

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Шань Марії Олексіївни

"Усувні особливості розв'язків анізотропних параболічних рівнянь" ,

яка подана до захисту на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння

Проблему усувності ізольованих особливих точок розв'язків диференціальних рівнянь почали активно вивчати після виходу роботи Дж. Серріна у 1960-х роках, в якій було знайдено умови усувності сингулярностей для квазілінійних еліптических рівнянь. А до цього часу об'єктом дослідження були тільки лінійні рівняння з абсорбційним членом і при цьому розглядались лише радіальні розв'язки цих рівнянь. Стрімкий розвиток теорії нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними у 80-х роках минулого століття спричинив дослідження нерадіальних сингулярних розв'язків диференціальних рівнянь з абсорбційним членом, до якого причетні Б. Гідас, Д. Спарк, П. Л. Ліонс та Л. Верон. Пізніше було багато публікацій з урахуванням різних аспектів проблеми сингулярності розв'язків диференціальних рівнянь, серед яких можна відмітити статті Х. Брезіса, Д. Васкеса, Л. Верона, Л. Ніренберга, П. Бараса А. Фрідмана, С. Камін, Л. Пелет'єра, В.А. Галактіонова, С.П. Курдюмова, А.А. Самарського та ін. Вищезгадані результати і багато інших отримані, в основному, для ізотропних диференціальних рівнянь еліптичного та параболічного типів. Водночас, в останні десятиліття зростає зацікавленість анізотропними еліптичними та параболічними рівняннями завдяки їхньому застосуванню в моделюванні нелінійних фізичних процесів, що відбуваються у неоднорідних середовищах. Але для анізотропних параболічних рівнянь, які є об'єктом дослідження дисертаційної роботи, залишається багато нерозв'язаних питань, зокрема усувність ізольованих особливостей розв'язків. Дослідження цього питання ускладнюється тим, що точний вигляд фундаментального розв'язку для таких рівнянь невідомий. Отож, тема даної дисертаційної роботи є актуальною.

Об'єктом дослідження дисертації є анізотропні рівняння типу рівнянь нестационарної фільтрації в пористому середовищі, тобто узагальнення рівняння

$$u_t - \Delta u^m = 0, \quad u \geq 0, \quad \text{в } \Omega_T, \quad (1)$$

зокрема, вигляду

$$u_t - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} (u^{m_i})_{x_i x_i} + a(u, \nabla u) = 0, \quad u \geq 0, \quad \text{в } \Omega_T, \quad (2)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, Ω – область (обмежена чи необмежена) в \mathbb{R}^n , $0 \in \Omega$, $T > 0$, $m > 0$, $m_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – задана неперервна функція зі степеневим ростом за своїми аргументами. Розглядаються слабкі розв'язки рівняння (2), які визначаються так.

Нехай

- $C_c^1(\Omega_T)$ – лінійний простір функцій з $C^1(\Omega_T)$, які мають компактний носій (в Ω_T), тобто простір фінітних неперервно диференційовних функцій,
- $C_0^1(\widehat{\Omega}_T)$, де $\widehat{\Omega}_T := \Omega \times [0, T]$, – лінійний простір функцій з $C^1(\widehat{\Omega}_T)$, які мають компактний носій (в $\widehat{\Omega}_T$),
- $C_*^1(\widehat{\Omega}_T)$ – лінійний простір функцій з $C^1(\widehat{\Omega}_T)$, які зануляються в околах точки $(0, 0)$.

Означення 1. Під слабким розв'язком рівняння (2) розуміється вимірна функція $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ така, що для будь-якої функції $\psi \in C_c^1(\Omega_T)$ маємо

$$\psi u \in L^\infty(\Omega_T) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \quad (3)$$

i

$$\int\int_{\Omega_T} \left[-u\psi_t + \sum_{i=1}^n u^{m_i-1} u_{x_i} \psi_{x_i} + a(u, \nabla u)\psi \right] dxdt = 0 \quad (4)$$

для довільних $\psi \in C_c^1(\Omega_T)$.

Означення 2. Під слабким розв'язком рівняння (2), який задоволяє початкову умову

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

розуміється функція $u : \widehat{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}$ така, що для будь-якої функції $\psi \in C_0^1(\widehat{\Omega}_T)$ маємо включення (3) та інтегральну рівність (4) для довільних $\psi \in C_0^1(\widehat{\Omega}_T)$.

Означення 3. Під слабким розв'язком рівняння (2), який задоволяє початкову умову (5) із заміною Ω на $\Omega \setminus \{0\}$, розуміється функція $u : \widehat{\Omega}_T \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ така, що для будь-якої $\psi \in C_*^1(\widehat{\Omega}_T)$ маємо включення (3) та інтегральну рівність (4) для довільних $\psi \in C_*^1(\widehat{\Omega}_T)$.

В цьому випадку точка $(0, 0)$ називається ізольованою особливою точкою слабкого розв'язку рівняння (2). Ця точка називається усувною особливою точкою, якщо в означенні 3 функцію ψ можна брати з простору $C_0^1(\widehat{\Omega}_T)$.

Предметом дисертаційного дослідження є поточкові оцінки слабких розв'язків розглядуваних рівнянь і використання цих оцінок для встановлення усувності ізольованих особливих точок слабких розв'язків.

Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатку зі списком публікацій автора за темою дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, завдання, об'єкт та предмет дослідження, вказано методи дослідження, сформульовано наукову новизну,

теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури за тематикою дисертації.

В *другому розділі* головним результатом є твердження про усувність особливої точки $(0, 0)$ слабкого розв'язку рівняння типу (2), якщо розв'язок має певну "асимптотику" в околі цієї точки. При цьому на вихідні дані рівняння накладаються певні додаткові умови.

В *третьому розділі* досліджується питання про поточкові оцінки типу Келлера-Оссермана слабких розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з абсорбцією і градієнтою абсорбцією (див. означення 1). Також там встановлено нерівність Гарнака.

У *четвертому розділі* встановлено, що при певних умовах на параметри рівняння типу (2) з $a(u, \nabla u) = |u|^q$ або $a(u, \nabla u) = |\nabla u|^q$ ізольовані особливі точки слабких розв'язків цих рівнянь є усувними. Така властивість має місце за рахунок, зокрема, наявності абсорбції. Для доведення відповідних результатів використано результати третього розділу.

Варто відзначити, що дисерантка при написані дисертації вирішила складні ідейні та технічні проблеми, застосувала факти з різних галузей математики. Зокрема, у дисертаційній роботі використані ітераційна техніка Де Джорджі, метод локальних енергетичних оцінок, метод точних поточкових оцінок розв'язків типу "нелінійного потенціалу", який був запропонований І. В. Скрипніком для еліптичних дивергентних квазілінійних рівнянь, розвинutий І.І. Скрипніком для параболічних рівнянь та адаптований в поданій роботі для анізотропних параболічних рівнянь.

Основні результати дисертації оформлені у вигляді теорем, які доведені акуратно і строго математично. Усі результати є новими, мають значний науковий інтерес і достатньо повно опублікованими в 6-ти фахових виданнях, з яких 5 – статті у виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз, а також добре апробовані на наукових конференціях.

Робота має теоретичний характер, її результати можуть бути використані у подальших дослідженнях властивостей розв'язків рівнянь із частинними похідними.

Автореферат повністю та правильно відображає зміст дисертації.

Дисертаційна робота написана на високому науковому рівні, оформлена акуратно і згідно з чинними вимогами до оформлення дисертацій, а матеріал в ній викладено послідовно й чітко. Маю тільки кілька незначних зауважень.

1. На мій погляд, означення слабких розв'язків і слабких розв'язків з ізольованими особливими точками, які дані в роботі, є досить громіздкими і непрозорими. Означення 1–3, які вище наведені, є еквівалентними наведеним в роботі, але простіше та прозоріше формулюються. Тому я б пропонував автору врахувати це в майбутньому.

2. Варто було б уточнити використання позначення "loc" в означенні 3.4.

3. Позначення " $C(0, T; L^2(\Omega))$ " не є вдалим, треба використовувати адекватне даній ситуації позначення " $C([0, T]; L^2(\Omega))$ " лінійного простору функцій $u : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$, які є неперервними у всіх точках відрізка $[0, T]$ (включаючи його кінці).

Ці зауваження та описки і мовні огріхи граматичного і стилістичного характеру, які інколи зустрічаються в тексті, не мають принципового значення і не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

Дисертація є завершеною працею, в якій отримані нові науково обґрунтовані результати, що в сукупності вирішують конкретну наукову задачу суттєвого значення для теорії диференціальних рівнянь.

Вважаю, що дисертаційна робота "Усувні особливості розв'язків анізотропних парabolічних рівнянь" задовольняє всім вимогам ДАК України щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її автор, Шань Марія Олексіївна, заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Професор кафедри диференціальних рівнянь
Львівського національного університету
імені Івана Франка,
доктор фіз.-мат. наук, професор

Бокало М. М.

