис. 6.a), тоді як додавання стаціонарної компоненти поля призводить до виникнення області субгармонічної нестійкості (рис. 6.b).

У четвертому розділі досліджено виникнення об'ємного параметричного резонансу в намагнічуваних середовищах. Розглянуто одномірні нестационарні рухи намагнічуваного середовища уздовж осі (x):  $v_x = v, v_y \equiv 0, v_z \equiv 0$ , причому  $v = v(x, t), \rho = \rho(x, t), T = T(x, t), \vec{H} = \vec{H}(x, t), B_x(t) = \chi_1(t), H_y(t) = \chi_2(t), H_z(t) = \chi_3(t)$ , де функції  $\chi_i(t), i = \overline{1, 3}$  вважаються заданими.



Показано, що рівняння руху ідеальної ферорідини, або в'язкої ферорідини у відсутності теплопровідності (1) приводяться до виду рівнянь одномірної газової динаміки зі спеціальними рівняннями стану:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x} + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \rho T \frac{ds}{dt} = \tau_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad (16)$$

а рівняння зміни енергії має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_e + \rho \frac{v^2}{2}) = -\frac{\partial}{\partial x_k}[\rho v(u_e + \frac{p_e}{\rho} + \frac{v^2}{2}) - v_i \tau_{ik}] + \rho q.$$

Тут введені позначення:

$$p_e = p - \frac{\chi_1^2}{4\pi\mu}, \quad u_e = u - \frac{\mu}{4\pi\rho}(\chi_2^2 + \chi_3^2), \quad \rho q = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{d}{dt} \chi_1^2 - \frac{\mu}{8\pi} \frac{d}{dt}(\chi_2^2 + \chi_3^2), \quad (17)$$

де  $u$  - масова щільність внутрішньої енергії; величину  $q \neq 0$  можна інтерпретувати як масову щільність джерел енергії в середовищі. Немагнітне середовище, яке описується рівняннями стану (17), надалі називається ефективним немагнітним середовищем, що відповідає вихідному намагнічуваному середовищу.

При змінних параметрах  $\chi_i = \chi_i(t)$  рівняння (16) допускають стаціонарний однорідний розв'язок  $\rho \equiv \rho_0, v = v_0 \equiv 0, s \equiv s_0 = const$ , При цьому в ефективне середовище надходить енергія відповідно до рівняння  $\frac{\partial u_e}{\partial t} = q(t)$ . Розв'язок системи (16) для нетеплопровідного середовища ( $\kappa = 0$ ) відшукувався у вигляді:

$\rho = \rho_0 + \rho'(x, t), v = v'(x, t)$ , де штрихом позначені збурення параметрів. Для потенціалу швидкості ( $v' = \partial \phi / \partial x$ ) отримано рівняння:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + v_0 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t} - \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + v_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right] \frac{d}{dt}(\ln a^2) = 0, \quad v_0 = \frac{1}{\rho_0} \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right). \quad (18)$$

Відшуковуючи розв'язок рівняння (18) у вигляді  $\phi(x, t) = \phi(t) \exp(ikx)$ , для амплітуди збурень  $\phi(t)$  отримано

$$\ddot{\phi} + [k^2 v_0 - \frac{d}{dt} \ln(a^2)] \dot{\phi} + k^2 [a^2 - v_0 \frac{d}{dt} \ln(a^2)] \phi = 0. \quad (19)$$

Розглянуто модель ідеального парамагнетика, намагніченість якого визначається рівнянням Ланжевена у випадку слабого поля ( $\xi = \frac{mH}{k_B T} \ll 1$ ), де:  $k_B$  - стала

Больцмана,  $m$  - магнітний момент ферочастинок,  $n$  - об'ємна концентрація. Тоді

$\mu = 1 + \alpha\rho; \alpha = \frac{4\pi c_1 m^2}{3Mk_B T}$ , де  $c_1$  - масова концентрація магнітних частинок,  $M$  - маса

однієї ферочастинок. Нехтуючи змінами температури, вважається  $\alpha = const$ . Тому

$$p_e = p^0(\rho, s^0) + \frac{1}{8\pi}(\chi_2^2 + \chi_3^2) - \frac{2\mu - 1}{8\pi\mu^2} \chi_1^2,$$

$$a^2 = a_0^2 + \frac{(\mu - 1)^2}{8\pi\mu^3} \chi_1^2; s^0 = s_0 = s; a_0^2 = \frac{\partial p^0(\rho, s^0)}{\partial \rho}.$$

Тут  $a_0^2$  - квадрат швидкості звуку в середовищі у відсутності магнітного поля. У цьому випадку, зокрема, встановлено, що складові магнітного поля, перепендикулярні напрямку поширення хвилі, не впливають на швидкість поширення звуку. Крім того, швидкість поширення звуку уздовж напрямку магнітного поля більша, ніж у відсутності поля.

У випадку, коли параметр  $\chi_1(t)$  змінюється в околиці деякого постійного значення  $\chi_0$ , так що  $\chi_1 = \chi_0 + \chi_1'(t)$ ;  $|\chi_1'| \ll |\chi_0|$ ;  $\chi_1^2 \approx \chi_0^2 + 2\chi_0\chi_1'(t)$ , отримано

$$a^2(t) = a_0^2 + \frac{(\mu-1)^2}{4\pi\rho\mu^3} \chi_0^2 + \frac{(\mu-1)^2 \chi_0}{2\pi\rho\mu^3} \chi_1'(t), \quad (20)$$

$a_0 = a_0(\rho_0, s_0)$ ,  $\mu = \mu(\rho_0)$  – постійні параметри, визначені в рівноважному стані.

Надалі вважається, що  $\chi_1'(t)$  змінюється за гармонічним законом:  $\chi_1'(t) = \beta \cos(2\omega t)$ ;  $|\chi_1'| \sim |\beta|$ ,  $|\beta| \ll |\chi_0|$ . Тоді  $\varphi(\tau)$  з другим порядком точності  $O(\beta^2)$  визначається рівнянням:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + [\psi_0 + 2\psi_{1s} \sin 2\tau] \frac{d\varphi}{d\tau} + [\theta_0 + 2(\theta_{1s} \sin 2\tau + \theta_{1c} \cos 2\tau)] \varphi = 0. \quad (21)$$

$$\text{Тут: } \theta_0 = \frac{k^2}{\omega^2} A^2, \theta_{1s} = \frac{(\mu-1)^2 \chi_0 v_0 k^2}{2\pi\rho\mu^3 A^2 \omega} \beta, \theta_{1c} = \frac{(\mu-1)^2 \chi_0 k^2}{4\pi\rho\mu^3 \omega^2} \beta, \psi_0 = \frac{k^2 v_0}{\omega},$$

$$\psi_{1s} = \frac{(\mu-1)^2 \chi_0}{2\pi\rho\mu^3 A^2} \beta, A^2 = a_0^2 + \frac{(\mu-1)^2}{4\pi\rho\mu^3} \chi_0^2, \tau = \omega t - \text{безрозмірний час.}$$

Рівняння (21), підстановкою  $\varphi(\tau) = AZ \exp\left(-\frac{k^2 v_0 \tau}{2\omega}\right)$  зведене до рівняння Мат'є-Хілла

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} + [\theta_0 - \psi_0^2 + 2(\theta_{1c} - \psi_{1s}) \cos 2\tau + \theta_{1s} \sin 2\tau] Z = 0 \quad (22)$$

У першому наближенні по малому параметру  $\beta$  граничні криві першої області нестійкості задаються рівністю  $\theta_0 = 1 + \psi_0^2 \pm ((\theta_{1c} - \psi_{1s})^2 + \theta_{1s}^2)^{1/2}$ . Використовуючи метод Уіттекера, за перше наближення прийнято  $Z = e^{\gamma\tau} \sin(\tau - \sigma)$ ,  $0 < \sigma < \pi/2$ . Для першої області нестійкості  $\gamma$  і  $\sigma$  визначаються із (22) у вигляді

$$\gamma^2 = -(1 + \theta_0 - \psi_0^2) \pm (4(\theta_0 - \psi_0^2) + (\theta_{1c} - \psi_{1s})^2 + \frac{\theta_{1s}^2}{4})^{1/2} \quad (23)$$

$$\text{tg } \sigma = \frac{(\theta_{1c} - \psi_{1s}) \pm [(\theta_{1c} - \psi_{1s})^2 + \frac{\theta_{1s}^2}{4} - 4\gamma^2]^{1/2}}{2\gamma - \theta_{1s} / 2}$$

Тоді в першому наближенні по малому параметру  $\beta$  отримано наступний розв'язок рівняння (22)

$$\varphi(t) = A \exp((\gamma\omega - k^2 v_0 / 2)t) \sin(\omega t - \sigma),$$

який є періодичним при виконанні умови  $\gamma = \frac{k^2 v_0}{2\omega}$ . При цьому рівняння (18) для потенціалу швидкості має періодичний розв'язок

$$\varphi(x, t) = A \exp(i(kx - \omega t + \sigma)),$$

який відповідає потенціалу хвиль малої амплітуди, збуджуваних у результаті виникнення об'ємної параметричної нестійкості намагнічуваного середовища. Частота виникаючих хвиль вдвічі менша частоти параметричного збудження.

Враховуючи (23), залежність величини хвильового вектора від частоти параметричного збудження визначається рівнянням:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{k^2 A^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{k^2 v_0}{\omega}\right)^2 \left[9 \left(\frac{k^2 v_0}{\omega}\right)^2 + 40\right] - \frac{3}{2} \frac{k^2 A^2}{\omega^2} \frac{k^2 v_0}{\omega} = \\ = \left[\frac{\beta \chi_0 (\mu - 1)^2}{4\pi r \mu^3 A^2}\right]^2 \left[\left(\frac{k^2 A^2}{\omega^2} - 2\right)^2 + \left(\frac{k^2 v_0}{\omega}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Звідси випливає, що збуджувані хвилі є дисперсійними і їх дисперсійність зумовлена в'язкістю середовища. У випадку ідеального середовища рівняння (24) має два розв'язки:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = A^2 (1 \pm \varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{\beta \chi_0 (\mu - 1)^2}{4\pi r \mu^3 A^2} \quad (25)$$

Отже, у цьому випадку хвилі поширюються без дисперсії. Оскільки  $A$  є швидкість хвиль у сталому полі, то змінна частина магнітного поля може призводити як до збільшення їх швидкості, так і до зменшення. Вирази (25) відповідають періодичним розв'язкам рівняння (22) і значенням параметрів середовища, які належать границям областей стійкості. Таким чином, при одній і тій же частоті магнітного поля можуть збуджуватися хвилі різної довжини.

Для побудови областей параметричної нестійкості розв'язок рівняння (21) відшукувався у вигляді  $\varphi(\tau) = e^{\gamma\tau/\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n e^{in\tau}$ , де  $\gamma = s + i\alpha$  – показник Флоке. Отримано співвідношення для коефіцієнтів  $\phi_n$ :

$$(C^{-1}B)\phi = \frac{1}{\beta}\phi, \quad \phi = (\dots, \phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots)^T \quad (30)$$

де  $C$  – діагональна матриця безкінечного порядку з комплексними коефіцієнтами,  $B$  – дводіагональна матриця. Їх коефіцієнти мають вигляд:

$$\begin{aligned} c_{n,n} = q_n^2 + \frac{q_n k^2 v_0}{\omega} + \frac{k^2}{\omega^2} \left( a_0^2 + \frac{(\mu - 1)^2 \chi_0^2}{4\pi r \mu^3} \right), \quad b_{n+2,n} = -\frac{(\mu - 1)^2 \chi_0}{2\pi r \mu^3 \omega^2} \left[ \frac{k^2}{2} - \frac{i(q_n \omega + v_0 k^2)}{a_0^2 + (\mu - 1)^2 \chi_0^2 / (4\pi r \mu^3)} \right], \\ b_{n,n+2} = -\frac{(\mu - 1)^2 \chi_0}{2\pi r \mu^3 \omega^2} \left[ \frac{k^2}{2} + \frac{i(q_n \omega + v_0 k^2)}{a_0^2 + (\mu - 1)^2 \chi_0^2 / (4\pi r \mu^3)} \right], \quad q_n = \frac{s}{\omega} + i \left( \frac{\alpha}{\omega} + n \right). \end{aligned}$$

Аналогічно розділу 2, відшукувались дійсні власні значення спектральної задачі (30), які відповідають найменшій амплітуді  $\beta$  параметричного збудження. Розрахунки проводилися при значеннях параметрів:

$$\nu = 0.1(\text{П}), \mu = 2, \sigma = 30 \left( \frac{\text{ерг}}{\text{см}^2} \right), \rho = 1.2 \left( \frac{\text{Г}}{\text{см}^3} \right), a_0 = 1.5 \cdot 10^5 \left( \frac{\text{см}}{\text{с}} \right), \omega = 100(\text{Гц}).$$

При невеликих значеннях амплітуди  $\beta$  осциляцій магнітного поля нейтральні криві стійкості утворюють вузькі області параметричної нестійкості, що відповідають збудженню акустичних коливань. Перший "язик" нестійкості зображений на рис. 7.а). На рис. 7.б) показано, що при збільшенні напруженості стаціонарного поля  $\chi_0$  критична амплітуда  $\beta_c$  зменшується, при цьому критичне хвильове число практично не змінюється (див. рис.7.с). Тобто стаціонарна компонента  $\chi_0$  знижує поріг збудження параметричної нестійкості в осцилюючому магнітному полі. Таким чином, при параметричному впливі на ферорідину нестаціонарним магнітним полем можуть збуджуватись звукові хвилі.

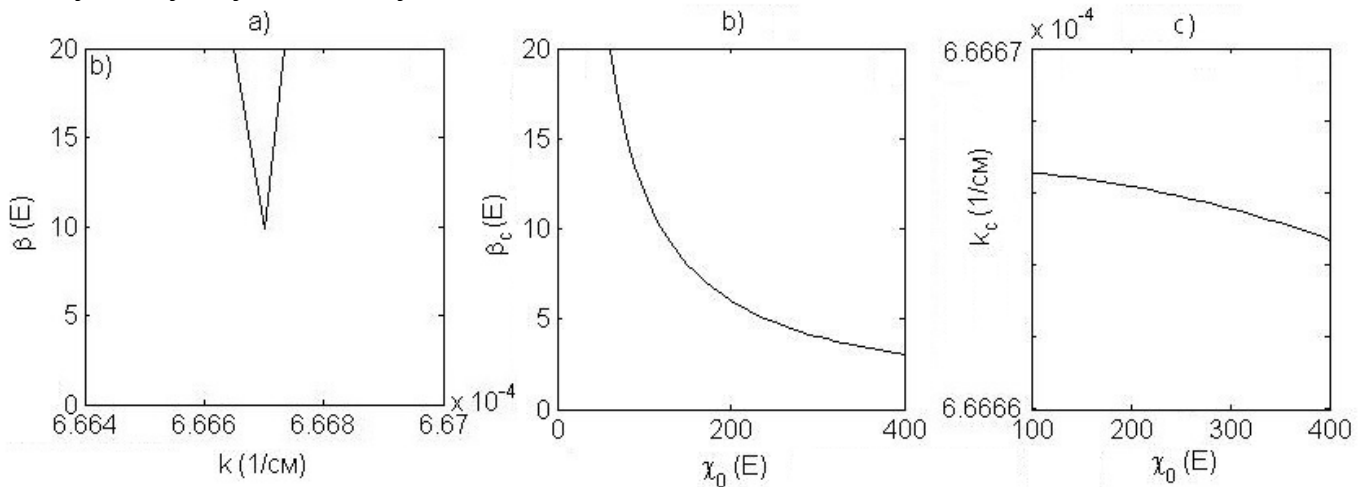


Рис. 7: а) перехідні криві стійкості при  $\chi_0 = 125(E)$ , б) залежність критичної амплітуди  $\beta_c$  й в) критичного хвильового числа  $k_c$  від напруженості стаціонарного поля

## ВИСНОВКИ

Досліджено умови виникнення поверхневих і внутрішніх хвиль у шарах ферорідин, які взаємодіють із зовнішнім магнітним полем. Розв'язано задачі параметричної стійкості поверхні розділу намагнічуваних рідин при періодичній дії нахиленого магнітного поля та механічних вібрацій. Виконано аналіз механізмів втрати стійкості рівноважних станів розглянутих гідродинамічних систем. Основні наукові та практичні результати дисертаційної роботи полягають у наступному:

1. Показано, що магнітне поле, яке складається зі стаціонарної та осцилюючої частин, здійснює двочастотне параметричне збудження поверхневих хвиль. Тільки осцилююче поле може збуджувати гармонічні коливання системи, тоді як додавання стаціонарної компоненти може призводити до появи бікритичних точок та переходу до субгармонічних коливань.

2. Для шару магнітної рідини з необмеженою вільною поверхнею обчислено границі областей стійкості у просторі ключових параметрів системи (хвильове число збурень, амплітуда періодичних впливів). При цьому отримано наступні результати:

– Поріг виникнення нестійкості Розенцвейга в стаціонарному вертикальному магнітному полі можна підвищити за рахунок додавання осциляцій поля, які у цьому випадку проявляють ефект параметричної стабілізації.

– У нахиленому нестационарному магнітному полі його вертикальна й горизонтальна складові можуть компенсувати дію один одного, тому для збудження магнітної нестійкості Фарадея необхідно прикласти поле більшої амплітуди.

– Спільна дія механічних вібрацій і коливного магнітного поля може компенсувати параметричний вплив одне одного. Ефект параметричної стабілізації найсильніше проявляються при рівності частот періодичних модуляцій.

– Показано принципову можливість збудження параметричної нестійкості вільної поверхні ферорідини в результаті гармонічного збурення її температури за рахунок магнітокалоричного ефекту. В результаті коливань температури виникають осциляції магнітного поля, які можуть призводити до збудження параметричної нестійкості й виникнення поверхневих хвиль.

3. Для систем магнітних рідин, розташованих у соленоїді або розділених пластинною із круглим отвором, побудовано границі областей стійкості рівноважних станів. При цьому встановлено:

– Область значень параметрів, що відповідають виникненню просторових структур на вільній поверхні, розбивається на зони, кожна з яких характеризується цілком визначеною модою найбільш швидко зростаючих збурень поверхні.

– Зміна індукції магнітного поля, що викликає перехід фізичних параметрів з однієї зони в іншу, супроводжуються якісною перебудовою форм поверхні розділу.

– Зі збільшенням числа Бонда критичні значення індукції магнітного поля наближаються до значень, що відповідають випадку необмеженої поверхні розділу.

4. Досліджено умови виникнення внутрішніх хвиль у ферорідинах:

– Показано можливість збудження об'ємної параметричної нестійкості однорідних станів намагнічуваних середовищ при періодичній дії магнітного поля.

– Асимптотичними та чисельними методами встановлено параметри виникаючих акустичних хвиль, вплив стаціонарної й осцилюючої компонент магнітного поля на дисперсність звуку та швидкість його поширення.

– Показано, що перехідні криві утворюють вузькі області нестійкості, які відповідають появі ультразвукових коливань у магнітній рідині. Встановлено, що збільшення стаціонарної складової магнітного поля призводить до зменшення критичної амплітуди коливань поля, при якій збуджується об'ємний параметричний резонанс.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Пацегон Н. Ф. Устойчивость свободной поверхности вязкой намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / Н.Ф. Пацегон, С.И. Поцелуев // Прикладная гидромеханика. – 2014. – Т. 16 (88), № 3. – С. 36–51.
2. Пацегон Н. Ф. Устойчивость свободной поверхности слоя вязкой феррожидкости при воздействии переменного магнитного поля и механических вибраций / Н. Ф. Пацегон, С. И. Поцелуев // Техническая механика. – 2016. – № 2. – С. 71–84.

3. Borysov I. D. Instability of equilibrium and appearance of ordered spatial structures on the free surface of ferrofluid / I. D. Borysov, S. I. Potseluev and T. Yu. Yatsenko // *Magnetohydrodynamics*. – 2014. – Vol. 50, №.1. – P. 3–12.
4. Борисов И. Д. Неустойчивость Розенцвейга в двухслойной системе несмешивающихся намагничивающихся жидкостей / И. Д. Борисов, С. И. Поцелуев // *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна: Серія «Математика, прикладна математика, механіка»*. – 2016. – Т. 84. – С. 46–60.
5. Patsegon N. F. The volumetric parametric resonance in magnetizable medium / N. F. Patsegon, S. I. Potseluev // *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна: Серія «Математика, прикладна математика, механіка»*. – 2015. – Т. 81.– С. 20 – 35.
6. Potseluev S. I. Parametric instability of ferrofluid layer free surface in oscillating magnetic fields / S. I. Potseluev // *Mechanics. Researches and Innovations*.– 2016. – Vol. 9. – P. 6 – 13.
7. Potseluev S. I. Parametrical instability of the free surface of nonlinear magnetizable fluid / S. I. Potseluev, N.F. Patsegon // *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences*. – Харьков: «Апостроф», 2011.–С. 104–119.
8. Potseluev S. I. Parametric oscillations of two-layer system of immiscible ferrofluids / S. I. Potseluev // *5<sup>th</sup> International conference of young scientist on differential equations and applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. Book of abstracts*. – Kyiv, 2016. – P. 119.
9. Patsegon M. Interfacial stability of the ferrofluid in a constant and oscillating magnetic fields / M. Patsegon, I. Borisov, S. Potseluev // *International conference «DIFFERENTIAL EQUATIONS and CONTROL THEORY»*. Book of abstracts. – Kharkiv, 2016. – P. 26.
10. Patsegon N. F. Parametric instability of ferrofluid in oscillating magnetic fields / N. F. Patsegon, S. I. Potseluev // *Современные проблемы естественных наук. Сборник тезисов докладов междунар. конф. «Тараповские чтения-2016»*. – Харьков: «Цифровая типография №1», 2016. – С. 77.
11. Борисов І. Д. Нестійкість рівноваги, еволюція вільної поверхні магнітної рідини в за критичному магнітному полі / І. Д. Борисов, С. І. Поцелуєв, Ю. І. Руднєв // *Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки»*. Матеріали конференції. – Київ, 2014. – С. 42.
12. Пацегон Н. Ф. Об'ємний параметричний резонанс у магнітних рідинах стосовно збудження акустичних коливань / Н. Ф. Пацегон, С. І. Поцелуєв // *Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки»*. Матеріали конференції. – Київ, 2014. – С. 99.
13. Поцелуєв С. И. Устойчивость свободной поверхности вязкой намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / С. И. Поцелуєв, Н. Ф. Пацегон // *Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки»*. Матеріали конференції. – Київ, 2014. – С. 103.

14. Борисов И. Д. Равновесные формы свободной поверхности намагничивающейся жидкости и их устойчивость / И. Д. Борисов, С. И. Поцелуев, Ю. И. Руднев // «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013». – Харьков: «Цифровая типография №1», 2013. – С. 28 – 29.
15. Поцелуев С. И. Устойчивость свободной поверхности намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / С. И. Поцелуев, Н. Ф. Пацегон // «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013». – Харьков: «Цифровая типография №1», 2013. – С. 62 – 63.
16. Поцелуев С. И. Параметрическая неустойчивость свободной поверхности нелинейно намагничивающейся жидкости / С. И. Поцелуев, Н. Ф. Пацегон // «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях». Тезисы докладов международной конференции. – Харьков: «Апостроф», 2011. – С. 91 – 92.

### АНОТАЦІЯ

*Поцелуєв С. І.* Багатопараметричне збудження поверхневих і внутрішніх хвиль у магнітних рідинах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.05 «Механіка рідини, газу та плазми». – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2017.

Досліджено виникнення хвиль на вільній поверхні шару в'язкої нелінійно намагнічуваної ферорідини, при параметричному впливі довільно орієнтованого до вільної поверхні нестационарного однорідного магнітного поля та при наявності механічних вібрацій шару. У випадку магнітного поля, що складається з постійної і гармонічно змінюваної з часом частин, за умови раціональності співвідношень частот електромагнітних і вібраційного впливів, задача зводиться до дослідження нескінченної системи лінійних рівнянь для коефіцієнтів ряду Фур'є амплітуди збурень вільної поверхні ферорідини. Матриця цієї системи є квадратичним пучок матриць, параметром якого є амплітуда параметричного впливу. Задача зведена до лінійної спектральної задачі, в якій амплітуда параметричного впливу є власним значенням. Визначено нейтральні криві стійкості, встановлено, що зміна кута орієнтації магнітного поля і збільшення його стаціонарної складової може призводити до виникнення бікритичних точок і переходу від гармонічних до субгармонічних коливань. Вплив стаціонарного нахиленого магнітного поля на критичну амплітуду механічних вібрацій носить немонотонний характер і залежить не тільки від орієнтації магнітного поля, а й від товщини шару рідини. Досліджено відмінності вібраційного і електромагнітного механізмів у розвитку параметричної нестійкості вільної поверхні, обумовлені двочастотною модуляцією магнітного поля.

Досліджено процеси виникнення впорядкованих просторових конфігурацій вільної поверхні магнітної рідини в стаціонарному магнітному полі. Для циліндричного соленоїда з прямокутним і круговим перерізом визначені в просторі фізичних параметрів області стійкості рівноважного стану. Розглянуто стійкість рівноваги

двошарової системи незмішуваних намагнічуваних рідин, розділених тонкою горизонтальною пластиною з отвором. Запропоновано чисельний метод побудови границі області стійкості в просторі фізичних параметрів даної системи. Для випадку кругового отвору проведені розрахунки границі області стійкості і мод найбільш швидко зростаючих збурень.

Вивчена можливість виникнення ультразвукових хвиль в намагнічуваних середовищах при їх збудженні періодичним магнітним полем за рахунок об'ємного параметричного резонансу. Асимптотичними та чисельними методами встановлені параметри збуджуваних акустичних хвиль, вплив осцилюючої частини магнітного поля на дисперсність збуджуваного звуку та швидкість його поширення.

**Ключові слова:** ферогідродинаміка, магнітна рідина, стійкість рівноваги, параметричний резонанс, внутрішні та поверхневі хвилі.

## АННОТАЦІЯ

*Поцелуев С. И.* Многопараметрическое возбуждение поверхностных и внутренних волн в магнитных жидкостях. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.02.05 «Механика жидкости, газа и плазмы». – Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, 2017.

Исследовано возникновение волн на безграничной свободной поверхности слоя вязкой нелинейно намагничивающейся жидкости при периодическом воздействии произвольно ориентированного нестационарного однородного магнитного поля и механических вибраций слоя. Показано, что при пренебрежении теплопроводностью жидкости эта задача сводится к исследованию устойчивости для жидкости со специальным уравнением магнитного состояния, зависящим только от напряженности поля и плотности жидкости. Задача сформулирована в терминах потенциала напряженности магнитного поля и вертикальной компоненты скорости (функции тока для плоского случая). В отличие от механических вибраций, эффективное влияние магнитного поля на устойчивость свободной поверхности жидкости пропорционально квадрату поля. Поэтому магнитное поле, состоящее из постоянной и колеблющейся частей, приводит к двухчастотному параметрическому воздействию. При условии рациональности отношения частот вибрационных и электромагнитных осцилляций, в линейном приближении задача сведена к исследованию бесконечной системы линейных уравнений для коэффициентов ряда Фурье амплитуды возмущений свободной поверхности магнитной жидкости. Матрица этой системы представляет квадратичный пучок матриц, параметрами которого выступают амплитуды параметрического воздействия. Задача сведена к линейной спектральной задаче, в которой одна из амплитуд является собственным значением. При изменении ключевых физических параметров системы решалась спектральная задача, и находились действительные собственные значения, отвечающие минимальной амплитуде параметрического воздействия. Построены нейтральные кривые, которые



выделяют области ("языки"), внутри которых значения параметров отвечают неустойчивости, т.е. возбуждению поверхностных волн.

Для горизонтальных слоев феррожидкостей с ограниченной свободной поверхностью собственные частоты колебаний образуют дискретный спектр, а отвечающие им моды колебаний качественно отличаются друг от друга. Это позволяет объяснить многообразие поверхностных форм магнитных жидкостей, наблюдаемых в реальных экспериментах, при взаимодействии жидкости с внешним магнитным полем. Для систем магнитных жидкостей, расположенных в соленоиде или разделенных пластиной с круглым отверстием построены границы области устойчивости равновесных состояний в пространстве определяющих параметров. Показано, что область значений параметров, отвечающих неустойчивым равновесным состояниям, разбивается на зоны, каждая из которых характеризуется вполне определенной модой наиболее быстро растущих возмущений. Изменения индукции магнитного поля, вызывающие переход физических параметров из одной зоны в другую, сопровождаются качественной перестройкой форм поверхности раздела феррожидкостей. С увеличением числа Бонда критические значения индукции магнитного поля стремятся к значениям, соответствующим случаю безграничной поверхности раздела.

Изучена возможность потери устойчивости однородных состояний намагничивающихся сред при их параметрическом возбуждении магнитным полем. Асимптотическими и численными методами установлены параметры возникающих акустических волн, влияние стационарной и осциллирующей компонент магнитного поля на дисперсность звука и скорость его распространения. Показано, что переходные кривые образуют узкие области объемной параметрической неустойчивости, которые соответствуют появлению акустических колебаний в магнитной жидкости. Установлено, что увеличение стационарной компоненты магнитного поля приводит к уменьшению критической амплитуды поля, необходимой для возбуждения объемной параметрической неустойчивости.

**Ключевые слова:** феррогидродинамика, магнитная жидкость, устойчивость равновесия, параметрический резонанс, внутренние и поверхностные волны.

## ABSTRACT

Potseluev S. I. Multiparametric excitation of internal and surface waves in ferrofluids. – Qualifying scientific work as a manuscript.

A thesis on the degree of Candidate of Science (PhD) on specialty 01.02.05 "Mechanics of fluid, gas and plasma". – V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2017.

The appearance of surface waves on the layer of viscous nonlinearly magnetizing ferrofluid in the non-stationary uniform magnetic field, oriented arbitrary to a free surface, and under the influence of mechanical vibrations of the layer is considered. In the case of magnetic field, composing of a constant portion and a harmonically time-varied portion, providing the rationality of relations between electromagnetic and mechanical frequencies, the problem is reduced to the study of an infinite system of the linear equations for the Fourier series of the amplitude of disturbances of the free surface. The matrix of this system is a quadratic pencil of matrices, whose parameter is the amplitude of the parametric

influence. The problem is reduced to a linear spectral problem, in which the amplitude of the parametric effects is the eigenvalue. Marginal curves of the stability are found. It is established, that variations in angle of orientation of the magnetic field and an increase in its stationary component may result to appearance of bicritical points and to the transfer from the harmonic oscillation to the subharmonic oscillation. The effects of the stationary inclined magnetic field on critical amplitude of the mechanical vibrations are non-monotonic and depend on not only the orientation of the magnetic field but on the thickness of the fluid layer. Distinctions of the vibratory and electromagnetic mechanisms in evolution of the parametric instability of a free surface, resulted from two-frequency modulation of the magnetic field, are studied.

The formation process of ordered spatial structures on the free surface of a magnetizable fluid in a constant magnetic field is considered. The stability boundary for an equilibrium state of the ferrofluid layer in a cylindrical solenoid with circular and rectangular cross-section is defined in the space of physical parameters. The stability of equilibrium for two-layer system of immiscible ferrofluids, separated by thin horizontal plate with a hole is considered. A numerical method for calculation of stability boundary in the space of dimensionless physical parameters of the system is proposed. In the case of circular hole the stability boundary and the most rapidly growing perturbations were calculated.

The possibility of occurrence of ultrasonic waves in magnetizable medium under periodic excitation of a magnetic field, due to the volumetric parametric resonance, is studied. Parameters of excited acoustic wave and the influence of oscillating magnetic field on the dispersion of sound and its propagation velocity are determined using asymptotic and numerical methods.

**Keywords:** ferrohydrodynamics, ferrofluids, equilibrium stability, parametric resonance, internal and surface waves.