# ВІДЗИВ

офіційного опонента про дисертацію Євгенії Олександрівни Євгеньєвої «Граничні режими із сингулярним загостренням у квазілінійних параболічних рівняннях» представленої на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння

Науковий напрям в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, до якого належить дисертація (і назва якого майже співпадає з назвою дисертації), виник у 60-х роках минулого століття у зв'язку з роботами по лазерному термоядерному синтезу. Вивчалась можливість розігріву термоядерного палива (дейтерієва-тритієва суміш) з допомогою потужних лазерних променів, під дією яких на межі області, що зайнята паливом, утворювалась надвисока температура, яка могла (або не могла) розповсюджуватись на всю область.

У різних математичних моделях цього процесу розігріву температура на межі області задається граничною умовою, відповідно до якої вона зростає до нескінченності за скінченний проміжок часу (граничний режим із сингулярним загостренням), а її розповсюдження на область описується квазілінійними параболічними рівняннями. Задача полягає у вивченні поведінки температури в області в залежності від температурного режиму на межі.

Вже в перших дослідженнях, проведених різними групами математиків під керівництвом О.А. Самарського, були виявлені цікаві особливості цієї поведінки. Зокрема було виявлено ефект просторової локалізації нескінченної температури у деякому околі біля межі області і проведена певна класифікація таких режимів локалізації (S, LS, HS – режими). Ці дослідження були продовжені багатьма математиками в напрямку знаходження більш точних умов на граничні режими, при яких має місце локалізація розв'язків лінійних та напівлінійних рівнянь другого порядку. Усі дослідження проводились бар'єрною технікою порівняння з автомодельними розв'язками, який ефективно застосовувся в основному в одновимірних задачах.

У 1999 році А.Є. Шишковим та А.Г. Щелковим був запропонований, а пізніше в роботах А.Є. Шишкова та В.О. Галактіонова суттєво розвинений, новий метод вивчення локалізованих режимів із загостренням у багатовимірних областях для широкого класу параболічних рівнянь. Він отримав назву метода енергетичних оцінок. Саме метод енергетичних оцінок застосовується в дисертації Є.О. Євгеньєвої, основною метою якої стала модифікація методу для дослідження поведінки розв'язків біля зони сингулярності для широкого класу квазілінійних параболічних рівнянь.

Дисертація складається із вступу, 3-х розділів, висновків і списку літератури. У вступі обґрунтовано актуальність досліджуваних задач, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, сформульовано мету, задачі та методи дослідження, визначено наукову новизну і значення отриманих результатів.

В першому розділі дається огляд літератури по темі дисертації, описано історію проблематики, наведені ключові результати, отримані в області дослідження за останній час.

Другий розділ присвячений вивченню граничних режимів із загостренням для квазілінійних параболічних рівнянь з подвійною нелінійністю. В циліндричній області $Q=(0,T)\times\Omega$, $\Omega$ – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 1)$, $1\leq T<\infty$ розглядається задача

$$(|u|^{q-1}u)_t-\sum_{i=1}^{n}(a_i(t,x,u,\nabla u))_{x_i}=0,$$
$$u(x,0)=u_0(x),$$

де $a_i(t,x,s,\xi)$ – неперервні функції своїх аргументів, що задовольняють умови коерцитивності і росту

$$d_0 |\xi|^{p+1} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,s,\xi)\xi_i, \quad |a_i(t,x,s,\xi)| \leq d_1 |\xi|^p$$

$$\forall (t,x,s,\xi) \subset Q \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \quad p \geq q > 0.$$

Дається визначення слабкого (енергетичного) розв'язку цієї задачі.

Граничний режим на межі $\partial\Omega \subset C^2$ характеризується функцією $F(t)$ і розглядається клас $U_{u_0,F}$ енергетичних розв'язків, що задовольняють оцінку

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{\Omega} |u(\tau,x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau \leq F(t), \forall t \in (0,T).$$

Для характеризації розв'язків у внутрішніх областях

$$\Omega(s) = \quad x \in \Omega, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > s, s > 0$$

введені енергетичні функції

$$E_u(t,s) = \int_{T/2}^{t} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau,$$

$$h_u(t,s) = \sup_{0<\tau<t} \int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{q+1} dx.$$

Основним результатом другого розділу є теореми 2.5, 2.6, 2.7.

В теоремі 2.5 отримано оцінку профілю слабких розв'язків рівняння з нейтральною дифузією ($p$=$q$) за умови експоненціального характеру загострення граничного режиму

$$F(t) = \exp\left(\omega (T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right), \quad t < T, \mu > 0, \omega > 0.$$

Така оцінка має вигляд

$$h_u(t,s) + E_u(t,s) \leq C_1 \exp\left(C_2 \omega^{\frac{p+\mu}{\mu}} s^{-\frac{p+1}{\mu}}\right).$$

Отримана оцінка дозволяє відслідкувати фазу переходу від LS до S режиму при $\mu \to 0$.

В теоремі 2.6 отримано оцінку профілю слабких розв'язків рівняння з нейтральною дифузією за умови степеневого характеру загострення граничного режиму

$$F(t) = \omega_0 (T-t)^{-\alpha}, \quad t < T, \omega_0 > 0, \alpha > \frac{1}{p+1}.$$

Ця оцінка має вигляд

$$h_u(t,s) + E_u(t,s) \le G\omega_0 s^{-\alpha(p+1)},$$

тобто має місце LS режим локалізації.

В теоремі 2.7 отримано оцінку профілю слабких розв'язків рівнянь з повільною дифузією ($p>q$) за умови степеневого характеру загострення граничного режиму. Показник степеня вибрано близьким до критичного, що відповідає S-режиму локалізації. Тому ця оцінка дозволяє відслідкувати фазу переходу від LS до S-режиму.

В третьому розділі вивчаються квазілінійні рівняння з виродженим потенціалом адсорбції

$$|u|^{q-1} u \quad_t - \Delta_p == -b(t,x) |u|^{\lambda-1} u, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega,$$

де $\lambda > p \ge q > 0$, $\Delta_p$ – $p$-Лапласіан.

Потенціал адсорбції $b(t,x)$ неперервна функція в $(0,T) \times \Omega$, що задовольняє умови

$$b(t,x) > 0 \quad \text{в } (0,T) \times \overline{\Omega}, \quad b(t,x) = 0 \quad \text{на } \; T \quad \times \Omega,$$

$$a_1(t) g_1(d(x)) \le b(t,x) \le a_2(t) g_2(t,x),$$

де $d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$, а $g_1(s) \le g_2(x)$ – неспадні додатні функції.

Даються визначення слабких розв'язків цього рівняння, а також великих розв'язків, тобто таких, що приймають нескінченні значення у початковий момент часу і на межі області $\Omega$.

Основними результатами третього розділу є теореми 3.8, 3.9, 3.10, в яких отримані енергетичні оцінки (оцінки функцій $E_u(t,s)$, $h_u(t,s)$) для слабких розв'язків $u(t,x)$ для різних характерів виродження потенціалу абсорбції $b(t,x)$ при $t=T$: експоненціального виродження в теоремі 3.8 (при $p=q$) і степеневого в теоремі 3.9 (при $p=q$) і теоремі 3.10 (при $p>q$). Ці оцінки справедливі також і для великих розв'язків і саме для них вони представляють найбільший інтерес за умови їх існування.

В кінці розділу розглядаються деякі окремі випадки і на їх прикладі обговорюються питання точності отриманих оцінок.

Таким чином тема дисертаційної роботи Є.О. Євгеньєвої вельми актуальна. Отримані в дисертації результати нові та строго доведені. Слід визначити, що автор добре володіє непростими конструкціями і методами енергетичних оцінок, в удосконалення яких вона внесла свою частку. Як самі результати роботи так і розвинуті у ній методи можуть бути використані для дослідження питань локалізації розв'язків широкого класу нелінійних параболічних рівнянь. Основні результати дисертації з їх доведеннями повно представлені у 5 статтях, що опубліковані у журналах високого міжнародного рівня. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Відзначимо деякі зауваження, які скоріше носять характер побажань.

1. В другому розділі дисертації загострення граничного режиму характеризується функцією $F(t)$ і у відповідності з цим вводяться класи слабких розв'язків $U_{u_0 F}$ з початковою температурою $u_0(x)$ і невідомою температурою $f(t,x)$ на межі. Було б бажано оцінити залежність $f(t,x)$ від $F(t)$ і встановити існування слабких розв'язків класу $U_{u_0 F}$, таких що $f(t,x)\to\infty$ при $t\to T$. Аналогічно бажано було б встановити існування великих розв'язків для рівнянь з подвійною нелінійністю і виродженим потенціалом абсорбції, що вивчаються у третьому розділі.

2. Бажано було б проаналізувати оцінки, що отримані в теоремах 2.6 і 2.7 з метою осмислення різниці впливу нейтральної і повільної дифузії на фазу переходу від LS до S режиму при степеневому загостренні граничного режиму.

3. Є деякі описки і неточності у викладенні матеріалу. Наприклад, на стор. 55 в формулі (2.7): $\tau \to t$; на стор. 47 в формулі (1.25) не визначено позначення $\langle\, , \rangle$ і $\tau \to t$; те ж саме на стор. 4 і 6 і т.д. На стор. 32 «Controlled Thermonuclear Fusion» скоріше перекладається як «керований термоядерний синтез».

Безумовно ці зауваження ніяким чином не знижують наукової цінності роботи, що являє собою цілісне завершене дослідження на актуальну тему і є суттєвим внеском у якісну теорію нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Враховуючи все сказане, вважаю, що дисертація Є.О. Євгеньєвої «Граничні режими із сингулярними загостреннями у квазілінійних параболічних рівняннях» задовольняє всім вимогам до кандидатських дисертацій, а її автор Євгенія Олександрівна Євгеньєва заслуговує на присудження їй вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент, доктор фіз.-мат. наук,
професор, академік НАН України Є.Я.Хруслов

Особистий підпис гр. Хруслова Є.Я
ЗАСВІДЧУЮ
Учений секретар ФТІНТ
ім. Б.І. Вєркіна НАН України
кандидат фізико-математичних наук
Калиниченко О.И

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. Вєркіна НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
Ідентифікаційний код 03534601
УКРАЇНА, м.ХАРКІВ