

Відгук
офіційного опонента на дисертаційну роботу
Соловйової Марії В'ячеславівни
”НАБЛИЖЕННЯ ОПЕРАТОРАМИ І ФУНКЦІОНАЛАМИ, ЩО ДОСЯГАЮТЬ НОРМИ”
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Дисертаційна робота присвячена вивченю властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для різних типів відображень, а саме, для функціоналів, операторів та ліпшицевих функцій. Результати дисертації покращують та узагальнюють відповідні теореми з робіт Акости, Арони, Гарсії та Маестре (2008), Каскалеса, Кадеця та Гуірао (2011), Чіки, Кадеця, Мартіна, Морена-Пулідо та Рамбли-Барено (2014), та інших математиків. Слід зазначити, що статті з цієї тематики публікуються досить активно в провідних журналах і в поточному 2018 році, що, безумовно, свідчить про актуальність обраного напрямку досліджень.

Дисертація складається зі вступу та п'яти розділів, перший з яких присвячений огляду літератури і результатів дисертації, мотивації, та зв'язку результатів здобувачки з вже відомими результатами.

Другий розділ ”Кількісні версії теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для лінійних функціоналів” містить результати досліджень зв'язків між сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша та параметром рівномірної неквадратності. Зокрема, в цьому розділі оцінюється зверху сферичний модуль $\Phi_X^S(\varepsilon)$ Бішопа-Фелпса-Болобаша через параметр рівномірної неквадратності (Теорема 2.8). Здобувачка доводить також, що вказана оцінка не є точною, наводячи для кожного $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ приклад банахового простору X з параметром $\alpha(X)$ рівномірної неквадратності, що задовольняє нерівність $\Phi_X^S(\varepsilon) \geq \sqrt{2\varepsilon} \sqrt{1 - \alpha(X)}$. Також в другому розділі наведені цікаві приклади просторів розмірності 2, у яких параметри рівномірної неквадратності збігаються, але ці простори мають різні значення сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша для достатньо малих ε .

Крім того, в другому розділі авторкою вводиться поняття модифікованого (сферичного) модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша, наводиться точна оцінка таких модулів (Теорема 2.19), а також показується існування рівномірно неквадратних просторів, для яких оцінка модифікованих модулів залишається точною (Теорема 2.20).

Третій розділ має назву ”Теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функціоналів”. Основний результат третього розділу – це Теорема 3.11, яка стверджує, що довільний рівномірно опуклий банаховий простір має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій. При цьому важливим є поняття досягнення норми для ліпшицевих функцій. В строгому розумінні це поняття не дало можливості отримати аналоги теореми Бішопа-Фелпса, тому здобувачкою було введено поняття досягнення норми за напрямком.

У наступному розділі "Теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів, що діють у простір зі структурою ACK" продовжуються дослідження, розпочаті в роботах Арони, Каскалеса і Кожушкіної (2011 рік) та Каскалеса, Кадеця і Гуірао (2013 рік). Ці дослідження стосуються питання існування нескінченновимірного простору Y , з яким пара (c_0, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша. Авторка дисертації покращила один результат Каскалеса, Кадеця і Гуірао, використовуючи фрагментовність образу $T^*(B_{Y^*})$ замкненої одиничної кулі спряженого простору для асплундового оператора T . Крім того, в дисертації було введено загальну властивість банахових просторів, названу "структурою ACK з параметром ρ ", яка дозволила отримати аналоги теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для широкого класу просторів. Зокрема, в четвертому розділі дисертації доводиться, що кожний банаховий простір з ACK-структурою (чи ACK_ρ -структурою) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів. Далі наводяться приклади просторів з ACK-структурою: рівномірні алгебри, простори з властивістю β Лінденштрауса, тощо. Доведено також, що структура ACK зберігається при операції \bigoplus_∞ . Для компакту K встановлено, що наявність у Y структури ACK (структурі ACK_ρ) імплікує наявність цієї ж структури у простору $C(K, Y)$ всіх неперервних відображень між K та Y , наділеному топологією рівномірної збіжності.

В останньому, п'ятому розділі дисертації "Кількісні версії теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для лінійних операторів, що діють у простір з властивістю β " вводяться поняття (сферичного) модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша $\Phi(X, Y, \varepsilon)$ (відповідно, $\Phi^S(X, Y, \varepsilon)$) для операторів і наводиться оцінка зверху для цих модулів у випадку, коли простір Y має властивість β (Теорема 5.3). Цей результат є кількісною версією теореми Акости, Арони, Гарсії та Маестро. Питання, чи справджується нерівність $\Phi^S(X, \mathbb{R}, \varepsilon) \leq \min\{\sqrt{2\varepsilon}, 1\}$ для довільного банахового простору X , залишається відкритим.

Слід зазначити, що здобувачкою отримані оцінки знизу для $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon)$, які показують, зокрема, що функція $\Phi^S(X, Y, \varepsilon)$ не є неперервною відносно простору Y .

Наприкінці п'ятого розділу авторка дисертації вводить поняття модифікованого (сферичного) модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша $\tilde{\Phi}(X, Y, \varepsilon)$ ($\tilde{\Phi}^S(X, Y, \varepsilon)$) для операторів та наводить, по аналогії із дослідженнями, проведеними для модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша для функціоналів, оцінку зверху для модифікованих модулів (теорема 5.19) та оцінку знизу (теорема 5.21).

Дисертаційна робота справляє гарне враження, але вона не позбавлена деяких друкарських помилок та недоліків технічного характеру, перелік яких наводиться нижче.

- Конструкцію речення "якщо ..., тоді ...", яка часто зустрічається в дисертації, краще замінити на "якщо..., то ...";
- по всьому тексту дисертації є неузгодженість перекладу посилань на результати з англомовних статей, а саме, одночасно зустрічаються посилання типу [10, Theorem 2.4] і [10, Теорема 3.6];
- властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша в англомовних текстах скорочується до

"ВРВр" де маленька літера "р" в кінці означає "property". Тому в україномовному тексті у фразах типу "Простір X має властивість ВРВр" літеру "р" долучати не потрібно;

- 32⁵: "одиничного шару" \mapsto "одиничної кулі";
- 32₁₁: "Лінденстраус" \mapsto "Лінденштраус";
- 33¹: "скінченновимірних" \mapsto "скінченновимірні";
- 38₉: "таки чином" \mapsto "таким чином";
- 38₇: "у том числі" \mapsto "у тому числі";
- 40₈, 41⁶: "являється" \mapsto "є";
- 46₁₃: має бути "існують послідовності елементів $u_n, v_n \in S_X$ ";
- 46₅: маленька літера "у" після великої "У" є зайвою;
- 47¹: "одно" \mapsto "одне";
- 51³: "щільно у $\text{Lip}_0(X)$ " \mapsto "щільна у $\text{Lip}_0(X)$ "; аналогічно на сторінці 51¹¹;
- 54⁶: "гільбертого" \mapsto "гільбертового";
- 55⁹: замість $f, g \in S_{X^*}$ має бути $f, g \in B_{X^*}$;
- 55₅, 56², 112²: має бути $X \setminus \{0\}$ замість $X/\{0\}$;
- 56₇: "зауважемо" \mapsto "зауважимо";
- 68¹²: "зростаючи" \mapsto "зростаючі";
- 69₅: "слабкіша" \mapsto "слабша";
- 70⁴: мені не зрозуміло, чому число $k = \frac{\sqrt{\|x^*\| - 1 + \varepsilon}}{\|x^*\|}$ менше за одиницю;
- 79⁷: не зовсім зрозумілий вибір літери "г" для позначення слова "ослаблена" в Означенні 3.6;
- 79¹⁰ "існує послідовність" \mapsto "існують послідовності";
- 79₁₃: замість x_n та y_n у відповідному дробі мають бути v_n та w_n ;
- 81: у формулованні Твердження 3.8 має бути $B_{\mathcal{F}}$, а не $\overline{B}_{\mathcal{F}}$;
- 81¹³: "замкнута" \mapsto "замкнена";
- 86₁₀: слово "characterizations" з оригінальної англомовної статті [17] краще перекладати як "характеризації";
- 88¹²: "окружності" \mapsto "колі";
- 88⁹: "... існує $x \in \Gamma$ така, що ..." \mapsto "... існує $x \in \Gamma$ таке, що ..." або "... існує функція $x \in \Gamma$ така, що...";
- 89¹³: частину речення "яка задовольняє умову $U \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$ " потрібно виділити комами, а не тире;
- 90⁴, 90₅, 93⁷: "існує" \mapsto "існують";
- означення 1-нормуючої множини з'являється на початку підрозділу 4.2, хоча це поняття використовується вище при доведенні Леми 4.8.
- 91⁷: "не порожня" \mapsto "непорожня";
- 91⁷⁻⁸: множина U_2 залежить від r , тому варто було б заіндексувати її якимось іншим способом;
- 91₉: замість $\frac{x_0^*}{\|x_0^*\|}$ має бути просто x_0^* ;

- 92₈: словосполучення "структурА СК" необхідно взяти в лапки;
- 93^{12–13}: існування $w*$ -відкритої множини U_r , точки u_r та функціоналу x_r^* спирає з Леми 4.8, а не задоволює умови цієї леми;
- 93₁₀ і далі скрізь в доведенні Теореми 4.11: $T^*(z^*), \tilde{T}(x), \tilde{T}^*(y^*) \mapsto T^*z^*, \tilde{T}x, \tilde{T}^*y^*$;
- 94⁶: необхідно вказати, що $v_k^* \in V$ для кожного $k \in \{1, \dots, n\}$;
- 95₁₀: праву частину нерівності краще записати у вигляді $5\varepsilon' + r + 2k$;
- 95₇: "наближаються" \mapsto "наближаються";
- 96⁸: "питанням" \mapsto "питання";
- 96₆: "від протилежного" \mapsto "від супротивного";
- 96₅: замість B_{Y*} має бути $B_{\ell_2^{(2)}}$;
- 96₄: не зрозуміло, що таке $\Gamma \cup (\Gamma)$;
- 97₅: множина V_1 не визначена;
- 97_{1–2}: замість $\delta(\varepsilon)$ має бути $\delta(\varepsilon')$;
- 99⁷: не зрозуміло, що таке $\overline{\mathbb{D}}$;
- 101⁶: після ε' має бути крапка;
- 101_{1–2}, 105^{4–5}: множину $U \subset \Gamma$ та число ε' необхідно зафіксувати;
- 102¹: має бути $y_{\alpha_0}^* \in U$ замість $y_{\alpha_0} \in U$;
- 102₁₁: $y_\alpha^* \mapsto y_{\alpha_0}^*$;
- 102₉: залишилося слово "as" з англомовного тексту відповідної статті;
- 104¹: $y_1^* \in \Gamma_1$, а $y_2^* \in \Gamma_2$;
- 105: перед доведенням Теореми 4.20 варто було б нагадати зміст символу \otimes ;
- 105₈: "неперервні" \mapsto "неперервна";
- 105₈: $f(t_0) = 1 \mapsto f_0(t_0) = 1$;
- 109¹³: має бути "Означення 5.1" замість "Означення 5.18";
- 110₅, 125₃: "1-нормуючею" \mapsto "1-нормуючою";
- 111⁶: залишилося слово "So" з англомовного тексту відповідної статті;
- 112₃: має бути $k \leq 1/2$ замість $k < 1/2$;
- 119⁴: "позитивне u_t рішення" \mapsto "додатний розв'язок u_t "; аналогічно на сторінці 127₆;
- 119¹⁴: "дає" \mapsto "дають";
- 120³: "шару" \mapsto "кулі"; аналогічно на сторінці 131₁;
- 123⁸: назва підрозділу 5.3.3 має бути "Розривність модуля...";
- 123⁹: "обидві" \mapsto "обидва";
- 123¹⁴: має бути пробіл між словами "що" та "відстанню";
- 124⁷: "їзометрично" \mapsto "їзометричний";
- 134⁶: має бути "Теорема 5.6" замість "Теорема 5.3".

Втім, висловлені вище зауваження не принципові і не применшують позитивного враження від дисертаційної роботи.

Дисертація носить теоретичний характер. Вона виконана на досить високому науковому рівні. Всі наведені в дисертаційній роботі результати є новими і належать

безпосередньо автору. Результати дисертації опубліковані в 6 статтях у виданнях, що входять до переліку фахових наукових журналів згідно чинного законодавства, і в 5 тезах доповідей міжнародних конференцій. Вони також доповідались на багатьох наукових семінарах. Автореферат добре відображає зміст дисертації. Отримані результати можуть бути застосовані в подальших дослідженнях.

Вважаю, що дисертаційна робота Марії В'ячеславівни Соловйової "Наближення операторами і функціоналами, що досягають норми" відповідає всім вимогам чинного положення "Порядку присудження наукових ступенів", а її авторка заслуговує присвоєння наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук,
доцент кафедри математичного аналізу
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

О.О. Карлова



Підпис Каролі О. О. засвідчує

Начальник відділу кадрів Чернівецького національного університету

імені Юрія Федковича

08 2008 р.

УДОСТОІВЛЕНІ
ОБРАЗОВАНИМ
І НАУКОВИМ
ДІЯНІСТВОМ

ІМ'ЯЮЩІ
ОБЛАСТІ
І МІСЦЕ
ДІЯНІСТВА

ІМ'ЯЮЩІ
ОБЛАСТІ
І МІСЦЕ
ДІЯНІСТВА

ІМ'ЯЮЩІ
ОБЛАСТІ
І МІСЦЕ
ДІЯНІСТВА

ІМ'ЯЮЩІ
ОБЛАСТІ
І МІСЦЕ
ДІЯНІСТВА