ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Євгеньєвої Євгенії Олександрівни
"Граничні режими із сингулярним загостренням у
квазілінійних параболічних рівняннях",
яка подана до захисту на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння

Дослідження сингулярних граничних режимів активно проводиться з 1960-тих років і пов'язано це із вивченням процесу контрольованого термоядерного синтезу. При побудові математичної моделі цього процесу виникали сингулярні крайові режими. О.А. Самарський та І.М. Соболь у 1963 році вперше показали, що за певних умов на характер загострення температури на межі області виникає ефект просторової локалізації, тобто, нескінченна температура не розповсюджується на всю область за скінченний проміжок часу, а локалізується біля її межі. У 1970-х роках дуже активно вивчалася модель розповсюдження тепла у повністю іонізованій плазмі та ефект просторової локалізації. А вже з 1980-их років задачі з сингулярними умовами на межі почали позиціонуватись як окремий напрямок досліджень якісних властивостей рівнянь з частинними похідними. Цією проблемою займалися В.О. Галактіонов, М.В. Змітренко, С.П. Курдюмов, О.П. Михайлов, О.А. Самарський, А.С. Калашніков, B.H. Gilding, M.A. Herrero, C. Cortazar, M. Elgueta. Основні дослідження були пов'язані зі знаходженням необхідних та достатніх умов локалізації граничного режиму для параболічних рівнянь з різними класами коефіцієнтів теплопровідності. Також активно розвивається та модифікується бар'єрна техніка, вивчаються класи автомодельних розв'язків, розробляється метод з використанням наближених автомодельних розв'язків. У 1999 році А.Є. Шишковим та А.Г. Щелковим був запропонований новий метод дослідження сингулярних крайових режимів. Метод енергетичних оцінок використовує принципово інший підхід, відмінний від бар'єрних технік. Пізніше у серії робіт В.О. Галактіонова та А.Є. Шишкова (2003-2006 роки) він був застосований для широкого класу подвійно нелінійних параболічних рівнянь другого порядку та для рівнянь високих порядків. Однак, у вищезгаданих роботах метод енергетичних оцінок дозволяв знайти лише умови локалізації граничного режиму і не давав місткних результатів про поведінку розв'язку біля зони сингулярності. Тому виникає потреба модифікувати цей метод для дослідження поведінки розв'язків широкого класу рівнянь. Отож, тематика дисертаційного дослідження є **актуальною**.

Об'єктом дисертаційного дослідження є подвійно нелінійні параболічні рівняння

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p u + b(t,x)|u|^{\lambda-1}u = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \qquad (1)$$

де $\lambda > p \geq q > 0$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $T \geq 1$, $\Delta_p u = \sum_{i=1}^{n} (|\nabla u|^{p-1} u_{x_i})_{x_i}$, $b \in C([0,T] \times \overline{\Omega})$, $b \geq 0$, $u : [0,T) \times \overline{\Omega}$ – невідома функція.

Предметом дослідження в дисертації є енергетичні оцінки слабких розв'язків рівняння (1) при наявності сингулярностей на параболічній межі області задання рівняння.

Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел.

У *вступі* обґрунтовано актуальність досліджуваної наукової задачі, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури, описано історію проблематики та наведено ключові результати, отримані в області дослідження за останній час.

У *другому* розділі дисертації розглядаються слабкі (енергетичні) розв'язки мішаної задачі для рівняння (1) при $b = 0$ з крайовою умовою

$$u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \tag{2}$$

і початковою умовою

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

при умові, що $f(t,x) \to +\infty$ при $t \to T-0$.

Основні результати цього розділу можна представити так.

Нехай u – слабкий розв'язок задачі (1)-(3),

$$h_u(t,s) := \sup_{0\le\tau\le t} \int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{q+1}\, dx,$$

$$E_u(t,s) := \int_0^t \int_{\Omega(s)} |\nabla u(\tau,x)|^{p+1}\, dx d\tau, \quad t \in (0,T), \quad s \in (0, s_\Omega),$$

де $\Omega(s) := \{x \in \Omega : dist(x,\partial\Omega) > s\}$, $s_\Omega > 0$ таке, що $\Omega(s)$ - непорожня область для кожного $s \in (0, s_\Omega)$.

Теореми, які доведені тут, мають таку структуру.

Теорема 2.N. *Нехай виконуються певні співвідношення між параметрами рівняння, а* u *– слабкий розв'язок задачі* (1)-(3) *такий, що*

$$h_u(t,0) + E_u(t,0) \le F(t), \quad t \in (0,T),$$

де $F(\cdot)$ *– деяка монотонно неспадна функція, причому* $F(t) \to +\infty$ *при* $t \to T-0$.

Тоді для деякої функції $G_F(s)$, $s \in (0, s_\Omega)$, $G_F(s) \to +\infty$ *при* $s \to 0+$, *маємо*

$$h_u(T,s) + E_u(T,s) \le G_F(s), \quad s \in (0, s_\Omega).$$

В *третьому* розділі розглядаються слабкі розв'язки рівняння (1) при умові, що $b(x,t) > 0$ для $(x,t) \in [0,T) \times \overline{\Omega}$, але $b(x,T) = 0$ для $x \in \overline{\Omega}$, тобто коефіцієнт в абсорбційному члені вироджується. Встановлені твердження такого типу.

Теорема 3.N. *Нехай виконуються певні співвідношення між параметрами рівняння та умови на виродження коефіцієнта* b. *Тоді для деякої функції* $G_\star(s)$, $s \in (0, s_\Omega)$, $G_\star(s) \to +\infty$ *при* $s \to 0+$, *правильна нерівність*

$$\sup_{\frac{T}{2} \le t \le T} \int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{q+1}\, dx + \int_{\frac{T}{2}}^{T} \int_{\Omega(s)} |\nabla u(t,x)|^{p+1}\, dxdt \le G_\star(s), \ s \in (0, s_\Omega).$$

Варто відзначити, що дисертантка при написані дисертації вирішила складні ідейні та технічні проблеми, застосувала факти з різних галузей математики. Зокрема, використала метод енергетичних оцінок, який є комбінацією декількох підходів та технік. Також використала метод апріорних оцінок типу Сен-Венана та нелінійний варіант цього методу.

Основні результати дисертації оформлені у вигляді теорем, які доведені акуратно і строго математично. Усі результати є новими, мають значний науковий інтерес і достатньо повно опублікованими в 5-ти фахових виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз, а також добре апробовані на наукових конференціях.

Робота має теоретичний характер, її результати можуть бути використані у подальших дослідженнях .

Автореферат повністю та правильно відображає зміст дисертації.

Дисертаційна робота написана на високому науковому рівні, оформлена акуратно і згідно з чинними вимогами до оформлення дисертацій, а матеріал в ній викладено послідовно й чітко. Маю тільки кілька незначних зауважень.

1. Варто було б уточнити як розуміється виконання початкової умови для слабких розв'язків.

2. В дисертації вживається термін "слабкий"та "енергетичний"розв'язки. Хоча вони означають один і той же об'єкт, але варто було б вживати в межах дисертаційної роботи тільки один з цих термінів.

3. Оскільки в даній роботі всюди головною просторовою частинною рівнянь є $\Delta_p u$, то в інтегральній тотожності, що визначає слабкий розв'язок, варто писати $|\nabla u|^{p-1} \nabla u \nabla \eta$ замість $\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,u,\nabla u)\eta_{x_i}$.

4. Оскільки енергетичні оцінки розв'язків є рівномірними за t, а енергетичні функції є монотонними, то у формулюваннях відповідних теорем варто писати $h_u(T,s)$ і $E_u(T,s)$ замість $h_u(t,s)$ та $E_u(t,s)$.

Ці зауваження та описки і мовні огріхи граматичного і стилістичного характеру, які інколи зустрічаються в тексті, не мають принципового значення і не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

Дисертація є завершеною працею, в якій отримані нові науково обґрунтовані результати, що в сукупності вирішують конкретну наукову задачу суттєвого значення для теорії диференціальних рівнянь.

Вважаю, що дисертаційна робота "Граничні режими із сингулярним загостренням у квазілінійних параболічних рівняннях"задовольняє всім вимогам ДАК України щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її автор, Євгеньєва Євгенія Олександрівна, заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальностю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Професор кафедри диференціальних рівнянь
Львівського національного університету
імені Івана Франка,
доктор фіз.-мат. наук, професор Бокало М. М.

Бокало М.М.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА
ЗКПО 02070987