

Донецький національний університет імені Василя Стуса
Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Шань Марія Олексіївна

УДК 517.956.4

ДИСЕРТАЦІЯ

**УСУВНІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ АНІЗОТРОПНИХ
ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ**

Спеціальність 01.01.02 - "диференціальні рівняння"
(фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ М.О. Шань

Науковий керівник Скрипнік Ігор Ігорович,
доктор фізико-математичних наук, доцент

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Шань М. О. “Усувні особливості розв’язків анізотропних параболічних рівнянь”. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 "Диференціальні рівняння" - Донецький національний університет імені Василя Стуса, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2019.

Дисертаційна робота складається з вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатку зі списком публікацій автора за темою дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, завдання, об’єкт та предмет дослідження, вказано методи дослідження, сформульовано наукову новизну, теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячено огляду та аналізу літератури.

Бурхливий розвиток теорії усувності ізольованих особливостей починається у 1960-х роках у зв’язку з виходом роботи Дж. Серріна, який отримав умови усувності сингулярностей для квазілінійних еліптичних рівнянь дивергентного вигляду. Адаже до цього часу об’єктом дослідження були тільки лінійні рівняння та рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q і при цьому розглядались лише радіальні розв’язки цих рівнянь. Різкий розвиток теорії нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних у 80-х роках спричинив ще один прорив - дослідження нерадіальних сингулярних розв’язків рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q , який був ініційований Б. Гідасом, Д. Спарком, П. Л. Ліонсом та Л. Вероном. Після цього було опубліковано багато статей з урахуванням різних аспектів задачі сингулярності для вищезазначених рівнянь, а також для еволю-

ційного рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q . Серед науковців, які отримали вагомні результати, можна відмітити Х. Брезіса, Д. Васкеса, Л. Верона, Л. Ніренберга, П. Бараса. Що стосується нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь, то перші значні результати усунності особливостей пов'язані з Х. Брезісом, А. Фрідманом, С. Каміном, Л. Пелет'єром, В.А. Галактіоновим, С.П. Курдюмовим, А.А. Самарським та ін. Останніми десятиліттями зростає зацікавленість до анізотропних параболічних та еліптичних рівнянь завдяки їхньому застосуванню в моделюванні нелінійних фізичних процесів, що відбуваються у неоднорідних середовищах.

Вищезазначені результати і деякі інші, які висвітлено в даному розділі, отримані для рівнянь, для яких якісна теорія здобула повноту й завершеність. Водночас, для анізотропних параболічних рівнянь, які є об'єктом дослідження дисертаційної роботи, залишається багато нерозв'язаних питань, зокрема усунність ізольованих особливостей розв'язків, при цьому дослідження цього питання ускладнюється тим, що точний вигляд фундаментального розв'язку для таких рівнянь невідомий.

Під час огляду літератури було визначено актуальні напрямки досліджень та важливі відкриті проблеми у цій галузі, сформульовано мету роботи.

Другий розділ присвячено дослідженню слабких розв'язків квазілінійного параболічного рівняння з дивергентною головною частиною

$$u_t - \operatorname{div} A(x, t, u, \nabla u) = b(x, t, u, \nabla u), \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

які задовольняють початкову умову

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \{x^0\},$$

де $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$, Ω обмежена область в R^n , $n \geq 3$, $x^0 \in \Omega$, $0 < T < \infty$.

Припускається, що коефіцієнти $A(x, t, u, \varsigma)$, $b(x, t, u, \varsigma)$ визначені при $(x, t) \in \Omega_T$, $u \in R$, $\varsigma \in R^n$, задовольняють умові Каратеодорі та

мають місце нерівності

$$a_i(x, t, u, \varsigma) \varsigma \geq \nu_1 \sum_{i=1}^n |u|^{m_i-1} |\varsigma_i|^2,$$

$$|a_i(x, t, u, \varsigma)| \leq \nu_2 |u|^{\frac{m_i-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |u|^{m_j-1} |\varsigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$|b(x, t, u, \varsigma)| \leq \nu_2 |u|^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |u|^{m_j-1} |\varsigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

де ν_1, ν_2 додатні сталі і

$$\min_{1 \leq i \leq n} m_i > 1 - \frac{2}{n}, \quad \max_{1 \leq i \leq n} m_i < m + \frac{2}{n}, \quad m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i.$$

Введемо необхідні означення для формулювання головного результату розділу.

Означення 2.1 Будемо казати, що функція ϕ належить простору $V_m(\Omega_T)$, якщо $\phi \in C(0, T, L^2(\Omega))$ і $\sum_{i=1}^n \iint |\phi|^{m_i-1} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 dxdt < \infty$.

Означення 2.2 Під слабким розв'язком поставленої задачі будемо розуміти функцію $u \geq 0$, яка задовольняє включенню $u\psi \in V_m(\Omega_T) \cap L^2(0, T, W^{1,2}(\Omega))$ і виконується інтегральна тотожність

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u(x, \tau) \varphi \psi dx - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} u \frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial t} dxdt + \\ & + \sum_{i=1}^n \iint_0^{\tau} a_i \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial x_i} dxdt - \iint_0^{\tau} b \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi \psi dxdt = 0 \end{aligned}$$

для будь-якого $\tau \in (0, T)$, для будь-якої пробної функції $\varphi \in V_m(\Omega_T) \cap L^2(0, T, W^{1,2}(\Omega))$ й для будь-якої функції $\psi \in C^1(\overline{\Omega_T})$, яка обертається в 0 в околі точки $(x^0, 0)$.

Означення 2.3 Будемо казати, що слабкий розв'язок u має усуну особливість в точці $(x_0, 0)$, якщо інтегральна тотожність у попередньому означенні має місце для функції $\psi \equiv 1$.

Умова усунуності особливості сформульована у термінах поведінки функції $M_u(r) = \text{ess sup}\{|u(x, t)| : (x, t) \in D(R_0) \setminus D(r)\}$, де R_0 таке

достатньо маленьке фіксоване додатне число, що $D(R_0) \subset \Omega_T$ і

$$D(r) = \left\{ (x, t) \in \Omega_T : \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i - x_i^0|}{r^{k_i}} \right)^2 + \frac{t}{r^k} \leq 1 \right\}, k = n(m-1) + 2, k_i = \frac{2+n(m-m_i)}{2}.$$

Основним результатом розділу є така теорема.

Теорема 2.1 Нехай u є слабким розв'язком поставленої задачі. Якщо виконується умова

$$\lim_{r \rightarrow 0} M_u(r)r^n = 0.$$

тоді особливість розв'язку u в точці $(x^0, 0)$ є усувною.

У **третьому розділі** досліджуються слабкі розв'язки анізотропних параболічних рівнянь з абсорбцією і градієнтною абсорбцією, для яких отримано поточкові верхні оцінки, які записані в термінах відстані до межі області. Такі оцінки називаються оцінками типу Келлера-Оссермана, вони мають багато застосувань, зокрема за допомогою них отримано нерівність Гарнака у цьому розділі та умови усувності особливості в наступному розділі.

У **підрозділі 3.1** розглянуто подвійно нелінійне параболічне рівняння з абсорбційним членом, який залежить тільки від розв'язку:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \left(u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \right)_{x_i} + f(u) = 0, m_i > 1, p_i \geq 2.$$

Основним результатом є оцінки типу Келлера-Оссермана для розв'язків цього рівняння та більш точна верхня оцінка розв'язків при додатковій умові на абсорбційний член, які сформульовані у теоремі 3.1 та твердженні 3.1.

Підрозділ 3.2 містить дослідження слабких розв'язків квазілінійного параболічного рівняння, модельним випадком якого є анізотропне рівняння пористого середовища з абсорбцією

$$u_t - \sum_{i=1}^n \left(u^{m_i-1} u_{x_i} \right)_{x_i} + f(u) = 0,$$

де частина показників m_i більше 1, частина менше 1.

Головний результат сформульован у теоремі 3.2, в якій встановлено оцінки типу Келлера-Оссермана для розв'язків розглядаємого рівняння.

У **підрозділі 3.3** розглядається анізотропне рівняння пористого середовища з градієнтною абсорбцією

$$u_t - \sum_{i=1}^n (u^{m_i-1} u_{x_i})_{x_i} + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^{q_i} = 0,$$

де частина показників $m_i > 1$, а інша частина $m_i < 1$, і

$$\frac{2+nm}{1+n} \leq q < 2, \quad \max_{0 \leq i \leq n} q_i < q \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i}.$$

Для такого рівняння отримано оцінки типу Келлера-Оссермана, цей результат є ключовим у підрозділі і сформульован у теоремі 3.3.

Результати дослідження з першого підрозділу застосовуються для доведення нерівності Гарнака для нелінійного ізотропного параболічного рівняння з абсорбційним членом у **підрозділі 3.4** (теорема 3.4).

У **четвертому розділі** досліджується питання усувності ізольованої особливості для слабких розв'язків рівнянь, які розглянуті в попередньому розділі.

У **підрозділі 4.1** розглядається анізотропне рівняння пористого середовища з абсорбційним членом вигляду u^q

$$u_t - \sum_{i=1}^n (u^{m_i-1} u_{x_i})_{x_i} + u^q = 0.$$

У першому пункті цього підрозділу досліджується випадок, коли $m_i \geq 1$, $i = \overline{1, n}$. У другому пункті розглядається рівняння, в якого частина показників $m_i < 1$, $i = \overline{1, s}$ (сингулярний випадок), а інша частина $m_i > 1$, $i = \overline{s+1, n}$ (вироджений випадок).

В обох випадках умова усувності виражається в умові на показник абсорбції $q \geq m + \frac{2}{n}$, при виконанні якої особливість в точці $(0, 0)$ є усувною (теорема 4.1, теорема 4.2).

У **підрозділі 4.2** розглядається анізотропне рівняння пористого середовища з градієнтною абсорбцією, яке було досліджено у підрозділі 3.3. Для слабких розв'язків цього рівняння отримана умова усувності особливості: якщо $q = \frac{2+nm}{1+n}$ і $q_i = \frac{2+nm}{1+n+\frac{n}{2}(m-m_i)}$, $i = \overline{1, n}$ тоді особливість в точці $(0, 0)$ є усувною. Результат сформульован у теоремі 4.3

Ключові слова: анізотропні параболічні рівняння, абсорбція, градієнтна абсорбція, слабкі розв'язки, усувність ізольованих особливостей, оцінки типу Келлера-Оссермана.

ABSTRACT

Shan Mariia. “Removable singularities for solutions of anisotropic parabolic equations”. – Qualification scientific paper, manuscript.

Thesis for a Candidate degree in Physics and Mathematics on specialty 01.01.02 "Differential equations" – Vasul' Stus Donetsk National University, V. N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2019.

Thesis consists of introduction, four sections, conclusions, bibliography and appendix with the author's publications list.

The introduction substantiates the relevance of the studied problems, defines the purpose, objectives, object and subject of the research, indicates the methods of research, formulated scientific novelty, theoretical and practical significance of the obtained results. The information about publications, personal contribution and the approbation of results are provided.

First section is devoted to the survey and analysis of the literature.

The active development of the theory of removable singularity began in the 1960s in connection with J. Serrin's work, in which was obtained the condition for removability of singularity for quasilinear elliptic equations of the divergent form. Because before only linear equations and Laplace equation with an absorption term or the source of the form u^q have been the object of the study, and only radial solutions of these equations were considered. Around 1980 the sharp development of nonlinear partial differential equations theory allowed another breakthrough in the study of nonradial singular solutions of the Laplace equation with an absorption term or source of the form u^q . This was initiated by B. Gidas, D. Spark, P. L. Lions and L. Veron. After this first period, many articles have been published taking into account the different aspects of the singularity problem for the above equations and also for the evolution Laplace equation with an absorption term or a source of the form u^q . Among the people who published significative results in this directions are H. Brezis, D. Vazquez, L. Veron, L. Nirenberg, and P. Baras. As for the nonlinear parabolic equations, the first significative results about the

singularity problem are due to H. Brezis, A. Friedman, S. Kamin, L. Peletier, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov, A.A. Samarskii and others. During the last decade has been growing interest in anisotropic parabolic and elliptic equations due to their use in modeling nonlinear physical processes occurring in heterogeneous environments.

The above results and some of the others, which were discussed in this section, are obtained for equations for which the qualitative theory is complete. At the same time, many unresolved issues are remained for anisotropic parabolic equations which are the subject of dissertation research in particular the removability of isolated singularities. The study of this question is complicated by the fact that the fundamental solution for such equations is unknown.

During the review of the literature, current research areas and important open issues in this area were identified, and the purpose of the work was formulated.

The second section is devoted to the study of weak solutions of a quasilinear parabolic equation in a divergent form

$$u_t - \operatorname{div} A(x, t, u, \nabla u) = b(x, t, u, \nabla u), \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

satisfying a initial condition

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \{x^0\},$$

where $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$, Ω is a bounded domain in R^n , $n \geq 3$, $x^0 \in \Omega$, $0 < T < \infty$.

We suppose that the functions $A(x, t, u, \varsigma)$, $b(x, t, u, \varsigma)$, $(x, t) \in \Omega_T$, $u \in R$, $\varsigma \in R^n$ satisfy the Caratheodory conditions and the following structure conditions hold

$$a_i(x, t, u, \varsigma) \varsigma \geq \nu_1 \sum_{i=1}^n |u|^{m_i-1} |\varsigma_i|^2,$$

$$|a_i(x, t, u, \varsigma)| \leq \nu_2 |u|^{\frac{m_i-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |u|^{m_j-1} |\varsigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$|b(x, t, u, \varsigma)| \leq \nu_2 |u|^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |u|^{m_j-1} |\varsigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

where ν_1, ν_2 are positive constants and

$$\min_{1 \leq i \leq n} m_i > 1 - \frac{2}{n}, \quad \max_{1 \leq i \leq n} m_i < m + \frac{2}{n}, \quad m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i.$$

Let us introduce the necessary definitions to formulate the main result of the section.

Definition 2.1 We say that $\phi \in V_m(\Omega_T)$ if $\phi \in C(0, T, L^2(\Omega))$ and $\sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} |\phi|^{m_i-1} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 dx dt < \infty$.

Definition 2.2 By a weak solution of the problem we mean the function $u(x, t) \geq 0$ satisfying the inclusion $u\psi \in V_m(\Omega_T) \cap L^2(0, T, W^{1,2}(\Omega))$ and the integral identity

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u(x, \tau) \varphi \psi dx - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} u \frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial t} dx dt + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau} \int_{\Omega} a_i \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial x_i} dx dt - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} b \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi \psi dx dt = 0 \end{aligned}$$

holds true for $\tau \in (0, T)$, any testing function $\varphi \in V_m(\Omega_T) \cap L^2(0, T, W^{1,2}(\Omega))$ and any $\psi \in C^1(\overline{\Omega_T})$, vanishing in a neighborhood of $(x^0, 0)$.

Definition 2.3 We say that a weak solution u has a removable singularity at the point $(x^0, 0)$ if the integral identity in the previous definition holds for the function $\psi \equiv 1$.

We formulate the removability result in the form of behavior of the function $M_u(r) = \text{ess sup}\{|u(x, t)| : (x, t) \in D(R_0) \setminus D(r)\}$, where R_0 is some sufficiently small fixed positive number such that $D(R_0) \subset \Omega_T$ and

$$D(r) = \left\{ (x, t) \in \Omega_T : \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i - x_i^0|}{r^{k_i}} \right)^2 + \frac{t}{r^k} \leq 1 \right\}, \quad k = n(m-1) + 2, \quad k_i = \frac{2+n(m-m_i)}{2}.$$

The main result of the section is the following theorem.

Theorem 2.1 Let u be a weak solution of the problem. Then the singularity of solution u at the point $(x^0, 0)$ is removable if

$$\lim_{r \rightarrow 0} M_u(r)r^n = 0.$$

In the **third section** weak solutions of anisotropic parabolic equations with absorption and gradient absorption are investigated, pointwise upper bounds in terms of distance to the boundary for these solutions are obtained. Such estimates are called estimates of Keller-Osserman type. They have many application in particular using these estimate we establish the Harnack inequality in this section and the sufficient condition for removability of singularity for solutions of such equations in the next section.

In **subsection 3.1** we deal with double nonlinear parabolic equation with absorption term which depends only on the solution:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \left(u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \right)_{x_i} + f(u) = 0, \quad m_i > 1, \quad p_i \geq 2.$$

The main results are the Keller-Osserman estimates for the solutions of the equation and a more precise sub-estimate of the solutions under the additional condition for the absorption term, which are formulated in theorem 3.1 and statement 3.1.

Subsection 3.2 is devoted to the study of quasilinear parabolic equations model of which is anisotropic porous medium equation with absorption term

$$u_t - \sum_{i=1}^n \left(u^{m_i-1} u_{x_i} \right)_{x_i} + f(u) = 0,$$

where part of $m_i < 1$ and another part of $m_i > 1$.

The main result is formulated in theorem 3.2, in which we obtain the Keller-Osserman type estimates for solutions of the equation under consideration.

In **subsection 3.3** anisotropic porous medium equation with gradient absorption term

$$u_t - \sum_{i=1}^n \left(u^{m_i-1} u_{x_i} \right)_{x_i} + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^{q_i} = 0$$

are considered under the condition that some m_i can be less than 1 and the other m_i can be greater than 1, and

$$\frac{2+nm}{1+n} \leq q < 2, \quad \max_{0 \leq i \leq n} q_i < q \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i}.$$

The main result in the section is the Keller-Osserman type estimates which is formulated in theorem 3.3

The results of the research in subsection 3.1 are used to prove the Harnack inequality for a nonlinear isotropic parabolic equation with absorption term in **subsection 3.4** (theorem 3.4).

In **the forth section** we consider the question of the removability of isolated singularity for the solutions of the equations, which were investigated in the previous section.

In **subsection 4.1** we deal with anisotropic porous medium equation with absorption term of the form u^q

$$u_t - \sum_{i=1}^n (u^{m_i-1} u_{x_i})_{x_i} + u^q = 0.$$

The case $m_i \geq 1, i = \overline{1, n}$ are investigated in the first paragraph of this subsection. In the second paragraph we consider equation in which one part of $m_i < 1$ (singular case) and another part of $m_i > 1$ (degenerate case).

In both paragraphs, the condition of the removability of isolated singularity is expressed in terms of the absorption exponent: $q \geq m + \frac{2}{n}$. Under this condition the singularity at the point $(0, 0)$ is removable (theorem 4.1, theorem 4.2).

In **subsection 4.2** we consider the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term, which was investigated in subsection 3.3. Condition of the removability of isolated singularity for the nonnegative solutions of the equation is obtained. If $q = \frac{2+nm}{1+n}$ and $q_i = \frac{2+nm}{1+n+\frac{n}{2}(m-m_i)}$, $i = \overline{1, n}$ then the singularity at the point $(0, 0)$ is removable. The result is formulated in theorem 4.3

Keywords: anisotropic parabolic equations, absorption, gradient absorption term, weak solution, removability of isolated singularity, Keller-Osserman type estimates.

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Шань М. О. Априорні оцінки типу Келлера-Оссермана для двічі нелінійних анізотропних параболічних рівнянь з абсорбцією / М. О. Шань // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. — 2018. — Т. 32. — С. 149—159.

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

2. Shan M. A. Removability of an isolated singularity for solutions of anisotropic porous medium equation with absorption term / M. A. Shan // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 222. — P. 741—749.
(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)
3. Shan M. A. Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous medium equation / M. A. Shan // Annali di Matematica Pura ed Applicata. — 2017. — Vol. 196. — P. 1913—1926.
(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 1.268), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)
4. Shan M. A. Keller-Osserman a priori estimates and the Harnack inequality for quasilinear elliptic and parabolic equations with absorption term / M. A. Shan, I. I. Skrypnik // Nonlinear Analysis. — 2017. — Vol. 155. — P. 97—114.
(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 1.291), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)

Особистий внесок здобувача. Здобувачу належать Proposition 1.3, Proposition 1.4, Theorem 1.2, Theorem 1.4.

5. Shan M. A. Keller-Osserman a priori estimates and removability result for the anisotropic porous medium equation with absorption term / M. A. Shan // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — V. 235. — P. 63—73.

(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)

6. Shan M. A. Keller-Osserman estimates and removability result for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. A. Shan, I. I. Skrypnyk // Mathematische Nachrichten. — 2019. — Vol. 292. — P. 436—453.

(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 0.847), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)

Особистий внесок здобувача. Здобувачу належать Theorem 1.1, Theorem 1.2.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Shan M. A. On the precise condition for removability of isolated singularities for anisotropic porous media equation / M. A. Shan // International Conference on Differential Equations: International conference dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20–24, 2016: abstr. — Lviv, 2016. — P. 107.
8. Shan M. A. Removability of isolated singularity for anisotropic porous medium equation with absorption term / M. A. Shan // Differential equations and Applications: 5th International conference for young scientists, dedicated to Yaroslav Lopatynsky, November 9–11, 2016: abstr. — Kyiv, 2016. — P. 129—130.

9. Shan M. O. On the precise condition for removability of isolated singularities for anisotropic porous medium equation with absorption term / M. O. Shan // XVII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям "Еругинские чтения-2017", 16-20 мая 2017 г.: тез. докладов. — Минск, 2017. — С. 29—30.
10. Shan M. A. Removability result for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. A. Shan // Differential Equations, Mathematical Physics and Applications: International Conference, October 17-19, 2017: abstr. — Cherkasy, 2017. — P. 76—77.
11. Shan M.O. Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous media equation / M. O. Shan // Матеріали наукової конференції професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів наукового ступеня за підсумками науково-дослідної роботи за період 2015-2016 рр., ДонНУ імені Василя Стуса, 15–18 травня 2017 р.: тези доп. — Вінниця, 2017. — С. 211—212.
12. Shan M. A. Keller-Osserman a priori estimates and removability of isolated singularities for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. A. Shan // Mathematics, informatics and information technologies: International conference dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, April 19-21, 2018: abstr. — Balti, 2018. — P. 78—79.
13. Шань М. О. Результат усунутості для анізотропного рівняння пористого середовища з абсорбційним членом / М. О. Шань // Сучасні проблеми механіки та математики: Міжнародна наукова конференція, 22-26 травня, 2018 р.: тези доп. — Львів, 2018. — С. 180.
14. Shan M. O. Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. O. Shan // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Міжнародна наукова конференція

ція, присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17–19 вересня 2018 р.: тези доп. – Чернівці, 2018. — P. 34.

15. Shan M. A. Removable singularities for anisotropic parabolic equations / M. A. Shan // Contemporary Analysis and Nonlinear Boundary Problems: workshop dedicated to the 80th anniversary of B.V. Bazaliy and to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, October 17–18, 2018: abstr. — Sloviansk, 2018. — P. 8–9.
16. Shan M. O. Removability result for anisotropic parabolic equations / M. O. Shan // 6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, June 18–20, 2019: abstr. — Vinnytsia, 2019. — P. 66–68.

Зміст

ВСТУП	18
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ	25
1.1 Основні результати для ізотропних рівнянь	25
1.2 Огляд результатів для анізотропних рівнянь	33
1.3 Оцінки типу Келлера-Оссермана	37
1.4 Методи досліджень	39
Висновки до розділу 1	42
РОЗДІЛ 2 УСУВНІСТЬ ІЗОЛЬОВАНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ АНІЗОТРОПНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ	44
2.1 Формулювання задачі і основного результату.	44
2.2 Інтегральні оцінки розв'язків	47
2.3 Поточкові оцінки розв'язків	54
2.4 Доведення обмеженості розв'язку	59
2.5 Кінець доведення теореми 2.1	64
Висновки до розділу 2	64
РОЗДІЛ 3 ОЦІНКИ ТИПУ КЕЛЛЕРА-ОССЕРМАНА	66
3.1 Оцінки типу Келлера-Оссермана для подвійно нелінійного анізотропного параболічного рівняння	66
3.1.1 Допоміжні результати	70
3.1.2 Доведення теореми 3.1	72
3.1.3 Доведення твердження 3.1	76
3.2 Оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропного параболічного рівняння з абсорбцією	77
3.2.1 Інтегральні оцінки розв'язків	80
3.2.2 Доведення теореми 3.2	81

3.3	Оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропного параболического рівняння з градієнтною абсорбцією	85
3.3.1	Інтегральні оцінки розв'язків	87
3.3.2	Доведення теореми 3.3	89
3.4	Нерівність Гарнака для нелінійного параболического рівняння з абсорбцією	92
3.4.1	Локальні енергетичні оцінки	93
3.4.2	Лема типу Де Джорджі	94
3.4.3	Поширення додатності	95
	Висновки до розділу 3	97
РОЗДІЛ 4 УСУВНІСТЬ ІЗОЛЬОВАНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ ДЛЯ РІВНЯНЬ З АБСОРБЦІЄЮ ТА ГРАДІЄНТНОЮ АБСОРБЦІЄЮ		99
4.1	Усувність ізольованих особливостей розв'язків анізотропного рівняння пористого середовища з абсорбцією	99
4.1.1	Вироджений випадок	99
4.1.2	Вироджений та сингулярний випадки	105
4.2	Усувність ізольованих особливостей розв'язків анізотропного рівняння пористого середовища з градієнтною абсорбцією	109
4.2.1	Інтегральні оцінки для градієнту розв'язку	109
4.2.2	Поточкові оцінки розв'язків	121
4.2.3	Обмеженість розв'язків	123
4.2.4	Кінець доведення теореми 4.3	125
	Висновки до розділу 4	126
ВИСНОВКИ		127
Список використаних джерел		129
Додаток А		141

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження.

Задача про усунівність особливостей розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних привертає увагу великої кількості науковців. Сформулювати її можна наступним чином. Нехай функція u є розв'язком деякого рівняння на відкритій підмножині Ω в R^n за виключенням однієї точки. Задача полягає в тому, щоб продовжити функцію u на всю множину Ω , щоб нова функція \tilde{u} задовольняла цьому ж рівнянню на всій множині Ω . Перша теорема усунівності особливості була отримана Ріманом. У своїй докторській дисертації він встановив усунівність ізольованої особливості в точці x^0 для гармонічної функції двох дійсних змінних при умові, що модуль градієнту функції веде себе як $o(|x - x^0|^{-1})$, коли $x \rightarrow x^0$.

Довгий час проблема усунівності особливостей вивчалась тільки для лінійних рівнянь та радіальних розв'язків рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q . Значні результати для цих рівнянь були отримані М. Пікардом, М. Гевреєм, М. Бочером, Д. Гілбаргом, Дж. Серріном, А. Соммерфелдом, С. Чандрасекаром, Е. Хіллем та іншими. Поштовхом для подальшого розвитку теорії усунівності ізольованих особливостей стала робота Дж. Серріна, який отримав у 1965 році умови усунівності сингулярностей для квазілінійних еліптичних рівнянь з дивергентною головною частиною. Різкий розвиток теорії нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних у 80-х роках спричинив ще один прорив - дослідження нерадіальних сингулярних розв'язків рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q , який був ініційований Б. Гідасом, Д. Спарком, П. Л. Ліонсом та Л. Вероном. Після цього було опубліковано багато статей з урахуванням різних аспектів задачі сингулярності для вищезазначених рівнянь, а також для еволюційного рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q . Серед науковців, які отримали вагомні результати, можна відмітити Х. Брезіса, Д. Васкеса, Л. Верона, Л. Ніренберга, П. Бараса. Що стосу-

ється нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь, то перші значні результати усунності особливостей пов'язані з Х. Брезісом, А. Фрідманом, С. Каміном, Л. Пелет'єром, В. А. Галактіоновим, С. П. Курдюмовим, А. А. Самарським та ін.

Останнім часом спостерігається зацікавленість до вивчення розв'язків анізотропних еліптичних та параболічних рівнянь, які застосовуються в моделюванні нелінійних фізичних процесів. Для цих рівнянь якісна теорія ще не побудована, тому доцільним є їх дослідження.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь в околі сингулярної точки. Модельними випадками таких рівнянь є рівняння анізотропного пористого середовища (0.1), зокрема з абсорбцією (0.2) та градієнтною абсорбцією (0.3):

$$u_t - \sum_{i=1}^n (u^{m_i-1} u_{x_i})_{x_i} = 0, \quad (0.1)$$

$$u_t - \sum_{i=1}^n (u^{m_i-1} u_{x_i})_{x_i} + f(u) = 0, \quad (0.2)$$

$$u_t - \sum_{i=1}^n (u^{m_i-1} u_{x_i})_{x_i} + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^{q_i} = 0, \quad (0.3)$$

де частина показників $m_i < 1, i = \overline{1, s}$ (сингулярний випадок), а інша частина $m_i > 1, i = \overline{s+1, n}$ (вироджений випадок).

Також розглянуто подвійно нелінійне анізотропне параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \left(u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \right)_{x_i} + f(u) = 0, \quad (0.4)$$

де $m_i > 1, p_i \geq 2, i = \overline{1, n}$

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження асимптотичної поведінки розв'язків анізотропних параболічних

лічних рівнянь, встановлення для них умов усувності особливостей, отримання поточкових оцінок та оцінок типу Келлера-Оссермана.

Об'єкт дослідження – анізотропні параболічні рівняння з дивергентною головною частиною (зокрема рівняння з абсорбційним членом).

Предмет дослідження – точні поточкові оцінки та оцінки типу Келлера-Оссермана для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь (зокрема рівнянь з абсорбційним членом), умови усувності особливостей для цих розв'язків.

Завдання дослідження:

- розвинути метод точних поточкових оцінок розв'язків типу "нелінійного потенціалу" для дослідження слабких розв'язків анізотропних параболічних рівнянь;
- дослідити поведінку розв'язків анізотропних параболічних рівнянь в околі особливості;
- отримати оцінки типу Келлера-Оссермана для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з абсорбцією і градієнтною абсорбцією;
- встановити умови усувності особливостей для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь в околі особливості;
- побудувати і застосувати спеціальні пробні функції, використовуючи структурні особливості рівняння та раніше нароблені приклади, таким чином, щоб доведення основних результатів не залежало від показників анізотропії m_i .

Методи дослідження. Для вирішення поставлених задач у дисертаційній роботі використані ітераційна техніка Де Джорджі, метод локальних енергетичних оцінок, метод точних поточкових оцінок розв'язків типу "нелінійного потенціалу", який був запропонований І. В. Скрипніком для еліптичних дивергентних квазілінійних рівнянь, розвинутий І. І. Скрипніком для параболічних рівнянь та адаптований в поданій роботі для анізотропних параболічних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі досліджено розв'язки анізотропних параболічних рівнянь, як було зазначено вище, модельними випадками яких є рівняння анізотропного пористого середовища, зокрема з абсорбційним потенціалом. Важливим моментом є те, що в рівняннях (0.1) - (0.3) частина показників $m_i < 1$, а інша частина $m_i > 1$. Зазвичай у літературі ці два випадки розглядаються окремо, для кожного випадку вводяться свої означення розв'язку і проводяться окремі доведення при дослідженні якісних властивостей розв'язків, навіть в ізотропному випадку ($m_1 = m_2 = \dots = m_n$). В дисертаційній роботі вдалося знайти універсальний підхід в дослідженнях властивостей розв'язків анізотропного рівняння пористого середовища, який не залежить від значень показників анізотропії m_i . А саме в роботі було введено одне означення слабкого розв'язку і проведено одне доведення для обох випадків одночасно та отримані такі результати:

- отримано достатню умову усувності ізольованих особливостей розв'язків анізотропних параболічних рівнянь;
- отримано оцінки типу Келлера-Оссермана для подвійно нелінійного анізотропного параболічного рівняння з абсорбційним членом, який залежить тільки від розв'язку;
- отримано оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропних параболічних рівнянь з абсорбційним членом $f(u)$;
- отримано оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропних параболічних рівнянь з градієнтною абсорбцією;
- доведено нерівність Гарнака зі сталою, яка не залежить від розв'язку, для нелінійного параболічного рівняння з абсорбційним членом;
- отримано достатню умову усувності ізольованих особливостей для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з абсорбційним членом вигляду u^q ;

- отримано достатню умову усувності ізольованих особливостей для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з градієнтним абсорбційним членом.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Важливим є те, що знайдено універсальний підхід дослідження розв'язків анізотропних параболічних рівнянь, який не залежить від показників анізотропії. Отримані результати можуть слугувати підґрунтям для проведення подальших наукових досліджень у відповідній проблематиці та можуть бути використані при розробці, читанні курсів для підготовки фахівців з диференціальних рівнянь, математичної фізики, а також суміжних напрямків.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковому керівникові. Зі статей, які опубліковані у співавторстві, у дисертацію включені лише ті результати, які належать автору. А саме: роботи [79], [81] написані у співавторстві з науковим керівником, особистий внесок здобувача у статті [79] - це Proposition 1.3, Proposition 1.4, Theorem 1.2, Theorem 1.4., у роботі [81] науковому керівнику належить постановка задачі та загальний план дослідження. Решта результатів отримано автором дисертації самостійно.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації були представлені на конференціях всеукраїнського та міжнародного рівнів: Міжнародній конференції з Диференціальних рівнянь, присвяченій 110 - річчю Я.Б. Лопатинського (Львів, 2016); V Міжнародній конференції з Диференціальних рівнянь та їх застосувань для молодих вчених імені Я.Б. Лопатинського (Київ, 2016); XVII Міжнародній науковій конференції з диференціальних рівнянь "Єругінські читання-2017"(Мінськ, 2017); Міжнародній конференції з Диференціальних рівнянь, математичної фізики та застосувань (Черкаси, 2017); науковій конференції професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів вищої освіти за підсумка-

ми науково-дослідної роботи за період 2015-2016 рр., присвяченій 80-річчю Донецького національного університету (Вінниця, 2017); Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 2018); Міжнародному конгресі математиків, 1-9 серпня (Ріо-де-Жанейро, Бразилія, 2018); Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" (Чернівці, 2018); науковій конференції "Сучасний аналіз і нелінійні граничні задачі", присвяченій 80-річчю проф. Б.В. Базалія, 17-19 жовтня (Слов'янськ, 2018); VI Міжнародній Школі-Семінарі з Диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я.Б. Лопатинського, 18-20 червня (Вінниця, 2019); Міжнародній математичній літній школі "Прикладні математичні задачі в геофізиці", (Четраро, Італія, 2019).

В цілому дисертація доповідалась на семінарі кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь факультету математики та інформаційних технологій Донецького національного університету імені Василя Стуса (лютий 2018 р.), а також на науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь та геометрії (керівник - проф. Є. Я. Хруслов) Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України (березень 2018 р.) та науковому семінарі відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики (керівник - доц. І. І. Скрипнік) Інституту прикладної математики та механіки НАН України (червень 2018 р.).

Публікації.

Результати дисертаційної роботи повною мірою відображено в 16 наукових працях, з них 5 статей надруковані у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз [78–82], 1 стаття опублікована у фаховому виданні України [14], з яких чотири написано без співавторів, і в тезах виступів [15, 83–91] на 10 конференціях. Робота пройшла необхідну апробацію на наукових семінарах та міжнародних конференціях.

Структура дисертації Дисертація складається з анотації, змісту,

вступу, чотирьох розділів, висновків до дисертації, списку використаних джерел, який містить 102 найменування, та 1 додатку. Повний обсяг роботи – 144 сторінки. Обсяг основної частини дисертації – 111 сторінок. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 19 сторінок.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано на кафедрі математичного аналізу і диференціальних рівнянь факультету математики та інформаційних технологій Донецького національного університету імені Василя Стуса у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри та в рамках державних науково-дослідних робіт:

- НДР «Метричні простори, гармонічний аналіз функцій і операторів, сингулярні та неklasичні задачі для диференціальних рівнянь», номер державної реєстрації - 0115U000136;
- НДР «Властивості сингулярних розв'язків диференціальних рівнянь, спектральний аналіз різницевого систем та моделювання нелінійних процесів», номер державної реєстрації - 0118U003138.

А також частково у відділі нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики та механіки НАН України у відповідності до тематики пріоритетних досліджень відділу.

НДР «Регулярність та точні поточкові оцінки сингулярних розв'язків квазілінійних еліптичних та параболічних рівнянь структури дифузії-сильної нелінійної абсорбції», що фінансувалась Державним фондом фундаментальних досліджень згідно договорів:

№ Ф71/66-2016 від 12.07.2016 р., номер державної реєстрації - 0116U007160, термін виконання: липень - грудень 2016 року;

№ Ф71/42-2017 від 11.05.2017 р., номер державної реєстрації - 0117U006053, термін виконання: травень - жовтень 2017 року.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Розділ присвячен викладенню основних досягнень математиків у питанні усунюваності ізольованих особливостей для розв'язків квазілінійних еліптичних та параболічних рівнянь другого порядку, модельними випадками яких є рівняння

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|u|^{m_i-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0,$$

зокрема з абсорбційним членом. В першому підрозділі розглядаються ізотропні рівняння, тобто $p_1 = p_2 = \dots = p_n$, $m_1 = m_2 = \dots = m_n$, в другому підрозділі - анізотропні. В третьому підрозділі висвітлюються результати, які стосуються оцінок типу Келлера-Оссермана для розв'язків рівнянь з абсорбцією. В четвертому підрозділі представлено методи, які застосовуються в дисертаційній роботі.

1.1 Основні результати для ізотропних рівнянь

Два типи рівнянь, які будуть розглянуті в цьому підрозділі, є квазілінійними рівняннями еліптичного та параболічного типу другого порядку у дивергентній формі

$$-\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) + B(x, u, \nabla u) = 0, \quad (1.1)$$

$$u_t - \operatorname{div} A(x, u, \nabla u) + B(x, u, \nabla u) = 0, \quad (1.2)$$

де A, B векторні, дійснозначні функції. У зв'язку з задачею усунюваності, яка сформульована у вступі, закономірно виникає питання, чи дійсно

існують розв'язки рівнянь (1.1) або (1.2) з деякою допустимою поведінкою в околі особливості. Розглянемо, наприклад, гармонічну функцію $u(x)$ у $R^n \setminus \{0\}$, вона має розклад в ряд за сферичними гармоніками

$$u(x) = u(r, \sigma) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^{(i)}(r) \psi_i(\sigma) + \sum_{i=0}^{\infty} r^i \tilde{\psi}_i(\sigma),$$

де (r, σ) - сферичні координати у $R^n \setminus \{0\}$, μ - фундаментальний розв'язок рівняння Лапласу і $\psi_i, \tilde{\psi}_i$ - сферичні гармоніки степені n . Якщо $u(x) = o(\mu(|x|))$, $x \rightarrow 0$, тоді $u(x)$ регулярна гармонічна функція у всьому R^n , але, якщо $u(x) = O(\mu^{(k)}(|x|))$, $x \rightarrow 0$ для невід'ємного цілого k , тоді $u(x)$ допускає асимптотичний розклад наступного вигляду

$$u(x) = u(r, \sigma) = \sum_{i=0}^k \mu^{(i)}(r) \psi_i(\sigma) + \sum_{i=0}^{\infty} r^i \tilde{\psi}_i(\sigma).$$

Отже, можна зробити висновок, що питання про можливу усунівність особливості в точці 0 явно обумовлено швидкістю росту функції $u(x)$ в околі цієї точки. Тому важливим кроком при дослідженні таких задач є отримання апріорних оцінок розв'язку в околі сингулярності.

Умови усунівності особливостей залежать від порядку зростання молодшого члена B . Якщо ми просто розглядаємо нелінійність з тим же порядком зростання, що і A , то її ефект, в певному сенсі, незначний. Але якщо порядок зростання молодшого члену B більше, ніж у A , то ситуація ускладнюється і багато параметрів взаємодіють у задачі сингулярності. Наприклад, розглянемо рівняння Лапласу з асбосрбцією (1.3) та джерелом (1.4)

$$\Delta u = u^q \tag{1.3}$$

$$-\Delta u = u^q \tag{1.4}$$

з $q > 1$. Якщо шукати радіально-степеневі розв'язки вигляду $r \rightarrow \alpha r^\beta$, тоді $\alpha = \frac{2}{q-1}$ і $\beta = \left[\frac{2}{q-1} \left(N - \frac{2q}{q-1} \right) \right]^{\frac{1}{q-1}}$ для рівняння (1.4), але β існує тоді і тільки тоді, коли $n > 2$ і $q > \frac{n}{n-2}$. Для рівняння (1.3) $\beta = \left[\frac{2}{q-1} \left(\frac{2q}{q-1} - n \right) \right]^{\frac{1}{q-1}}$ і це β існує тоді і тільки тоді, коли $1 < q < \frac{N}{N-2}$,

без обмежень навіть коли $n = 2$. Тому зрозуміло, що значення q по відношенню до $\frac{n}{n-2}$ є вирішальним при вивченні розв'язків (1.3) або (1.4) з особливістю в 0. Таке спостереження було зроблено В. Р. Емденом [35], який опублікував у 1897 році першу роботу про радіальні розв'язки рівняння (1.4). Пізніше, на початку століття, Р. Х. Фаулер [36] провів перше майже повне дослідження радіальних розв'язків рівнянь (1.3) і (1.4).

Довгий час проблема усувності особливостей вивчалась тільки для лінійних рівнянь та радіальних розв'язків рівнянь типу (1.3), (1.4). Поштовхом для її подальшого розвитку послугували роботи Дж. Серріна [76], [77], який отримав у 1964-1965 роках умови усувності сингулярностей для квазілінійних рівнянь загального типу. Він розглянув нелінійне еліптичне рівняння другого порядку у дивергентній формі, модельним випадком, якого є наступне рівняння

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + gu|u|^{p-2} = f, \quad x \in \Omega \setminus \{x^0\}, \quad p > 1, \quad (1.5)$$

де $f, g \in L_q(\Omega)$, $q > \frac{n}{p}$. Для довільного розв'язку $u(x)$ він отримав слабку умову усувності особливості

$$u(x) = O\left(|x - x^0|^{-\frac{n-p}{p-1} + \varepsilon}\right), \quad x \rightarrow x^0, \quad 1 < p < n, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.6)$$

$$u(x) = O\left(\ln^{1-\varepsilon} \frac{1}{|x - x^0|}\right), \quad x \rightarrow x^0, \quad p = n, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.7)$$

та точну умови для невід'ємних розв'язків

$$u(x) = o\left(|x - x^0|^{\frac{p-n}{p-1}}\right), \quad x \rightarrow x^0, \quad 1 < p < n, \quad (1.8)$$

$$u(x) = o\left(\ln \frac{1}{|x - x^0|}\right), \quad x \rightarrow x^0, \quad p = n. \quad (1.9)$$

Точність умови підтверджує відомий фундаментальний розв'язок рівняння p -Лапласу

$$u(x) = |x - x^0|^{\frac{p-n}{p-1}}, \quad 1 < p < n, \quad (1.10)$$

$$u(x) = \ln \frac{1}{|x - x^0|}, \quad p = n. \quad (1.11)$$

Різкий розвиток теорії нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних у 80-х роках спричинив ще один прорив - дослідження нерадіальних сингулярних розв'язків рівнянь, який був ініційований Б. Гідасом, Д. Спарком [43], П. Л. Ліонсом [55] та Л. Вероном [100], [101]. Після цього було опубліковано багато статей з урахуванням різних аспектів задачі сингулярності для вищезазначених рівнянь, а також для еволюційного рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом:

$$u_t - \Delta u - u^q = 0$$

$$u_t - \Delta u + u^q = 0$$

Оглянемо роботи тих, хто отримав значні результати в цьому напрямку. Почнемо з роботи Ф. Ніколосі, І. І. Скрипніка, І. В. Скрипніка [68], які розглянули нелінійне еліптичне рівняння у дивергентному вигляді

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.12)$$

$\Omega \setminus \{x_0\}$. Припускається, що коефіцієнти рівняння $a_i(x, u, \xi)$, $i = 1, \dots, n$ визначені при $x \in \Omega$, $u \in R^1$, $\xi \in R^n$, задовольняють умові Каратеодорі, та виконано нерівності

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \xi) \xi_{x_i} &\geq c_1 |\xi|^p - g_1(x) |u|^p - f_1(x), \\ |a_i(x, u, \xi)| &\leq c_2 |\xi|^{p-1} + g_2(x) |u|^{p-1} + f_2(x), \quad i = \overline{1, n}, \\ a_0(x, u, \xi) \xi_{x_i} &\leq h(x) |\xi|^{p-1} + g_3(x) |u|^{p-1} + f_3(x), \end{aligned} \quad (1.13)$$

де $h(x)$, $g_i(x)$, $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ невід'ємні функції, які належать деяким класам $L^{r_0}(\Omega)$, $r_0 > \frac{n}{p}$. Модельним випадком рівняння є рівняння (1.5), результат усунності для якого був отриманий Дж. Серріном (див. вище). Сформулюємо його умову усунності особливості (1.6), (1.7) у термінах поведінки функції $M_u(r) = \sup\{|u(x)| : r < |x - x^0| < R_0\}$, де $R_0 < \frac{1}{2} \min\{\text{dist}(x^0, \partial\Omega), 1\}$. Для того, щоб особливість в точці x^0 для

довільного розв'язку рівняння (1.5) була усувною, достатньо, щоб

$$M_u(r) \leq \gamma r^{-\frac{n-p}{p-1}+\varepsilon}, \quad 1 < p < n, \quad (1.14)$$

$$M_u(r) \leq \gamma \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-\varepsilon}, \quad p = n \quad (1.15)$$

з деякими додатніми сталими γ, ε .

У даній роботі авторами посилюється твердження Дж. Серріна:

Теорема 1.1. *Якщо $u(x)$ - розв'язок рівняння (1.12), виконана умова (1.13). Припустимо також, що*

$$\lim_{r \rightarrow 0} M_u(r) r^{\frac{n-p}{p-1}} = 0, \quad 1 < p < n, \quad (1.16)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} M_u(r) \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{-1} = 0, \quad p = n, \quad (1.17)$$

тоді особливість в точці x^0 для розв'язку рівняння (1.12) є усувною.

Це твердження є висновком результату Дж. Серріна та наступної теореми.

Теорема 1.2. *Нехай виконані всі умови попередньої теореми. Тоді існують такі додатні сталі A, a які залежать від відомих даних задачі, що справедливі нерівності*

$$M_u(\rho) \leq \left(M_u(r) \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{p-n}{p-1}} + \rho^{a-\frac{p-n}{p-1}} \right), \quad p < n$$

$$M_u(\rho) \leq \left(M_u(r) \frac{\ln \rho}{\ln r} + \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{1-a} \right), \quad p = n,$$

для будь-яких $0 < r < \rho < R_0$.

Якщо в останніх нерівностях перейти до границі при $r \rightarrow 0$, в силу умов (1.16), (1.17) ми отримаємо для $u(x)$ оцінки (1.6), (1.7), звідки прямує усунівність особливості в точці x^0 .

У роботі [67] попередніми авторами було досліджено початкову задачу для нестационарного рівняння р-Лапласу

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T \setminus \{x^0, t^0\},$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \setminus \{x^0\}$$

де $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$, $0 < T < \infty$, $x^0 \in \Omega$, $t^0 \in [0, T)$, $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$, $p \geq 2$.
Встановлено, що якщо справедлива асимптотична оцінка

$$u(x, t) = o\left(\left(|x - x^0| + |t - t^0|^{\frac{1}{p+n(p-2)}}\right)^{-n}\right), \quad (x, t) \rightarrow (x^0, t^0),$$

тоді особливість в точці (x^0, t^0) усувається. Точність умови гарантує відомий автомодельний розв'язок, який отриманий у роботі [3]

$$u(x, t) = t^{-\frac{n}{p+n(p-2)}} \max^{\frac{p-1}{p-2}} \left\{ K_1 - K_2 \left(\frac{|x|}{t^{\frac{1}{p+n(p-2)}}} \right)^{\frac{p}{p-1}}, 0 \right\}.$$

У статті Х. Брезіса і Л. Верона [27] розглянуто рівняння Лапласу з абсорбційним членом

$$-\Delta u + |u|^{q-1}u = 0, \quad x \in \Omega' = \Omega \setminus \{0\}, \quad \Omega \in R^n, \quad n > 2,$$

та отримано умову усунутості особливості в точці 0 для двічі неперервно-диференційованого розв'язку, яка виражається в умові на показник q :

$$q \geq \frac{n}{n-2}.$$

У статті [37] Х. Брезісом і А. Фрідманом досліджено розв'язки рівняння теплопровідності з абсорбційним членом

$$u_t - \Delta u + |u|^{q-1}u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1.18)$$

які задовольняють початкову умову

$$u(x, 0) = \delta(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.19)$$

де $\Omega \in R^n$, $0 < p < \infty$, $0 < T < \infty$. Встановлено, що при

$$q \geq \frac{n+2}{n} \quad (1.20)$$

не існує розв'язку задачі (1.18), (1.19), тобто отримана умова неіснування розв'язку з точковою особливістю.

У 2005 році І. І. Скрипнік [12] отримав точну умову усувності ізольованої особливості для нестационарного рівняння p -Лапласу з абсорбцією, була розглянута початкова задача

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + u^q = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T \setminus \{x^0, t^0\}, \quad (1.21)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \setminus \{x^0\} \quad (1.22)$$

де $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$, $0 < T < \infty$, $x^0 \in \Omega$, $t^0 \in [0, T)$, $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$, $p \geq 2$. Доведено, що при виконанні умови на показник абсорбційного члену

$$q \geq p - 1 + \frac{p}{n}.$$

особливість в точці (x^0, t^0) розв'язку задачі (1.21), (1.22) є усувною. Аналогічний результат був отриманий А. Гміром [45] тільки у випадку нульової початкової умови.

Згадаємо декілька результатів для рівнянь з градієнтним абсорбційним членом. Існування та неіснування сингулярних розв'язків для рівняння p -Лапласу з градієнтною абсорбцією

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |\nabla u|^q = 0$$

було розглянуто у роботах [16, 18, 24, 41, 53, 58, 69, 73]. Зокрема, при наступних значеннях показника q

$$q \geq \frac{n(p-1)}{n-1},$$

доведена усувність ізольованої особливості для розв'язків цього рівняння.

У роботі [93] П. Ши отримав умову усувності особливості для нестационарного рівняння p -Лапласу, розглянувши початкову задачу

$$u_t - \Delta(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |\nabla u|^q = 0, \quad (x, t) \in R^n \times (0, \infty),$$

$$u(x, 0) = \delta(x), \quad x \in R^n,$$

де $p > 2$, $q > 1$. Умова неіснування розв'язку з точковою особливістю має вигляд

$$q \geq p - 1 + \frac{p}{n}.$$

Оскільки в дисертаційній роботі досліджуються анізотропні параболічні рівняння, зокрема з абсорбцією і градієнтною абсорбцією, тому зробимо огляд результатів усувності для модельних випадків таких рівнянь в ізотропному випадку ($m_1 = \dots = m_n = m$):

$$u_t - \Delta(u^m) = 0, \quad (1.23)$$

$$u_t - \Delta(u^m) + u^q = 0, \quad (1.24)$$

$$u_t - \Delta(u^m) + |\nabla u|^q = 0. \quad (1.25)$$

Будемо розглядати розв'язки у $R^n \times (0, \infty)$, які задовольняють початкові умові з сингулярними даними

$$u(x, 0) = \delta(x), \quad x \in R^n, \quad (1.26)$$

Акцентуємо увагу на те, що як зазначалось у вступі, що вироджений ($m > 1$) та сингулярний ($m < 1$) випадки авторами розглядались окремо.

Рівняння пористого середовища (1.23) досліджувалось багатьма авторами завдяки його застосуванню при моделюванні таких фізичних процесів, які включають дифузію та теплообмін. Найвідоміші з них - це опис потоку ізоентропічного газу через пористе середовище або випромінювання тепла в плазмі та ін. (див. [98], [22]). Що стосується умови усувності особливості, то вона має вигляд асимптотичної оцінки

$$u(x, t) = o \left(\left(|x - x^0| + t^{\frac{1}{n(m-1)+2}} \right)^{-n} \right), \quad (x, t) \rightarrow (x^0, 0),$$

точність якої гарантує відомий автомодельний сингулярний розв'язок

$$u(x, t) = u(x) = t^{-\frac{n}{n(m-1)+2}} \left(C - \frac{(m-1)}{2m(n(m-1)+2)} \frac{|x|^2}{t^{\frac{2}{n(m-1)+2}}} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad C > 0,$$

який був знайдений у роботах [3], [71], [102].

Неіснування розв'язків задачі Коші з сингулярною початковою умовою (1.26) для рівняння пористого середовища з абсорбційним членом

(1.24) було встановлено С. Каміном, Л. Пелет'єром [50]. Умова неіснування має вигляд

$$q \geq m + \frac{2}{n} \quad (1.27)$$

і отримана у випадку повільної дифузії ($m > 1$). Сингулярний випадок $\left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^+ < m < 1\right)$ був розглянут Л. А. Пелет'єром й Ж. Чжао у роботі [72] і отримана умова неіснування розв'язку з точковою особливістю має вигляд (1.27). Коли $m = 1$, отримуємо рівняння теплопровідності з абсорбцією, результат усунутості для якого вже зазначен вище (1.20).

Рівняння швидкої дифузії $\left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^+ < m < 1\right)$ з градієнтним абсорбційним членом було досліджено у роботі [92]. Для невід'ємних розв'язків задачі Коші (1.25), (1.26) була доведена умова усунутості ізольованої особливості:

$$\frac{2 + mn}{n + 1} \leq q < 2. \quad (1.28)$$

У випадку, коли $1 \leq m < q < 2$, умова має такий самий вигляд як (1.28) і була вона отримана Ю. В. Ци, М. Х. Ваном у статті [74]. Хоча останній результат включає випадок $m = 1$, відмітимо, що він був досліджен також у статті [23] М. Ф. Бідаут-Вероном, Н. А. Дао. Коли $m = 1$, рівняння (1.25) є рівняння Гамільтона-Якобі:

$$u_t - \Delta u + |\nabla u|^q = 0$$

та умова усунутості особливості для невід'ємних розв'язків має вигляд:

$$q \geq \frac{n + 2}{n + 1}.$$

1.2 Огляд результатів для анізотропних рівнянь

Перейдемо тепер до огляду результатів для анізотропних еліптичних і параболічних рівнянь другого порядку, зацікавленість до яких зростає останніми десятиліттями. Протатипами таких рівнянь є

$$\sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})_{x_i} = 0, \quad (1.29)$$

$$u_t - \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})_{x_i} = 0, \quad (1.30)$$

$$u_t - \sum_{i=1}^n (|u|^{m_i-1} u_{x_i})_{x_i} = 0. \quad (1.31)$$

Дослідження цих рівнянь ускладнюється тим, що загальна якісна теорія для них не побудована, крім того, точний вигляд фундаментального розв'язку невідомий.

Почнемо з роботи Ю. В. Намлеєвої, І. І. Скрипніка, А. Є. Шишкова [64], які дослідили локальну поведінку довільного узагальненого розв'язку квазілінійного анізотропного еліптичного рівняння

$$- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \{x^0\}. \quad (1.32)$$

в околі сингулярної точки $x^0 \in \Omega \in R^n, n \geq 2$. Припускається, що коефіцієнти рівняння $a_i(x, u, \xi), i = 1, \dots, n$ визначені при $x \in \Omega, u \in R^1, \xi \in R^n$, задовольняють умові Каратеодорі та виконано нерівності

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \xi) \xi_{x_i} &\geq c_1 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i} - g_1(x) |u|^p - f_1(x), \\ |a_i(x, u, \xi)| &\leq c_2 \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p_i}} + g_2(x) |u|^{p(1-\frac{1}{p_i})} + f_2(x), \quad i = \overline{1, n}, \\ a_0(x, u, \xi) &\leq \sum_{i=1}^n h_i(x) |\xi_i|^{p_i(1-\frac{1}{p})} + g_3(x) |u|^{p-1} + f_3(x), \end{aligned} \quad (1.33)$$

де c_1, c_2 додатні сталі і

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n < \infty, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}, \quad p \leq n. \quad (1.34)$$

Рівняння анізотропного p -Лапласу (1.29) є найпростішим прикладом рівнянь класу (1.32). Явний вигляд фундаментального розв'язку цього рівняння у формі подібній до (1.10), (1.11) (ізотропний випадок рівняння (1.5), коли $1 < p_1 = p_2 = \dots = p_n = p \leq n$), невідомий. Але існування невід'ємного фундаментального розв'язку було доведено в [25] при

наступному додатковому обмеженні:

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n < \frac{p(n-1)}{n-p}, \text{ якщо } p < n.$$

Крім того, було доведено, що такий фундаментальний розв'язок належить анізотропному простору Соболева

$$W_{(\bar{q})}^1(\Omega) := \left\{ v \in W^{1,1}(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^{q_i}(\Omega), i = \overline{1, n} \right\},$$

де показники q_i задовольняють наступним умовам

$$1 < q_i < \frac{np_i(p-1)}{p(n-1)} \quad i = \overline{1, n}.$$

Локальна обмеженість розв'язків рівняння була отримана у роботах [38], [4] при умові

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \frac{np}{n-p}, \quad p < n. \quad (1.35)$$

Умова є точною, це підтверджує приклад, побудований М. Джаквінта [42] та П. Марселліні [56], які показали, що при порушенні умови, тобто при $p_n > \frac{np}{n-p}$ розв'язки рівняння (1.29) є нерегулярними та необмеженими. Локальна обмеженість градієнта розв'язку була доведена в роботах [56], [57] при виконанні умови (1.35) та достатній гладкості коефіцієнтів. Оскільки ми не можемо побудувати фундаментальний розв'язок рівняння (1.29), до останнього часу не було зрозуміло, як можна встановити точну умову для усувності ізольованої особливості розв'язків таких рівнянь. Це питання було успішно вирішено авторами цієї роботи, головним результатом якої є точна умова усувності ізольованої особливості для розв'язків рівняння (1.32). Окрім цього, для розв'язків з неусувною точковою особливістю отримані точні верхні і нижні оцінки в околі сингулярної точки. Сформулюємо лише результат усувності.

Теорема 1.3. *Нехай $u(x)$ - розв'язок рівняння (1.32) на множині $\Omega \setminus \{x^0\}$, параметри p_i задовольняють умовам (1.32), (1.32). Якщо справедливі асимптотичні оцінки*

$$u(x) = o \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^0|^{b_i} \right)^{-\frac{(n-p)}{p-1}} \right), \quad x \rightarrow x^0, \quad 1 < p < n$$

$$u(x) = o \left(\ln \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^0|^{p_i} \right)^{-1} \right), \quad x \rightarrow x^0, \quad p = n$$

де $b_i = \frac{p_i(p-1)}{p(p_i-1)+n(p-p_i)}$, $i = \overline{1, n}$, тоді сингулярність в точці x^0 є усувною.

Попередніми авторами також було розглянуто розв'язки подвійно нелінійного анізотропного параболічного рівняння [65]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|u|^{(m_i-1)(p_i-1)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0,$$

які задовольняють початковій умові

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \{0\}.$$

На показники рівняння накладаються наступні обмеження

$$2 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n, \quad \min_{1 \leq i \leq n} m_i \geq 1, \quad \max_{1 \leq i \leq n} m_i(p_i-1) < 1 + \frac{\kappa}{n}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} > 1,$$

де

$$k = n(p(m-d) - 1) + p, \quad k_i = \frac{p + n(p(m-d) - m_i(p_i - 1))}{p_i},$$

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i, \quad d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{p_i}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}.$$

У випадку $2 = p_1 = p_2 = \dots = p_n$, маємо анізотропне рівняння пористого середовища (1.31), а коли $1 = m_1 = m_2 = \dots = m_n$ - еволюційне рівняння р-Лапласу (1.30) Для розв'язків цих рівнянь встановлена умова усувності особливості в точці $(x^0, 0)$ у вигляді асимптотичної оцінки:

$$u(x, t) = o \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^0|^{\frac{1}{k_i}} + t^{\frac{1}{k}} \right)^{-n} \right), \quad (x, t) \rightarrow (x^0, 0).$$

Рівняння (1.29) з абсорбційним членом вигляду u^q було досліджено Скрипніком І.І. [13]. Було доведено, що ізольована особливість для розв'язку такого рівняння усувається, якщо виконуються нерівності для показників:

$$1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n \leq \frac{n-1}{n-p}p, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}, \quad p < n,$$

$$q \geq \frac{n(p-1)}{n-p}.$$

Рівняння анізотропного р-Лапласу з градієнтною абсорбцією

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^{q_i} = 0, \quad x \in \Omega \setminus \{0\} \quad (1.36)$$

було досліджено тим же автором у статті [94], де показники p_i , q_i задовольняють нерівностям

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n < \min \left(q + 1, p \frac{n-1}{n-p} \right), \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}, \quad (1.37)$$

$$\frac{n(p-1)}{n-1} \leq q < p, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i}. \quad (1.38)$$

Встановлено достатню умову для усунутості особливості розв'язків цього рівняння.

Теорема 1.4. *Нехай $u(x)$ - слабкий розв'язок рівняння (1.36) на множині $\Omega \setminus \{0\}$. І нехай виконані умови (1.37), (1.38). Припустимо також, що якщо*

$$q = \frac{n(p-1)}{n-1},$$

тоді

$$q_i = \frac{n(p-1)}{n-1} \frac{p_i}{p}, \quad i = \overline{1, n}$$

і особливість в точці 0 усувається.

1.3 Оцінки типу Келлера-Оссермана

Доведення усунутості ізольованих особливостей розв'язків рівнянь з абсорбційним членом базується на оцінках типу Келлера-Оссермана, це поточкові верхні оцінки, які записані в термінах відстані до межі області. Оцінки такого типу беруть свій початок в роботах Дж. Келлера [51], Р. Оссермана [70].

У цих роботах було розглянуто рівняння Лапласу з абсорбцією

$$-\Delta u + f(u) = 0, \quad (1.39)$$

де $f(u)$ дійснозначна неперервна функція однієї змінної, для якої існує така додатня неспадна неперервна функція $h'(x)$, що $f(u) \geq h'(x)$ і

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty h'(z) dz \right] dx < \infty.$$

Використовуючи теорему порівняння та радіальні розв'язки, для розв'язків рівняння (1.39) було доведено, що існує неспадна функція $g : (0, \infty) \rightarrow R$, для якої виконуються умови

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} g(R) &= \infty, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} g(R) &= -\infty, \end{aligned}$$

що справедлива нерівність

$$u(x) \leq g(\text{dist}(x, \partial\Omega)), \quad x \in \Omega.$$

Тут $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ - евклідова відстань від $x \in \Omega$ до межі $\partial\Omega$, функція g визначається лише через f , розмірність простору n і не залежить від області Ω .

Оцінки такого типу відіграють важливу роль у теорії великих розв'язків, а саме застосовуються для доведення існування або неіснування великих розв'язків. Це питання також було розглянуто Дж. Келлером (див. Теорему III в [51]) для рівняння (1.39). Під великим розв'язком рівняння (1.39) маємо на увазі розв'язок $u(x)$ в обмеженій області Ω , який при наближенні до межі області прямує на нескінченність

$$u(x) \longrightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow \partial\Omega.$$

Велику роль відіграють роботи К. Бандл, М. Маркуса, М. Ессена [19–21], які привернули увагу науковців до вивчення таких розв'язків. Але всі відомі оцінки великих розв'язків еліптичних та параболічних рівнянь пов'язані з рівняннями, для яких є деякі порівняльні властивості. Для огляду цих результатів дивіться [52, 59, 75, 99] та посилання в них.

Наприклад, для еліптичного рівняння з абсорбційним членом

$$-\Delta_p u + f(u) = 0,$$

будь-який невід'ємний розв'язок u задовольняє нерівностям

$$u(x) \leq c \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{-\frac{p}{q-p+1}}, \quad f(u) = u^q, \quad q > p - 1$$

$$u(x) \leq c |\ln \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)|, \quad f(u) = e^u.$$

Анізотропні еліптичні та параболічні рівняння були об'єктом дослідження невеликого кола науковців, оскільки загалом порівняльні властивості для таких рівнянь не мають місце. Основні роботи стосуються рівнянь лише при конкретному виборі члену абсорбції, а саме $f(u) = u^q$ або рівнянь з градієнтною абсорбцією (див. [13, 39, 94, 95]).

Наприклад, у роботі [94] для розв'язків рівняння анізотропного р-Лапласу з градієнтною абсорбцією (1.36) маємо: якщо виконана умова на показники (1.37), тоді існує стала γ , яка залежить тільки від $n, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ та $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, при яких справедливі оцінки

$$|u(x)| \leq \gamma \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^{\frac{p_i}{p+(q-p)p_i}} \right)^{q-p} \quad q < p$$

$$|u(x)| \leq -\gamma \ln \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^{\frac{p_i}{p}} \quad q = p$$

для будь-якого $x \in \Omega \setminus \{0\}$.

1.4 Методи досліджень

Доведення усунутості ізольованої особливості розв'язків анізотропних параболічних рівнянь реалізується в декілька кроків. Напишемо схему доведення в термінах поведінки функції

$$M_u(r) = \operatorname{ess\,sup}\{|u(x, t)| : (x, t) \in D(R_0) \setminus D(r)\}, \quad (1.40)$$

де $D(r) = \{(x, t) \in \Omega_T : \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{a_i}{2}} + t^b < r\}$, будемо вважати, що особливість знаходиться в точці $(0, 0)$. Як було зазначено в першому підрозділі важливим кроком при отриманні результату усунутості є встановлення апріорних оцінок розв'язку в околі сингулярності, це і є основними пунктами плану:

1. На першому етапі ми встановлюємо оцінку

$$M_u(r) \leq \gamma r^{-n}.$$

2. Покращуємо попередню поточкову оцінку, отримуючи в показнику додатній доданок

$$M_u(r) \leq \gamma r^{\lambda-n}, \text{ де } \lambda > 0.$$

3. Використовуючи нерівність з другого пункту, доводимо обмеженість розв'язку.

4. Оскільки, в роботі розв'язок розуміється в сенсі інтегральної тотожності, яка повинна виконуватись для будь-якої пробної функції та для будь-якої функції, яка обертається в 0 в околі особливості, будемо вважати, що особливість є усувної, якщо тотожність справедлива при значенні цієї функції тотожно рівному 1, що ми і маємо, застосовуючи результати попередніх пунктів.

Методи дослідження, які використовуються при виконанні вказаного плану, тісно пов'язані з підходами до вивчення властивостей розв'язків параболічних та еліптичних рівнянь, а саме:

- ітераційна техніка Де Джорджі;
- метод локальних енергетичних оцінок;
- метод точних поточкових оцінок розв'язку типу "нелінійного потенціалу".

Відмітемо, що метод точних поточкових оцінок розв'язку типу "нелінійного потенціалу" був запропонований І. В. Скрипніком для еліптичних дивергентних квазілінійних рівнянь [10] та адаптований для параболічних рівнянь І. І. Скрипніком [11], [67], [68], та пристосований для анізотропних параболічних рівнянь в даній роботі. Що стосується ітераційної техніки Де Джорджі, то вона є важливим інструментом при

вивченні регулярності розв'язків еліптичних і параболічних рівнянь. Він її ввів у 1957 році [34] для вирішення 19-ї проблеми Гільберта. У цій роботі він показав регулярність розв'язку варіаційної задачі для нелінійних еліптичних рівнянь. Незалежно від Де Джорджі, Дж. Неш ввів подібну техніку в 1958 році [66]. Згодом Мозер запропонував нове формулювання доведення в [61]. Цей метод зазвичай називають методом Де Джорджі-Неша-Мозера. Він поширився спочатку на вироджені випадки еліптичних рівнянь [7], а для параболічних рівнянь був висвітлен пізніше Е. ДіБенедетто [30] (див. також роботи Е. ДіБенедетто, У. Джіаназа та В. Веспрі [31–33]).

Зауважимо, що у роботі оцінки типу Келлера-Оссермана доведені без використання принципу порівняння та радіальних розв'язків. А при доведенні нерівності типу Гарнака для подвійно нелінійного анізотропного рівняння у підрозділі 3.4 використовується принцип поширення додатності, який описаний у монографії [33].

Запишемо допоміжні леми, які будуть використовуватись далі у роботі. Перша лема - це лема про геометричну збіжність послідовності чисел, яка лежить в основі ітераційної техніки Де Джорджі [29].

Лема 1.1. *Нехай $\{Y_j\}$, $j = 0, 1 \dots$ послідовність додатних чисел, які задовольняють рекурентним нерівностям*

$$Y_{j+1} \leq Cb^j Y_j^{1+\alpha},$$

де $C, b > 1$ і $\alpha > 0$. Якщо

$$Y_0 \leq C^{-\frac{1}{\alpha}} b^{-\frac{1}{\alpha^2}},$$

тоді послідовність Y_j збігається до 0, коли $j \rightarrow \infty$.

Наступні твердження - це теореми вкладення.

Лема 1.2. [2] *Нехай $\Omega \subset R_n$, $n \geq 3$ обмежена область і ν довільна функція з простору Соболева $W_0^{1,1}$, для якої справедлива нерівність*

$$\int_{\Omega} \int_{E_R} |\nu|^{\alpha_i} \left| \frac{\partial \nu}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx < \infty,$$

де $p_i \geq 1, 1 + \frac{\alpha_i}{p_i} > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} > 1$. Тоді

$$\nu \in L_{q_*}(\Omega), q_* = \frac{np}{n-p} \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{p_k} \right) \quad (1.41)$$

де $\frac{1}{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$ і існує така додатня стала K , яка залежить тільки від $n, \alpha_i, p_i, i = 1, \dots, n$, що справедлива нерівність

$$\|\nu\|_{L_{q_*}(\Omega)} \leq K \prod_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} |\nu|^{\alpha_i} \left| \frac{\partial \nu}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{p_i n \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{p_k} \right)}} \quad (1.42)$$

Лема 1.3. [7] Нехай $\Omega \in R^n, n \geq 2$ обмежена область, $u \in \overset{o}{W}^{1,1}(\Omega)$, тоді має місце оцінка

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \gamma \prod_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} |u_{x_i}| dx \right)^{\frac{1}{n}}, \quad q = \frac{n}{n-1},$$

де γ додатня стала, яка залежить тільки від n .

Висновки до розділу 1

Бурхливий розвиток теорії усувності ізольованих особливостей починається у 1960-х роках у зв'язку з виходом робіт Дж. Серріна [76], [77], який отримав умови усувності сингулярностей для квазілінійних еліптичних рівнянь дивергентного вигляду. Адже до цього часу об'єктом дослідження були тільки лінійні рівняння та рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q і при цьому розглядалися лише радіальні розв'язки цих рівнянь. Різкий розвиток теорії нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних у 80-х роках спричинив ще один прорив - дослідження нерадіальних сингулярних розв'язків рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q , який був ініційований Б. Гідасом, Д. Спарком, П. Л. Ліонсом та Л. Вероном. Після цього було опубліковано багато статей з урахуванням різних аспектів

задачі сингулярності для вищезазначених рівнянь, а також для еволюційного рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q . Серед науковців, які отримали вагомні результати, можна відмітити Х. Брезіса, Д. Васкеса, Л. Верона, Л. Ніренберга, П. Бараса. Що стосується нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь, то перші значні результати усунності особливостей пов'язані з Х. Брезісом, А. Фрідманом, С. Каміном, Л. Пелет'єром, В.А. Галактіоновим, С.П. Курдюмовим, А.А. Самарським та ін.

Останніми десятиліттями зростає зацікавленість до анізотропних параболічних та еліптичних рівнянь завдяки їхньому застосуванню в моделюванні нелінійних фізичних процесів, що відбуваються у неоднорідних середовищах. Але на відміну від ізотропних рівнянь, для яких результати усунності висвітлені в даному розділі і для яких якісна теорія здобула повноту й завершеність, для анізотропних параболічних і еліптичних рівнянь залишається багато нерозв'язаних питань, зокрема усунність ізольованих особливостей розв'язків, при цьому дослідження цього питання ускладнюється тим, що точний вигляд фундаментального розв'язку для таких рівнянь невідомий. Найбільш вагомні результати в теорії усунності особливостей для таких рівнянь були отримані І. І. Скрипніком [13], [94], [95], І. І. Скрипніком, А. Є. Шишковим, Ю. В. Намлеєвої [64], [65].

РОЗДІЛ 2

УСУВНІСТЬ ІЗОЛЬОВАНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ АНІЗОТРОПНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

В поданому розділі досліджується розв'язки квазілінійного параболічного рівняння, модельним випадком якого є анізотропне рівняння пористого середовища

$$u_t - \sum_{i=1}^n (u^{m_i-1} u_{x_i})_{x_i} = 0, \quad (2.1)$$

де частина показників $m_i < 1$, а інша частина $m_i > 1$. Як відомо, багато робіт присвячено випадку, коли $m_1 = m_2 = \dots = m_n$, тобто рівнянню ізотропного пористого середовища, для огляду результатів можна звернутись до монографій [17], [29] та посилань у них. Однак опубліковано мало робіт для анізотропного рівняння (2.1), хоча воно має сильний фізичний сенс. Наприклад, якщо розглянути рух води в анізотропному пористому середовищі, тоді електропровідність середовища буде розрізнятися в залежності від напрямку, тому відповідно і сталі m_i в (2.1) повинні відрізнятися один від одного (детальніше див. [22]). Дослідження анізотропного рівняння пористого середовища розпочалося нещодавно. На даний момент нам відомо, що Санг Б. Х., Цзянь Х. Ю. [97] довели існування фундаментального розв'язку, локальна обмеженість розв'язку була отримана Колодієм І.М. [5]. У роботі [46] встановлено, що локальний обмежений невід'ємний слабкий розв'язок рівняння анізотропного пористого середовища є локально неперервним. Умова усувності особливості розв'язку рівняння (2.1) у випадку, коли $m_i \geq 1$, $i = \overline{1, n}$ була отримана Ю. В. Намлеєвою, І. І. Скрипніком, А. Є. Шишковим [64].

2.1 Формулювання задачі і основного результату.

Розглянемо розв'язки квазілінійного параболічного рівняння в дивергентній формі

$$u_t - \operatorname{div} A(x, t, u, \nabla u) = b(x, t, u, \nabla u), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (2.2)$$

які задовольняють початкову умову

$$u(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega \setminus \{x^0\}, \quad (2.3)$$

де $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$, Ω обмежена область в R^n , $x^0 \in \Omega$, $0 < T < \infty$, $n \geq 3$.

На коефіцієнти рівняння $A : \Omega_T \times R \times R^n \rightarrow R^n$ і $b : \Omega_T \times R \times R^n \rightarrow R^n$ будемо накладати наступні умови

- $A(\cdot, \cdot, u, \varsigma)$, $b(\cdot, \cdot, u, \varsigma)$ є вимірними за Лебегом для усіх $u \in R, \varsigma \in R^n$;
- $A(x, t, \cdot, \cdot)$, $b(x, t, \cdot, \cdot)$ неперервні для майже усіх точок $(x, t) \in \Omega_T$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$;

•

$$a_i(x, t, u, \varsigma) \varsigma \geq \nu_1 \sum_{i=1}^n |u|^{m_i-1} |\varsigma_i|^2, \quad (2.4)$$

$$|a_i(x, t, u, \varsigma)| \leq \nu_2 |u|^{\frac{m_i-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |u|^{m_j-1} |\varsigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$|b(x, t, u, \varsigma)| \leq \nu_2 |u|^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |u|^{m_j-1} |\varsigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де ν_1, ν_2 додатні сталі.

Будемо вважати, що показники рівняння задовольняють нерівностям

$$\min_{1 \leq i \leq n} m_i > 1 - \frac{2}{n}, \quad \max_{1 \leq i \leq n} m_i < m + \frac{2}{n}, \quad (2.5)$$

де $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$.

Введемо позначення

$$D(r) = \left\{ (x, t) \in \Omega_T : \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i - x_i^0|}{r^{k_i}} \right)^2 + \frac{t}{r^k} \leq 1 \right\}, \quad (2.6)$$

де

$$k = n(m - 1) + 2, \quad k_i = \frac{2 + n(m - m_i)}{2}. \quad (2.7)$$

Результат усувності сформулюємо в термінах поведінки функції

$$M_u(r) = \text{ess sup}\{|u(x, t)| : (x, t) \in D(R_0) \setminus D(r)\}, \quad (2.8)$$

де R_0 достатньо маленьке фіксоване додатне число: $D(R_0) \subset \Omega_T$. Відмітимо, що для будь-якого $r > 0$ функція $M_u(r)$ є скінченним числом згідно з [5].

Перед тим, як дати означення слабкого розв'язку задачі (2.2), (2.3), введемо означення простору.

Означення 2.1. Через $V_m(\Omega_T)$ будемо позначати клас функцій $C(0, T, L^2(\Omega))$, для елементів якого має місце нерівність $\sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} |\cdot|^{m_i-1} \left| \frac{\partial \cdot}{\partial x_i} \right|^2 dxdt < \infty$.

Означення 2.2. Під слабким розв'язком задачі (2.2), (2.3) будемо розуміти функцію $u \geq 0$, яка задовольняє включенню $u\psi \in V_m(\Omega_T) \cap L^2(0, T, W^{1,2}(\Omega))$ і виконується інтегральна тотожність

$$\int_{\Omega} u(x, \tau) \varphi \psi dx - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} u \frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial t} dxdt + \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau} \int_{\Omega} a_i \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial x_i} dxdt - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} b \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi \psi dxdt = 0 \quad (2.9)$$

для будь-якого $\tau \in (0, T)$, для будь-якої пробної функції $\varphi \in V_m(\Omega_T) \cap L^2(0, T, W^{o,1,2}(\Omega))$ і для будь-якої функції $\psi \in C^1(\overline{\Omega_T})$, яка обертається в 0 в околі точки $(x^0, 0)$.

Означення 2.3. Будемо казати, що слабкий розв'язок u задачі (2.2), (2.3) має усувну особливість в точці $(x^0, 0)$, якщо інтегральна тотожність (2.9) має місце для функції $\psi \equiv 1$.

Головним результатом розділу є така теорема.

Теорема 2.1. Нехай виконані умови (2.4), (2.5) і u є слабким розв'язком задачі (2.2), (2.3). Якщо виконується наступна умова

$$\lim_{r \rightarrow 0} M_u(r) r^n = 0, \quad (2.10)$$

тоді особливість розв'язку u в точці $(x^0, 0)$ є усувною.

Доведення теореми 2.1 ґрунтується на наступних двох лемах.

Лема 2.1. *Нехай виконані умови теореми 2.1. Тоді існують такі додатні сталі K_1, β , які залежать тільки від відомих параметрів $\nu_1, \nu_2, n, m_1, \dots, m_n, t, R_0$, що виконується наступна нерівність*

$$M_u(\rho) \leq K_1 \rho^{-n+\beta}, \quad 0 < \rho < R_0. \quad (2.11)$$

Лема 2.2. *Нехай виконані умови теореми 2.1. Тоді існує така додатня стала K_2 , яка залежить тільки від відомих параметрів $\nu_1, \nu_2, n, m_1, \dots, m_n, t, R_0$, що справедлива наступна оцінка*

$$|u(x, t)| \leq K_2, \quad \forall (x, t) \in D\left(\frac{R_0}{2}\right). \quad (2.12)$$

2.2 Інтегральні оцінки розв'язків

Будемо вважати, що

$$\lim_{r \rightarrow 0} M_u(r) = \infty. \quad (2.13)$$

Зафіксуємо достатньо маленьке число $R_0 : M_u(R_0) \geq 1$. Для кожного $\rho : 2\rho \leq R_0$ будемо використовувати наступні позначення: $u_{2\rho}(x, t) = (u(x, t) - M_u(2\rho))_+$, $E_{2\rho} = \{(x, t) \in D(2\rho) : u(x, t) > M_u(2\rho)\}$.

В подальшому через γ будемо позначати сталу, яка залежить тільки від відомих параметрів $\nu_1, \nu_2, n, m_1, \dots, m_n, t, R_0$ і може змінюватися від рядка до рядка.

Нехай $\eta_r \in C^\infty(\Omega_T)$ така зрізаюча функція, що

- (i) $0 \leq \eta_r(x, t) \leq 1$ в області Ω_T ,
- (ii) $\eta_r \equiv 0$ на множині $D(r)$, $\eta_r \equiv 1$ зовні $D(2r)$,
- (iii) $\left| \frac{\partial \eta_r}{\partial t} \right| \leq \gamma r^{-k}$, $\left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right| \leq \gamma r^{-k_i}$, де $k, k_i, i = \overline{1, n}$ визначені рівностями (2.7).

Лема 2.3. *Нехай виконані умови теореми 2.1. Тоді для кожного $r : 0 < r < \rho < R_0$ справедлива наступна нерівність*

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} u^{\theta+1}(x, t) \eta_r^2(x, t) dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \iint_{E_{2\rho}} u^{m_i-1} u_{2\rho}^{\theta-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \eta_r^2 dx dt \leq \gamma M_u^\theta(r) \quad (2.14)$$

де $\theta \in \left(0, \min_{1 \leq i \leq n} m_i\right)$.

Доведення. В інтегральну тотожність (2.9) у якості пробної функції підставимо

$$\varphi(x, t) = u_{2\rho}^\theta(x, t) \eta_r(x, t), \quad \psi(x, t) = \eta_r(x, t).$$

Застосуємо структурні нерівності (2.4)

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} u_{2\rho}^{\theta+1}(x, t) \eta_r^2(x, t) dx + \iint_{E_{2\rho}} \sum_{i=1}^n |u|^{m_i-1} u_{2\rho}^{\theta-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \eta_r^2 dx dt \leq \\ & \leq \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E_{2\rho}} |u|^{\frac{m_i-1}{2}} u_{2\rho}^\theta \left(\sum_{j=1}^n |u|^{m_j-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right| \eta_r dx dt + \\ & + \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E_{2\rho}} |u|^{\frac{m_i-1}{2}} u_{2\rho}^\theta \left(|u|^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \eta_r^2 dx dt + \gamma \iint_{E_{2\rho}} u_{2\rho}^{\theta+1} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial t} \right| \eta_r dx dt \end{aligned}$$

Після використання нерівності Юнга отримаємо

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} u_{2\rho}^{\theta+1}(x, t) \eta_r^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \iint_{E_{2\rho}} u^{m_i-1} u_{2\rho}^{\theta-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \eta_r^2 dx dt \leq \\ & \leq \gamma \iint_{E_{2\rho}} u_{2\rho}^{\theta+1} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial t} \right| \eta_r dx dt + \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E_{2\rho}} u^{m_i-1} u_{2\rho}^{\theta+1} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right|^2 dx dt + \\ & + \gamma \iint_{E_{2\rho}} u^{m-1} u_{2\rho}^{\theta+1} \eta_r^2 dx dt. \quad (2.15) \end{aligned}$$

Перший і другий доданки у правій частині останньої нерівності оцінимо, використовуючи означення функцій $M_u(r)$ та $\eta_r(x, t)$

$$\begin{aligned} & \gamma \iint_{E_{2\rho}} u_{2\rho}^{\theta+1} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial t} \right| \eta_r dx dt + \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E_{2\rho}} u^{m_i-1} u_{2\rho}^{\theta+1} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \leq \\ & \leq \gamma M_u^\theta(r) \left(M_u(r) r^{-k} + \sum_{i=1}^n M_u^{m_i}(r) r^{-2k_i} \right) |D(2r) \setminus D(r)| \leq \gamma M_u^\theta(r) \quad (2.16) \end{aligned}$$

Легко побачити, що останній член у правій частині (2.15) можна оцінити наступним чином:

$$\int\int_{E_{2\rho}} u^{m-1} u_{2\rho}^{\theta+1} \eta_r^2 dx dt \leq \gamma M_u^\theta(r) \int\int_{E_{2\rho}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{k_i}} + t^{\frac{1}{k}} \right)^{-nm} dx dt \leq \gamma M_u^\theta(r) \quad (2.17)$$

Поєднуючи формули (2.15)-(2.17), ми отримуємо необхідну оцінку (2.14). \square

Щоб сформулювати наступну лему введемо позначення

$$\Phi_{\rho,2\rho}(u(x,t)) = \min\{u_{2\rho}, M_u(\rho) - M_u(2\rho)\},$$

$$E(\rho, 2\rho) = \{(x,t) \in \Omega_T : 0 < u_{2\rho}(x,t) < M_u(\rho) - M_u(2\rho)\},$$

$$\varepsilon(r) = M_u(r)r^n + r^2(M_u(r)r^n)^m + \sum_{i=1}^n (M_u(r)r^n)^{m_i}.$$

Лема 2.4. *Нехай виконані умови теореми 2.1. Тоді має місце наступна нерівність*

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} \Phi_{\rho,2\rho}^2(u(x,t)) \eta_r^2(x,t) dx + \sum_{i=1}^n \int\int_{E(\rho,2\rho)} u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \eta_r^2 dx dt &\leq \\ &\leq \gamma(M_u(\rho) - M_u(2\rho)) \sum_{i=1}^n \int\int_{E_\rho} u^{\frac{m-1}{2}} \left(u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \eta_r^2 dx dt + \\ &+ \gamma\varepsilon(r)(M_u(\rho) - M_u(2\rho)) + \gamma(M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{1-\delta_1}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

де $\delta_1 \in (0, \frac{2}{n})$, $0 < r < \rho < R$.

Доведення. Підставимо в інтегральну тотожність (2.9) пробну функцію вигляду

$$\varphi(x,t) = \Phi_{\rho,2\rho}(u(x,t)) \eta_r(x,t), \quad \psi(x,t) = \eta_r(x,t).$$

Використавши структурні нерівності (2.4), отримуємо

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} \Phi_{\rho,2\rho}^2(u(x,t)) \eta_r^2(x,t) dx + \int\int_{E(\rho,2\rho)} \sum_{i=1}^n u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \eta_r^2 dx dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma(M_u(\rho) - M_u(2\rho)) \sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} u^{\frac{m_i-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n u^{m_j-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right| \eta_r dx dt + \\
&+ \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} \Phi_{\rho, 2\rho}(u(x, t)) u^{\frac{m_i-1}{2}} \left(u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \eta_r^2 dx dt + \\
&\quad + \gamma \iint_{E_\rho} \Phi_{\rho, 2\rho}^2(u(x, t)) \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial t} \right| \eta_r dx dt. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Застосуємо нерівність Гьольдера, лему 2.3 до першого члену у правій частині нерівності (2.19) і використаємо означення функції $\Phi_{\rho, 2\rho}(u(x, t))$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} u^{\frac{m_i-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n u^{m_j-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right| \eta_r^2 dx dt \leq \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} |u|^{m_i-1} u_{2\rho}^{1-\theta} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_j} \right|^2 \eta_r^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \iint_{E_\rho} |u|^{m_j-1} u_{2\rho}^{\theta-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \eta_r^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \gamma \sum_{i=1}^n M_u^{\frac{m_i-\theta}{2}}(r) r^{\frac{n+k}{2}-k_i} \left(\sum_{j=1}^n \iint_{E_\rho} u^{m_j-1} u_{2\rho}^{\theta-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \eta_r^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \gamma \sum_{i=1}^n [M_u(r) r^n]^{\frac{m_i}{2}} \leq \gamma \varepsilon(r). \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Другий доданок у правій частині формули (2.19) можна представити таким чином:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} \Phi_{\rho, 2\rho}(u(x, t)) u^{\frac{m_i-1}{2}} \left(u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \eta_r^2 dx dt \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} \Phi_{\rho, 2\rho}(u(x, t)) u^{\frac{m_i-1}{2}} \left(u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \eta_r^2 dx dt + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \iint_{E_{(\rho, 2\rho)}} \Phi_{\rho, 2\rho}(u(x, t)) u^{\frac{m_i-1}{2}} \left(u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \eta_r^2 dx dt. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Оцінімо другий інтеграл в правій частині (2.21):

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \iint_{E(\rho, 2\rho)} \Phi_{\rho, 2\rho}(u(x, t)) u^{\frac{m-1}{2}} \left(u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \eta_r^2 dx dt \leq \\
& \leq \sum_{i=1}^n \iint_{E(\rho, 2\rho)} |u|^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \eta_r^2 dx dt + \iint_{E(\rho, 2\rho)} \Phi_{\rho, 2\rho}^2(u(x, t)) |u|^{m-1} \eta_r^2 dx dt \leq \\
& \leq \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E(\rho, 2\rho)} u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \eta_r^2 dx dt + \gamma (M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{1-\delta_1}. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Об'єднуючи оцінки (2.19) - (2.22), отримаємо необхідну нерівність (2.18), що завершує доведення лема 2.4. \square

Лема 2.5. *Нехай виконані умови теореми 2.1. Тоді має місце наступна оцінка*

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} u_{2\rho}^{-q} u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \eta_r^2 dx dt \leq \\
& \leq \gamma (M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{2(1-q)} + \gamma (M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{1-q} \varepsilon(r) \quad (2.23)
\end{aligned}$$

з $1 < q < 1 + \min \left[\frac{2}{n}, \frac{1}{2} \right]$.

Доведення. В інтегральну тотожність (2.9) підставимо наступну пробну функцію

$$\varphi = ([M_u(\rho) - M_u(2\rho)]^{1-q} - [\max(u_{2\rho}, M_u(\rho) - M_u(2\rho))]^{1-q})_+ \eta_r, \quad \psi = \eta_r.$$

Оскільки за визначенням $E_\rho = \{(x, t) \in D(\rho) : u(x, t) > M_u(\rho)\}$, тоді

$$u_{2\rho} = u(x, t) - M_u(2\rho) > M_u(\rho) - M_u(2\rho)$$

і пробна функція має вигляд $\varphi = ([M_u(\rho) - M_u(2\rho)]^{1-q} - u_{2\rho}^{1-q}) \eta_r$.

Використовуючи структурні нерівності (2.4) та нерівність Юнга, отримаємо

$$\sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} \sum_{i=1}^n u_{2\rho}^{-q} u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \eta_r^2 dx dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma(M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{1-q} \sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} u^{\frac{m_i-1}{2}} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right| \left(\sum_{j=1}^n u^{m_j-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \eta_r dx dt + \\
&+ \gamma(M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{1-q} \sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} u^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n u^{m_j-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \eta_r^2 dx dt + \\
&\quad + \gamma(M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{2(1-q)} \iint_{E_\rho} \eta_r \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial t} \right| dx dt. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Перший доданок у парвй частині останньої нерівності оцінимо за допомогою нерівності Гьольдера і леми 2.5

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} u^{\frac{m_i-1}{2}} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right| \left(\sum_{j=1}^n u^{m_j-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \eta_r dx dt \leq \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} u^{m_i-1} u^{1-\theta} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right|^2 \eta_r^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \left(\sum_{j=1}^n \iint_{E_\rho} u^{m_j-1} u^{\theta-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \eta_r^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma r^{\frac{n\theta}{2}} (\gamma M_u^\theta(r))^{\frac{1}{2}} \leq \gamma \varepsilon(r). \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Застосувавши нерівність Юнга і умову (2.7) до другого доданку у правій частині нерівності (2.24), матимемо

$$\begin{aligned}
&(M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{1-q} \sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} u^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n u^{m_j-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \eta_r^2 dx dt \leq \\
&\leq (M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{2(1-q)} \rho^{2+n(1-q)} + \sum_{j=1}^n \iint_{E_\rho} u^{m_j-1} u_{2\rho}^{-q} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \eta_r^2 dx dt. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

І оцінимо останній доданок у нерівності (2.24), використовуючи означення зрізаючої функції

$$\iint_{E_\rho} \eta_r \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial t} \right| dx dt \leq \gamma r^{-k} |D(2r) \setminus D(r)| \leq \gamma. \tag{2.27}$$

Об'єднуючи оцінки (2.24)-(2.27), ми отримаємо необхідну нерівність (2.23). \square

Комбінуючи леми 2.4 й 2.5, отримали наступний результат:

Лема 2.6. *Нехай виконані умови теореми 2.1. Тоді виконується наступна нерівність*

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} \Phi_{\rho, 2\rho}^2(u(x, t)) \eta_r^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \iint_{E(\rho, 2\rho)} u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \eta_r^2 dx dt \leq \\ & \leq \gamma \varepsilon(r) (M_u(\rho) - M_u(2\rho)) + \gamma \varepsilon(r) (M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{2-q} + \\ & + \gamma (M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{1-\delta_1} + \gamma (M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{1-\delta_2}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

де $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$.

Доведення. В силу нерівності Юнга маємо

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} u^{\frac{m-1}{2}} \left(u^{m_i-1} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \eta_r^2 dx dt \leq \\ & \leq \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E_\rho} u_{2\rho}^{-q} u^{m_i-1} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right|^2 \eta_r^2 dx dt + \gamma \iint_{E_\rho} u_{2\rho}^q u^{m-1} \eta_r^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Оцінимо останній інтеграл у правій частині (2.29) аналогічно (2.17)

$$\iint_{E_\rho} u_{2\rho}^q u^{m-1} \eta_r^k dx dt \leq \gamma \rho^{2+n(1-q)}. \quad (2.30)$$

Комбінуючи нерівності (2.18), (2.23), (2.29), (2.30), отримаємо необхідну оцінку (2.28). \square

Враховуючи умову (2.10), перейдемо до границі, коли $r \rightarrow 0$, у нерівності (2.28) та отримаємо наступне твердження.

Зауваження 2.1. Нехай виконані умови теореми 2.1. Тоді справедлива наступна оцінка

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} \Phi_{\rho, 2\rho}^2(u(x, t)) dx + \sum_{i=1}^n \iint_{E_{\rho, 2\rho}} u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \leq \\ & \leq \gamma (M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{1-\delta_1} + \gamma (M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{1-\delta_2}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

де $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1)$.

2.3 Поточкові оцінки розв'язків

Нехай (\tilde{x}, \tilde{t}) довільна точка в $D(R_0) \setminus D(\rho)$. Для будь-яких додатніх чисел $\rho : 0 < r < \rho < R$ та h ми визначимо послідовності чисел $\rho_j := \frac{\rho}{2}(1 + 2^{-j})$, $h_j := h(1 - 2^{-j})$, $j = \overline{1, n}$ та сім'ю множин:

$$Q(\rho_j) := \left\{ (x, t) : \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i - \tilde{x}_i|}{\rho_j^{k_i}} \right)^2 + \frac{|t - \tilde{t}|}{\rho_j^k} < 1 \right\},$$

$$A_j := \{(x, t) \in Q(\rho_j) : u_{2\rho} > h_j\}.$$

Позначемо через $\zeta_j \in C_0^\infty(Q(\frac{\rho_j + \rho_{j+1}}{2}))$ функцію, яка задовольняє наступним умовам:

- (i) $\zeta_j(x, t) \equiv 1$ ззовні множини $Q(\rho_j)$,
- (ii) $\zeta_j(x, t) \equiv 0$ для $(x, t) \in Q(\rho_{j+1})$;
- (iii) $\left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial t} \right| \leq \gamma 2^{jk} \rho^{-k}$, $\left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| \leq \gamma 2^{jk_i} \rho^{-k_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Підставимо в інтегральну тотожність (2.9) функцію

$$\varphi = (u_{2\rho} - h_j)_+ \zeta_j, \quad \psi = \zeta_j.$$

Застосовуючи умову (2.4), нерівність Юнга та властивості зрізаючої функції ζ_j , отримаємо

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{A_j(t)} (u_{2\rho} - h_j)_+^2 \zeta_j^2 dx + \sum_{i=1}^n \iint_{A_j} u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \zeta_j^2 dx dt \leq \\ & \leq \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{A_j} u^{m_i-1} \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right|^2 (u_{2\rho} - h_j)_+^2 \zeta_j dx dt + \\ & + \gamma \iint_{A_j} (u_{2\rho} - h_j)^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial t} \right| \zeta_j dx dt + \gamma \iint_{A_j} u^{m-1} (u_{2\rho} - h_j)_+^2 \zeta_j^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Застосуємо означення функції $M_u(\rho)$ і умову (2.10)

$$\sum_{i=1}^n \iint_{A_j} u^{m_i-1} \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right|^2 (u_{2\rho} - h_j)_+^2 \zeta_j dx dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma \sum_{i=1}^n 2^{2jk_i} \rho^{-2k_i} M_u^{m_i+1} \left(\frac{\rho}{2}\right) |A_j| = \\
&= \gamma \sum_{i=1}^n 2^{2jk_i} \rho^{-2k_i} \left(M_u \left(\frac{\rho}{2}\right) \left(\frac{\rho}{2}\right)^n\right)^{m_i+1} |A_j| \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n(m_i+1)} \leq \\
&\leq \gamma 2^{j\gamma} \rho^{-n(m+1)-2} |A_j|, \tag{2.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iint_{A_j} (u_{2\rho} - h_j)_+^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial t} \right| \zeta_j dx dt \leq \gamma 2^{jk} \rho^{-k} M_u^2 \left(\frac{\rho}{2}\right) |A_j| = \\
&= \gamma 2^{jk} \rho^{-k} \left(M_u \left(\frac{\rho}{2}\right) \left(\frac{\rho}{2}\right)^n\right)^2 |A_j| \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-2n} \leq \gamma 2^{jk} \rho^{-n(m+1)-2} |A_j|, \tag{2.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iint_{A_j} u^{m-1} (u_{2\rho} - h_j)_+^2 \zeta_j^2 dx dt \leq \gamma M_u^{m+1} \left(\frac{\rho}{2}\right) |A_j| = \\
&= \gamma \left(M_u \left(\frac{\rho}{2}\right) \left(\frac{\rho}{2}\right)^n\right)^{m+1} |A_j| \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n(m+1)} \leq \gamma \rho^{-n(m+1)} |A_j|. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Поєднуючи нерівності (2.33)-(2.35), отримаємо наступну додаткову інтегральну оцінку

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{A_j(t)} (u_{2\rho} - h_j)_+^2 \zeta_j^2 dx + \sum_{i=1}^n \iint_{A_j} u^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \zeta_j^2 dx dt \leq \\
&\leq \gamma 2^{j\gamma} \rho^{-n(m+1)-2} |A_j|. \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Позначимо через i_0 такі номери, що $m_i < 1$, $i = \overline{0, i_0}$ та $m_i > 1$, $i = \overline{i_0 + 1, n}$. Приймаючи до уваги, що $u \leq M_u \left(\frac{\rho}{2}\right)$, $u > M_u(2\rho) + h_j > h_j$ на множині A_j , отримаємо наступну лему із нерівності (2.36)

Лема 2.7. *Нехай виконані умови теореми 2.1. Тоді справедлива наступна оцінка*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{A_j(t)} (u_{2\rho} - h_j)_+^2 \zeta_j^2 dx + \sum_{i=1}^{i_0} M^{m_i-1} \left(\frac{\rho}{2}\right) \iint_{A_j} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \zeta_j^2 dx dt + \\
&+ \sum_{i=i_0+1}^n h_j^{m_i-1} \iint_{A_j} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \zeta_j^2 dx dt \leq \gamma 2^{(j+1)\gamma} \rho^{-n(m+1)-2} |A_j|. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

$$\text{де } m' = \frac{1}{i_0} \sum_{i=0}^{i_0} m_i, \quad m'' = \frac{1}{n-i_0} \sum_{i=i_0+1}^n m_i.$$

Тепер перейдемо до доведення теореми 2.1. Будемо використовувати лему 1.1 про геометричну збіжність послідовності чисел, у якості Y_{j+1} візьмемо $\iint_{A_{j+1}} (u_{2\rho} - h_{j+1})_+^2 dxdt$, та застосуємо нерівність Гьольдера

$$\begin{aligned}
& \iint_{A_{j+1}} (u_{2\rho} - h_{j+1})_+^2 dxdt \leq \iint_{A_{j+1}} (u_{2\rho} - h_{j+1})_+^2 \zeta_j^2 dxdt \\
& \leq \left(\iint_{A_{j+1}} ((u_{2\rho} - h_{j+1})_+ \zeta_j)^{\frac{2(n+2)}{n}} dxdt \right)^{\frac{n}{n+2}} \left(\iint_{A_{j+1}} 1 dxdt \right)^{\frac{2}{n+2}} \leq \\
& \leq |A_{j+1}|^{\frac{2}{n+2}} \left(\iint_{A_{j+1}} ((u_{2\rho} - h_{j+1})_+ \zeta_j)^{2+\frac{4}{n}} dxdt \right)^{\frac{n}{n+2}} \leq \\
& \leq |A_{j+1}|^{\frac{2}{n+2}} \left(\int_0^t \left(\int_{A_{j+1}(x)} ((u_{2\rho} - h_{j+1})_+ \zeta_j)^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \times \right. \\
& \quad \left. \times \left(\int_{A_{j+1}(x)} (u_{2\rho} - h_{j+1})_+^2 \zeta_j^2 dx \right)^{\frac{2}{n}} dt \right)^{\frac{n}{n+2}}.
\end{aligned}$$

Один з множників в останній нерівності винесемо з під знаку інтеграла, оцінюючи суттєвим супремумом по t , а до другого застосуємо лему 1.2 з $\alpha_i = 0$, $p_i = 2$, $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
& \iint_{A_{j+1}} (u_{2\rho} - h_{j+1})_+^2 dxdt \leq |A_{j+1}|^{\frac{2}{n+2}} \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \left(\int_{A_{j+1}(x)} (u_{2\rho} - h_{j+1})_+^2 \zeta_j^2 dx \right)^{\frac{2}{n+2}} \times \\
& \quad \times \left(\int_0^t \prod_{i=1}^n \left(\int_{A_{j+1}(x)} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u \zeta_j) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{n}} dt \right)^{\frac{n}{n+2}}. \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Далі до першого і другого множника попередньої оцінки застосуємо лему 2.7, тільки спочатку другий множник приведемо до необхідного вигляду

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \prod_{i=1}^n \left(\int_{A_{j+1}(x)} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u\zeta_j) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{n}} dt = \left(M^{\frac{(1-m')i_0}{n}} \left(\frac{\rho}{2} \right) h_{j+1}^{\frac{(1-m'')(n-i_0)}{n}} \times \right. \\
& \times \int_0^T \prod_{i=1}^{i_0} M^{\frac{(m_i-1)}{n}} \left(\frac{\rho}{2} \right) \left(\int_{A_{j+1}(x)} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u\zeta_j) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{n}} \times \\
& \times \prod_{i=i_0+1}^n h_{j+1}^{\frac{(m_i-1)}{n}} \left(\int_{A_{j+1}(x)} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u\zeta_j) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{n}} dt \leq \\
& \leq M_u^{\frac{(1-m')i_0}{n+2}} \left(\frac{\rho}{2} \right) h_{j+1}^{\frac{(1-m'')(n-i_0)}{n+2}} \left(\sum_{i=1}^{i_0} M_u^{m_i-1} \left(\frac{\rho}{2} \right) \iint_{A_j} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u\zeta_j) \right|^2 \varphi_j^2 dx dt + \right. \\
& \left. + \sum_{i=i_0+1}^n h_j^{m_i-1} \iint_{A_j} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u\zeta_j) \right|^2 dx dt \right)^{\frac{n}{n+2}} \leq \\
& \leq M_u^{\frac{(1-m')i_0}{n+2}} \left(\frac{\rho}{2} \right) h_{j+1}^{\frac{(1-m'')(n-i_0)}{n+2}} \left(\sum_{i=1}^{i_0} M_u^{m_i-1} \left(\frac{\rho}{2} \right) \iint_{A_j} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \zeta_j^2 dx dt + \right. \\
& + \sum_{i=i_0+1}^n h_j^{m_i-1} \iint_{A_j} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \zeta_j^2 dx dt + \sum_{i=1}^{i_0} M_u^{m_i-1} \left(\frac{\rho}{2} \right) \iint_{A_j} u^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right|^2 dx dt + \\
& \left. + \sum_{i=i_0+1}^n h_j^{m_i-1} \iint_{A_j} u^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \right) \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Комбінуючи нерівності (2.38), (2.40), застосовуючи лему 2.7 і використовуючи оцінку (2.33), отримаємо

$$\iint_{A_{j+1}} (u_{2\rho} - h_{j+1})_+^2 dx dt \leq$$

$$\leq \gamma 2^{j\gamma} \rho^{-n(m+1)-2} M_u^{\frac{(1-m')i_0}{n+2}} \left(\frac{\rho}{2}\right) h_{j+1}^{\frac{(1-m'')(n-i_0)}{n+2}} |A_{j+1}|^{1+\frac{2}{n+2}}.$$

Використаємо очевидну нерівність

$$|A_{j+1}| \leq 2^{j\gamma} h^{-2} \iint_{A_j} (u_{2\rho} - h_j)_+^2 dx dt, \quad (2.40)$$

яку можна отримати з наступної оцінки, проінтегрувавши її за множиною A_{j+1}

$$1 = \left(\frac{h_{j+1} - h_j}{h_{j+1} - h_j}\right)^2 \leq \left(\frac{u_{2\rho} - h_j}{h_{j+1} - h_j}\right)^2 = \left(\frac{(u_{2\rho} - h_j)2^{j+1}}{h}\right)^2.$$

Будемо мати після застосування (2.40):

$$\begin{aligned} \iint_{A_{j+1}} (u_{2\rho} - h_{j+1})_+^2 dx dt &\leq \gamma \rho^{-n(m+1)-2} M_u^{-\frac{i_0(m'-1)}{n+2}} \left(\frac{\rho}{2}\right) \times \\ &\times h^{-\frac{(n-i_0)(m''-1)}{n+2}-2(1+\frac{2}{2+n})} \left(\iint_{A_j} (u_{2\rho} - h_j)^2 dx dt\right)^{1+\frac{2}{2+n}}. \end{aligned}$$

Або в наших позначеннях

$$Y_{j+1} \leq \gamma \rho^{-n(m+1)-2} M_u^{-\frac{i_0(m'-1)}{n+2}} \left(\frac{\rho}{2}\right) h^{-\frac{(n-i_0)(m''-1)}{n+2}-2(1+\frac{2}{2+n})} Y_j^{1+\frac{2}{2+n}}.$$

Оберемо h з умови

$$\rho^{-n(m+1)-2+\frac{i_0(m'-1)}{n+2}} h^{-\frac{(n-i_0)(m''-1)}{n+2}-2(1+\frac{2}{2+n})} \left(\iint_{Q(\rho)} u_{2\rho}^2 dx dt\right)^{\frac{2}{2+n}} \leq 1$$

та використовуючи лему 1.1, отримаємо

$$\begin{aligned} \left(M_u\left(\frac{\rho}{2}\right) - M_u(2\rho)\right)^{\frac{1}{2}(n-i_0)(m''-1)+n+4} &\leq \\ &\leq \gamma \rho^{-(n(m+1)+2)\frac{n+2}{2}+\frac{i_0 n(m'-1)}{2}+k} \sup_{0 < t < T} \int_{Q(\rho)} u_{2\rho}^2 dx. \end{aligned} \quad (2.41)$$

З нерівності (2.41) та з зауваження 2.1, маємо

$$M_u\left(\frac{\rho}{2}\right) - M_u(2\rho) \leq \gamma\rho^{-n+\beta},$$

або

$$M_u(\rho) - M_u(4\rho) \leq \gamma\rho^{-n+\beta}, \quad (2.42)$$

де

$$\beta = \frac{n\delta}{\frac{1}{2}(n-i_0)(m''-1) + n + 4} > 0, \quad \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Позначимо через ρ_j і m_j наступні послідовності

$$\rho_j = \frac{R_1}{4^j}, \quad m_j = M_u(\rho_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

Перепишемо нерівність (2.42) у наших позначеннях

$$m_j - m_{j-1} \leq \gamma 4^{j(n-\beta)} R_1^{-n+\beta}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.43)$$

Сумуючи, цю нерівність по j від 1 до J , будемо мати

$$m_J - m_0 \leq \gamma R_1^{-n+\beta} \sum_{j=1}^J 4^{j(n-\beta)} \quad (2.44)$$

З нерівності (2.44) отримаємо необхідну оцінку (2.11), що доводить лему 2.1.

2.4 Доведення обмеженості розв'язку

Для $j = 0, 1, 2, \dots$ визначимо додатні послідовності чисел $\rho_j := \frac{R_0}{2}(1 + 2^{-j})$, $\bar{\rho}_j := \frac{1}{2}(\rho_j + \rho_{j+1})$, $h_j = h(1 - 2^{-j})$ та сім'ю множин $A_{h_j, \rho_j} := \{(x, t) \in Q(\rho_j) : u^\lambda > h_j\}$, де h додатня стала, яка залежить тільки від відомих параметрів, які будуть вказані пізніше, та $0 < \lambda < \min\{\min_{1 \leq i \leq n} m_i, \frac{\beta}{n-\beta}, \frac{(1-\frac{2}{n})\beta+n}{n-\beta}\}$ з β із (2.11). Нехай $\xi_j \in C_0^\infty(D(\bar{\rho}_j))$, $0 \leq \xi_j \leq 1$, $\xi_j = 1$ на множині $D(\rho_{j+1})$ і $\left|\frac{\partial \xi_j}{\partial t}\right| \leq \gamma 2^{j\gamma} R_0^{-k}$, $\left|\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\right| \leq \gamma 2^{j\gamma} R_0^{-k_i}$, $i = \overline{1, n}$, де k, k_i визначені в (2.7).

Підставимо в інтегральну тотожність (2.9) пробну функцію

$$\varphi = (u^\lambda - h_{j+1})_+ \xi_j^2 \eta_r, \quad \psi = \eta_r,$$

де функція η_r визначена в підрозділі 2.2.

Використовуючи структурні нерівності (2.4) та нерівність Юнга, ми отримаємо

$$\begin{aligned}
& \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} u_t (u^\lambda - h_{j+1})_+ \xi_j^2 \eta_r^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} u^{m_i + \lambda - 2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \xi_j^2 \eta_r^2 dx dt \leq \\
& \leq \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} (u^\lambda - h_{j+1})_+ u^{m_i} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right|^2 \xi_j^2 \eta_r dx dt + \\
& + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} (u^\lambda - h_{j+1})_+ u^{m_i} \left| \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right|^2 \xi_j \eta_r^2 dx dt + \\
& + \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} (u^\lambda - h_{j+1})_+ u^{m_i} \xi_j^2 \eta_r^2 dx dt. \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Підінтегральну функцію першого доданку у лівій частині останньої формули представимо як похідну від інтегралу зі змінною верхньою межею

$$u_t (u^\lambda - h_{j+1})_+ = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{(u^\lambda - h_{j+1})_+} (s + h_{j+1})^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} s ds \right).$$

Тепер оцінимо цей доданок знизу та проінтегруємо частинами

$$\begin{aligned}
& \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{(u^\lambda - h_{j+1})_+} (s + h_{j+1})^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} s ds \right) \xi_j^2 \eta_r^2 dx dt \geq \\
& \geq \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{(u^\lambda - \mu_{j+1})_+} s^{\frac{1-\lambda}{\lambda} + 1} ds \right) \xi_j^2 \eta_r^2 dx dt = \\
& = \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} \frac{\partial}{\partial t} \left((u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{1}{\lambda} + 1} ds \right) \xi_j^2 \eta_r^2 dx dt = \\
& = \int_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}(t)} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{1}{\lambda} + 1} \xi_j^2 \eta_r^2 dx - \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{1}{\lambda} + 1} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial t} \right| \xi_j^2 \eta_r dx dt -
\end{aligned}$$

$$- \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{1}{\lambda}+1} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial t} \right| \xi_j^2 \eta_r dx dt$$

З урахуванням перетворень першого доданку нерівність (2.45) запишемо у наступному вигляді

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}(t)} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{1}{\lambda}+1} \xi_j^2 \eta_r^2 dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} u^{m_i+\lambda-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \xi_j^2 \eta_r^2 dx dt \leq \gamma \sum_{i=1}^5 J_i, \end{aligned} \quad (2.46)$$

де

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} u^{m_i+\lambda} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \right|^2 \xi_j^2 \eta_r dx dt,$$

$$J_2 = \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} u^{\lambda+1} \left| \frac{\partial \eta_r}{\partial t} \right| \xi_j^2 \eta_r dx dt,$$

$$J_3 = \sum_{i=1}^n \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} u^{m_i+\lambda} \left| \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right|^2 \xi_j \eta_r^2 dx dt,$$

$$J_3 = \sum_{i=1}^n \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} u^{m_i+\lambda} \left| \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right|^2 \xi_j \eta_r^2 dx dt,$$

$$J_4 = \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} u^{\lambda+1} \eta_r^2 \xi_j \left| \frac{\partial \xi_j}{\partial t} \right| dx dt,$$

$$J_5 = \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} u^{m+\lambda} \xi_j^2 \eta_r^2 dx dt.$$

Щоб оцінити ці доданки використаємо оцінку (2.11), яка доведена у попередньому підрозділі, і означення зрізаючих функцій

$$J_1 \leq \gamma r^{(m_i+\lambda)(\beta-n)} r^{-2k_i} r^{n+k} = \gamma r^{m_i\beta+\lambda(\beta-n)+n},$$

$$J_2 \leq \gamma r^{(\lambda+1)(\beta-n)} r^{-k} r^{n+k} \leq \gamma r^{\beta(\lambda+1)-n\beta},$$

$$J_3 + J_4 \leq \gamma 2^{j\gamma} R_0^{-n(m+\lambda)-2} |A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}|, \quad (2.47)$$

$$J_5 \leq \gamma 2^{j\gamma} R_0^{-n(m+\lambda)} |A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}|.$$

Комбінуючи оцінки (2.46), (2.47) і переходячи до границі, коли $r \rightarrow 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}(t)} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{1}{\lambda}+1} \xi_j^2 dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} u^{m_i+\lambda-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \xi_j^2 dx dt \leq \gamma 2^{j\gamma} R_0^{-n(m+\lambda)-2} |A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}|. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Застосуємо лему 1.1, позначивши $Y_{j+1} = \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_{j+1}}} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{m+\lambda}{\lambda}} dx dt$.

Встановлюючи $\tilde{q} = \frac{m+\lambda}{\lambda} + \frac{1+\lambda}{\lambda} \frac{2}{n}$, $a = 2(m+\lambda) \max\left(\frac{1}{1+\lambda}, \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} m_i + \lambda}\right)$ і використовуючи нерівність Гьольдера, будемо мати

$$\begin{aligned} Y_{j+1} &= \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_{j+1}}} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{m+\lambda}{\lambda}} dx dt \leq \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{m+\lambda}{\lambda}} \xi_j^a dx dt \leq \\ &\leq \left(\iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\tilde{q}} \xi_j^{\frac{a\tilde{q}}{m+\lambda}} dx dt \right)^{\frac{m+\lambda}{\lambda\tilde{q}}} |A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}|^{1-\frac{m+\lambda}{\lambda\tilde{q}}} \leq \\ &\leq \left(\int_0^T \left(\int_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} \left((u^\lambda - h_{j+1})_+ \xi_j^{\frac{a\tilde{q}}{m+\lambda}} \right)^{\frac{n(m+\lambda)}{(n-2)\lambda}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}(t)} \left((u^\lambda - h_{j+1})_+ \xi_j \right)^{\frac{1}{\lambda}+1} dx \right)^{\frac{2}{n}} dt \right)^{\frac{m+\lambda}{\lambda\tilde{q}}} \times |A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}|^{1-\frac{m+\lambda}{\lambda\tilde{q}}}. \end{aligned}$$

Застосовуючи лему 1.2 з $\alpha_i = \frac{m_i - \lambda}{\lambda} > 0$, $i = \overline{1, n}$, отримаємо

$$\begin{aligned} Y_{j+1} &= \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_{j+1}}} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{m+\lambda}{\lambda}} dx dt \leq \\ &\leq \gamma \left(\sup_{0 < t < T} \int_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}(t)} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \xi_j^2 dx \right)^{\frac{2}{n} \frac{m+\lambda}{\lambda\tilde{q}}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^T \prod_{i=0}^n \left(\int_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}(t)} \left((u^\lambda - h_{j+1})_+ \xi_j^{\frac{a\lambda}{m+\lambda}} \right)^{\frac{m_i - \lambda}{\lambda}} \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (u^\lambda - h_{j+1})_+ \xi_j^{\frac{a\lambda}{m+\lambda}} \right\} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{n}} dt \right)^{\frac{m+\lambda}{\lambda \bar{q}}} \\
& \leq \gamma \left(\sup_{0 < t < T} \int_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}(t)} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \xi_j^2 dx \right)^{\frac{2}{n} \frac{m+\lambda}{\lambda \bar{q}}} |A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}|^{1 - \frac{m+\lambda}{\lambda \bar{q}}} \times \\
& \times \left(\int_0^T \prod_{i=1}^n \left(\int_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}(t)} u^{m_i + \lambda - 2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \xi_j^{\frac{a(m_i + \lambda)}{m+\lambda}} dx + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}(t)} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{m_i + \lambda}{\lambda}} \left| \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right|^2 \xi_j^{\frac{a(m_i + \lambda) - 2(m+\lambda)}{m+\lambda}} dx \right)^{\frac{1}{n}} dt \right)^{\frac{m+\lambda}{\lambda \bar{q}}}.
\end{aligned}$$

Використаємо тепер нерівність Юнга і визначення сталої a

$$\begin{aligned}
Y_{j+1} & \leq \gamma \left(\sup_{0 < t < T} \int_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}(t)} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \xi_j^2 dx \right)^{\frac{2}{n} \frac{m+\lambda}{\lambda \bar{q}}} |A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}|^{1 - \frac{m+\lambda}{\lambda \bar{q}}} \times \\
& \times \left(\sum_{i=1}^n \left(\iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} u^{m_i + \lambda - 2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \xi_j^2 dx dt + \right. \right. \\
& \left. \left. + \iint_{A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}} (u^\lambda - h_{j+1})_+^{\frac{m_i + \lambda}{\lambda}} \left| \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \right) \right)^{\frac{m+\lambda}{\lambda \bar{q}}}.
\end{aligned}$$

Застосуємо оцінку (2.48)

$$Y_{j+1} \leq \gamma 2^{j\gamma} R_0^{-(n(m+\lambda)+2) \frac{m+\lambda}{\lambda \bar{q}} (1 + \frac{2}{n})} |A_{h_{j+1}, \bar{\rho}_j}|^{1 + \frac{2}{n} \frac{m+\lambda}{\lambda \bar{q}}}.$$

Остаточно отримаємо оцінку

$$Y_{j+1} \leq \gamma 2^{j\gamma} h^{-\frac{m+\lambda}{\lambda} (1 + \frac{2}{n} \frac{m+\lambda}{\lambda \bar{q}})} R_0^{-(n(m+\lambda)+2) \frac{m+\lambda}{\lambda \bar{q}} (1 + \frac{2}{n})} Y_j^{1 + \frac{2}{n} \frac{m+\lambda}{\lambda \bar{q}}}. \quad (2.49)$$

Застосувавши лему 1.1 до цієї нерівності, отримаємо, що $Y_j \rightarrow 0$, коли $j \rightarrow \infty$, якщо h задовольняє умові $h^{\frac{m+\lambda}{\lambda}(1+\frac{n}{2}\frac{\lambda\bar{q}}{m+\lambda})} = \gamma R_0^{-(n(m+\lambda)+2)\frac{m+\lambda}{\lambda\bar{q}}(1+\frac{n}{2})} Y_0^{\frac{2}{\lambda\bar{q}}\frac{m+\lambda}{\lambda}}$, з цього витікає

$$\begin{aligned} \text{ess sup} \left\{ |u| : (x, t) \in D \left(\frac{R_0}{2} \right) \right\}^{\frac{m+\lambda}{\lambda} + \frac{n\lambda\bar{q}}{2}} &\leq \\ &\leq \gamma R_0^{-(n(m+\lambda)+2)(1+\frac{n}{2})} \iint_{D(R_0)} |u|^{m+\lambda} dx dt. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Завдяки нашому вибору λ інтеграл у правій частині нерівності (3.46) є скінченним. Це завершує доведення леми 2.2.

2.5 Кінець доведення теореми 2.1

Нехай K компактна підмножина в Ω і функція $\eta \in C_0^\infty(\Omega_T)$ така, що $\eta = \begin{cases} 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ 1, & (x, t) \in K \times (0, T) \end{cases}$. В інтегральну тотожність (2.9) у якості пробної функції підставимо $\varphi = u\eta_r$, $\psi = \eta_r$. Використовуючи умову (2.4), нерівність Юнга, обмеженість розв'язку і переходячи до границі, коли $r \rightarrow 0$, отримаємо

$$\text{ess sup}_{0 < t < T} \int_K u^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_K |u|^{m_i-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \leq \alpha. \quad (2.51)$$

Тепер в інтегральну тотожність (2.9) підставимо $\varphi\eta_r$, де φ довільна функція, яка належить простору $\overset{o}{V}_m(\Omega_T)$. Використовуючи умову (3.47), обмеженість розв'язку і переходячи до границі, коли $r \rightarrow 0$, ми отримаємо інтегральну тотожність (2.9) з довільною функцією $\varphi \in \overset{o}{V}_m(\Omega_T)$ і $\psi \equiv 1$. Що доводить теорему 2.1.

Висновки до розділу 2

У розділі 2 було розглянуто слабкі розв'язки квазілінійного параболічного рівняння з дивергентною головною частиною, модельним випадком

якого є анізотропне рівняння пористого середовища. У першому підрозділі поставлена задача і введено означення слабких розв'язків. Допоміжні інтегральні оцінки розв'язків отримані у другому підрозділі. Третій підрозділ містить доведення поточної оцінки розв'язку в околі сингулярної точки. В четвертому, п'ятому підрозділах знаходиться доведення основних результатів розділу. Сформулюємо їх:

- отримана поточкова оцінка розв'язку задачі (2.2), (2.3) в околі особливості (лема 2.3);
- встановлено обмеженість слабого розв'язку задачі (2.2), (2.3) (лема 2.4);
- отримана умова усунутості ізольованої особливості для розв'язків анізотропного рівняння пористого середовища (теорема 2.1).

Основні результати, які викладені у цьому розділі, опубліковані у роботі [78].

РОЗДІЛ 3

ОЦІНКИ ТИПУ КЕЛЛЕРА-ОССЕРМАНА

В даному розділі досліджуються слабкі розв'язки квазілінійних параболічних рівнянь, модельними випадками яких є подвійно нелінійне анізотропне параболічне рівняння з абсорбційним членом

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \left(u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \right)_{x_i} + f(u) = 0,$$

з $m_i > 1, p_i \geq 2$, анізотропне рівняння пористого середовища з абсорбцією і градієнтною абсорбцією відповідно

$$u_t - \sum_{i=1}^n \left(u^{m_i-1} u_{x_i} \right)_{x_i} + f(u) = 0,$$

$$u_t - \sum_{i=1}^n \left(u^{m_i-1} u_{x_i} \right)_{x_i} + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^{q_i} = 0,$$

де частина показників m_i більше 1, частина менше 1.

3.1 Оцінки типу Келлера-Оссермана для подвійно нелінійного анізотропного параболічного рівняння

В області $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, де Ω — обмежена область в \mathbb{R}^n , $0 < T < \infty, n \geq 2$, розглянемо слабкі розв'язки квазілінійного параболічного рівняння другого порядку у дивергентному вигляді

$$u_t - \operatorname{div} A(x, t, u, \nabla u) + a_0(u) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T. \quad (3.1)$$

На коефіцієнти рівняння $A = (a_1, \dots, a_n)$ і a_0 будемо накладати наступні умови:

- $A = (a_1, \dots, a_n)$ і a_0 задовольняють умові Каратеодорі;

-

$$A(x, t, u, \xi) \xi \geq \nu_1 \sum_{i=1}^n |u|^{(m_i-1)(p_i-1)} |\xi_i|^{p_i},$$

$$|a_i(x, t, u, \xi)| \leq \nu_2 u^{(m_i-1)\frac{p_i-1}{p_i}} \left(\sum_{j=1}^n |u|^{(m_j-1)(p_j-1)} |\xi_j|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p_i}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.2)$$

$$a_0(u) \geq \nu_1 f(u),$$

де ν_1, ν_2 додатні сталі, $f(u)$ – неперервна, додатня функція та для показників m_i, p_i справедливі нерівності

$$2 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n, \quad \min_{1 \leq i \leq n} m_i > 1, \quad \max_{1 \leq i \leq n} m_i(p_i - 1) \leq 1 + \frac{\kappa}{n}, \quad p < n, \quad (3.3)$$

$$\text{де } \kappa = n(p(m-d) - 1) + p, \quad d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{p_i}.$$

Не втрачаючи спільності, будемо вважати, що $m_n = \max_{1 \leq i \leq n} m_i$.

Визначимо анізотропний простір Соболева

$$u \in W^{1, \bar{p}}(\Omega) := \left\{ u \in W^{1,1}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p_i}(\Omega), \quad i = \overline{1, n} \right\}$$

і введемо необхідні означення.

Означення 3.1. Будемо казати, що функція φ належить простору $V_{p,m}(\Omega_T)$, якщо $\varphi \in C(0, T, L^2(\Omega))$ і $\sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} |\varphi|^{(m_i-1)(p_i-1)} |\varphi_{x_i}|^{p_i} dx dt < \infty$.

Означення 3.2. Будемо казати, що u слабкий розв'язок рівняння (3.1), якщо $u \in V_{p,m}(\Omega_T) \cap L^p(0, T, W^{1, \bar{p}}(\Omega))$ і для будь-якого інтервалу $(t_1, t_2) \subset (0, T)$ справедлива інтегральна тотожність

$$\int_{\Omega} u \varphi dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \{-u \varphi_t + A(x, t, u, \nabla u) \nabla \varphi + a_0(u) \varphi\} dx dt = 0 \quad (3.4)$$

для всіх $\varphi \in W^{1,p}(0, T, L^p(\Omega)) \cap L^p(0, T, \overset{o}{W}^{1, \bar{p}}(\Omega))$.

Зауваження 3.1. Умова (3.3) гарантує локальну обмеженість слабого розв'язку рівняння (3.1) ([5]).

Для формулювання головного результату введемо наступні позначення. Зафіксуємо довільну точку $(x^0, t^0) \in \Omega_T$ для будь-яких $\tau, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n > 0$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ визначимо циліндри

$$Q_{\theta,\tau}(x^0, t^0) := \{(x, t) : |t - t^0| < \tau, |x_i - x_i^0| < \theta_i, i = \overline{1, n}\} \text{ і позначимо}$$

$$M_u(\theta, \tau) := \sup_{Q_{\theta,\tau}(x^0, t^0)} u, \quad \delta(\theta, \tau) := \sup_{Q_{\theta,\tau}(x^0, t^0)} \delta(u), \quad \Phi(\theta, \tau) := \sup_{Q_{\theta,\tau}(x^0, t^0)} \Phi(u),$$

$$\Phi(u) = \int_0^u g(s) ds, \quad g(s) = s^{m_n-1} f(s), \quad F(u) = \int_0^u f(s) ds.$$

Теорема 3.1. *Нехай виконані умови (3.2), (3.3) і u невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (3.1), припустимо також, що $f \in C^1(R_+^1)$ і $f'(u) \geq 0$. Зафіксуємо точку $(x^0, t^0) \in \Omega_T$ і нехай стала $\sigma \in (0, 1)$, $\tau \in (0, \min(\theta_n^{p_n}, t^0, T - t^0))$, $\theta_i \in (0, \theta_n)$ для $i \in I' = \{i = \overline{1, n} : m_i(p_i - 1) < m_n(p_n - 1)\}$ і $\theta_i = \theta_n$ для $i \in I'' = \{i = \overline{1, n} : m_i(p_i - 1) = m_n(p_n - 1)\}$. Тоді існують додатні сталі c_1, c_2 , які залежать лише від $n, \nu_1, \nu_2, m_1, \dots, m_n, p_1, \dots, p_n$, що виконуються*

$$u(x^0, t^0) \leq (\tau^{-1} \rho^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}} + \sum_{i \in I'} (\theta_i^{-1} \theta_n^{\frac{p_n}{p_i}})^{\frac{p_i}{m_n(p_n-1)-m_i(p_i-1)}}, \quad (3.5)$$

або

$$\Phi(\sigma\theta, \sigma\tau) \leq c_1(1 - \sigma)^{-c_2} \theta_n^{-p_n} \delta(\theta, \tau) M_u^{m_n p_n - 1}(\theta, \tau). \quad (3.6)$$

У випадку, коли I' пуста множина, тобто $m_1(p_1 - 1) = m_2(p_2 - 1) = \dots = m_n(p_n - 1)$, або справедлива оцінка

$$u(x^0, t^0) \leq (\tau^{-1} \theta_n^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}}, \quad (3.7)$$

або (3.5) має місце.

Цікаво отримати більш точну верхню оцінку розв'язків. Для цього скористаємося наступною додатковою умовою. Будемо казати, що неспадна неперервна функція ψ задовольняє умові (A), якщо для будь-якого $\varepsilon \in (0, 1)$ існує таке значення $u_0(\varepsilon) \geq 1$, що справедлива нерівність

$$\psi(\varepsilon u) \leq \varepsilon^\mu \psi(u), \quad (A)$$

з деякою сталою $\mu > 0$ і для всіх $u \geq u_0(\varepsilon)$.

Твердження 3.1. *Нехай виконані умови (3.2), (3.3) і u невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (3.1), $f \in C^1(R_+^1)$ та $f'(u) \geq 0$. Нехай $\partial\Omega_T$*

параболічна межа області Ω_T , припустимо, що $\lim_{(x,t) \rightarrow \partial\Omega_T} u(x,t) = +\infty$ і має місце нерівність з деякими сталими $0 \leq a \leq 1$, $c > 0$

$$\delta(u) = \frac{F(u)}{f(u)} \leq c u^a. \quad (3.8)$$

Нехай $\psi(u) = u^{-1} \Phi_{m_n p_n + a - 1}^1(u)$ задовольняє умові (A), $(x^0, t^0) \in \Omega_T$ і $\delta\rho = \text{dist}(x^0, \partial\Omega)$. Зафіксуємо $\tau \in (0, \min(\rho^{p_n}, t^0, T - t^0))$ і $\theta_i \in (0, \rho)$ для $i \in I'$, тоді існує така додатня стала c_3 , яка залежить тільки від відомих параметрів $n, \nu_1, \nu_2, m_1, \dots, m_n, p_1, \dots, p_n$, що або справедлива нерівність (3.6), або

$$\Phi(u(x^0, t^0)) \leq c_3 \theta_n^{-p_n} u^{m_n p_n + a - 1}(x^0, t^0). \quad (3.9)$$

З іншого боку, якщо множина I' пуста, тобто $m_1(p_1 - 1) = m_2(p_2 - 1) = \dots = m_n(p_n - 1)$ і $\psi(u) = u^{-1} \Phi_{m_n p_n + a - 1}^1(u)$ задовольняє умові (A), тоді або виконується оцінка (3.7), або (3.9) має місце.

Приклад 3.1. Першим приклад функції f , яка задовольняє умовам Твердження 3.1, є u^q , $q > m_n(p_n - 1)$ з $a = 1$. Припустимо для простоти, що $\text{dist}(x^0, \partial\Omega) = |x^0|$, і обираючи $\tau, \theta_i, i \in I'$ з умов

$$\begin{aligned} & (\tau^{-1} \rho^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}} \rho^{-\frac{p_n}{q-m_n(p_n-1)}}, \\ & \left(\theta_i^{-1} \rho^{\frac{p_n}{p_i}} \right)^{\frac{p_i}{m_n(p_n-1)-m_i(p_i-1)}} = \rho^{-\frac{p_n}{q-m_n(p_n-1)}} \end{aligned}$$

отримаємо, що

$$\begin{aligned} \tau &= \rho^{\frac{p_n(q-1)}{q-m_n(p_n-1)}}, \\ \theta_i &= \rho^{\frac{p_n}{p_i} \frac{q-m_i(p_i-1)}{q-m_n(p_n-1)}}. \end{aligned}$$

З нерівностей (3.5), (3.9) виводимо, що справедлива оцінка

$$u(x^0, t^0) \leq c \left(\sum_{i=1}^n |x_i^0|^{\frac{p_i}{q-m_i(p_i-1)}} + (t^0)^{\frac{1}{q-1}} \right)^{-1}.$$

У випадку, коли $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$ нерівність була отримана у роботі [95].

Приклад 3.2. Наведемо ще один приклад функції f , яка задовольняє умовам Твердження 3.1. Це експоненціальна функція: $f(u) = e^u$ з $a = 0$. Будемо вважати, що $(8\rho)^{p_n} = |x^0|^{p_n} + t^0$. Оберемо $\tau, \theta_i, i \in I'$ з умов

$$\left(\tau^{-1}\rho^{p_n}\right)^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}} = \left(\theta_i^{-1}\rho^{\frac{p_n}{p_i}}\right)^{\frac{p_i}{m_n(p_n-1)-m_i(p_i-1)}} = \ln(1 + \rho^{-p_n}),$$

тоді з (3.5), (3.9) отримаємо оцінку

$$u(x^{(0)}, t^{(0)}) \leq c |\ln(|x^{(0)}|^{p_n} + t^{(0)})|.$$

Для анізотропного випадку ця оцінка є новою.

Твердження 3.2. *Нехай виконані умови (3.2), $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$, $2 < p = p_1 = p_2 = \dots = p_n$ і u невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (3.1), припустимо також, що $f \in C^1(\mathbb{R}_+^1)$, $f' \geq 0$ і функція $\Psi(u) = u^{-1}\Phi^{\frac{1}{p}}(u)$ задовольняє умові (A). Нехай $(x^0, t^0) \in \Omega_T$ і $Q_{8\rho, 8\tau}(x^0, t^0) \subset \Omega_T$, тоді існує така додатня стала c_4 , яка залежить тільки від n, ν_1, ν_2, p , що справедлива або оцінка*

$$u(x^0, t^0) \leq (\tau^{-1}\rho^p)^{\frac{1}{p-2}},$$

або

$$\Phi(u(x, t)) \leq c_4 \rho^{-p} u^p(x, t),$$

для майже всіх точок $(x, t) \in Q_{\rho, \tau}(x^0, t^0)$.

3.1.1 Допоміжні результати

Зафіксуємо довільну точку $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T$, для будь-яких $\eta_1, \dots, \eta_n > 0$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ і $s > 0$ визначимо циліндри $Q_{\eta, s}(\bar{x}, \bar{t}) := Q_{\eta}(\bar{x}) \times (\bar{t} - s, \bar{t} + s)$, щоб $Q_{\eta, s}(\bar{x}, \bar{t}) \subset \Omega_T$, через ζ позначимо невід'ємну кусково-гладку функцію, що обертається в 0 на параболічній межі $Q_{\eta, s}(\bar{x}, \bar{t})$. Будемо вважати, що

$$2 \leq p_1 \leq \dots \leq p_{n-1} < p_n, \quad \min_{1 \leq i \leq n} m_i > 1, \quad m_n(p_n - 1) \leq 1 + \frac{\kappa}{n}, \quad p < n. \quad (3.10)$$

Через γ позначемо сталу, яка залежить тільки від $n, \nu_1, \nu_2, p_1, \dots, p_n, m_1, \dots, m_n$ і змінюється від рядка до рядка.

Лема 3.1. *Нехай u - невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (3.1) і нехай виконані умови (3.2), (3.3). Тоді для кожного циліндру $Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t}) \subset \Omega_T$ і для кожної додатньої сталої k виконується нерівність*

$$\begin{aligned} & \sup_{|t-\bar{t}|<s} \int_{Q_{\eta}(\bar{x})} (\Phi(u) - k)_+^2 \zeta^{p_n} dx + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{k,\eta,s}} g^2(u) u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i} \zeta^{p_n} dx dt + \\ & + \iint_{A_{k,\eta,s}} f(u) g(u) (\Phi(u) - k)_+ \zeta^{p_n} dx dt \leq \gamma \iint_{A_{k,\eta,s}} (\Phi(u) - k)_+^2 |\zeta_t| \zeta^{p_n-1} dx dt + \\ & + \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{A_{k,\eta,s}} (\Phi(u) - k)_+^2 \delta^{p_i-2}(u) u^{(m_i-1)(p_i-1)} |\zeta_{x_i}|^{p_i} dx dt, \end{aligned} \quad (3.11)$$

де $A_{k,\eta,s} = \{(x, t) \in Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t}) : \Phi(u) > k\}$.

Доведення. В інтегральну тотожність (3.4) підставимо пробну функцію $\varphi = (\Phi(u) - k)_+ g(u) \zeta^p$. Застосувавши умову (3.2), отримаємо

$$\begin{aligned} & \sup_{|t-\bar{t}|<s} \int_{Q_{\eta}(\bar{x})} (\Phi(u) - k)_+^2 \zeta^{p_n} dx + \iint_{A_{k,\eta,s}} f(u) g(u) (\Phi(u) - k)_+ \zeta^{p_n} dx dt + \\ & + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{k,\eta,s}} \left(g^2(u) + g'(u) (\Phi(u) - k)_+ \right) u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i} \zeta^{p_n} dx dt \leq \\ & \leq \gamma \iint_{A_{k,\eta,s}} (\Phi(u) - k)_+^2 |\zeta_t| \zeta^{p_n-1} dx dt + \\ & + \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{A_{k,\eta,s}} \left(\sum_{j=1}^n g^2(u) u^{(m_j-1)(p_j-1)} |u_{x_j}|^{p_j} \zeta^{p_n} \right)^{1-\frac{1}{p_i}} \times \\ & \times g^{\frac{2}{p_i}-1}(u) u^{(m_i-1)\frac{p_i-1}{p_i}} (\Phi(u) - k)_+ |\zeta_{x_i}| \zeta^{\frac{p_n}{p_i}-1} dx dt. \end{aligned}$$

З останньої формули, використовуючи нерівність Юнга з показниками p_i , $\frac{p_i}{p_i-1}$ і очевидну нерівність $\frac{\Phi(u)}{g(u)} \leq \delta(u)$, приходимо до оцінки (3.11). \square

3.1.2 Доведення теореми 3.1

Розглянемо циліндр $Q_{\theta,\tau}(x^0, t^0)$ і нехай (\bar{x}, \bar{t}) довільна точка у $Q_{\sigma\theta,\sigma\tau}(x^0, t^0)$. Якщо

$$u(x^0, t^0) \geq (\tau^{-1} \rho^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\theta_i^{-1} \rho^{\frac{p_n}{p_i}} \right)^{\frac{p_i}{m_n(p_n-1)-m_i(p_i-1)}},$$

тоді

$$M_u(\theta, \tau) = \max(M_u(\theta, \tau), \delta(\theta, \tau)) \geq (\tau^{-1} \rho^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\theta_i^{-1} \rho^{\frac{p_n}{p_i}} \right)^{\frac{p_i}{m_n(p_n-1)-m_i(p_i-1)}},$$

і отже $Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t}) \subset Q_{\theta,\tau}(x^0, t^0)$, де $s = (1 - \sigma) \theta_n^{p_n} M_u^{1-m_n(p_n-1)}(\theta, \tau)$, $\eta_i = (1 - \sigma) \theta_n^{\frac{p_n}{p_i}} M_u^{m_i(p_i-1)-m_n(p_n-1)}(\theta, \tau)$, $i = \overline{1, n}$. Для фіксованої сталої $k > 0$ і $l, j = 0, 1, 2, \dots$ визначимо $\alpha_l = \frac{1}{4}(1 + 2^{-1} + \dots + 2^l)$, $\eta_{i,j,l} = (\alpha_l + \frac{1}{4}2^{-j-l-1})\eta_i$, $i = \overline{1, n}$, $\eta_{j,l} = (\eta_{1,j,l}, \dots, \eta_{n,j,l})$, $s_{j,l} = (\alpha_l + \frac{1}{4}2^{-j-l-1})s$, $k_j = k(1 - 2^{-j})$, $Q_{j,l} = Q_{\eta_{j,l}, s_{j,l}}(\bar{x}, \bar{t})$, $A_{k_j, j, l} = \{(x, t) \in Q_{j,l} : F(u) > k_j\}$. Нехай $\zeta_j \in C_0^\infty(Q_{j,l})$, $0 \leq \zeta_j \leq 1$, $\zeta_j = 1$ у $Q_{j+1, l}$, $\left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| \leq \gamma 2^{j+l-1} \eta_i$, $i = \overline{1, n}$, $\left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial t} \right| \leq \gamma 2^{j+l} s^{-1}$.

Застосувавши нерівність Гьольдера і лему 1.3, отримаємо

$$\begin{aligned} & \iint_{A_{k_{j+1}, j+1, l}} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 dx dt \leq \\ & \leq \left(\iint_{A_{k_{j+1}, j+1, l}} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n} dx dt \right)^{\frac{n}{n+1}} |A_{k_{j+1}, j+1, l}|^{\frac{1}{n+1}} \leq \\ & \leq \left(\int_{\bar{t}-s_{j,l}}^{\bar{t}+s_{j,l}} \left(\int_{A_{k_{j+1}, j+1, l}} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} dt \right)^{\frac{n-1}{n}} \times \\ & \times \left(\int_{A_{k_{j+1}, j+1, l}} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n} dx \right)^{\frac{1}{n}} dt \Big)^{\frac{n}{n+1}} |A_{k_{j+1}, j+1, l}|^{\frac{1}{n+1}} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma \left(\sup_{|t-\bar{t}| < s_{j,l}} \int_{Q_{\eta_j,l}(\bar{x})} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n} dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \times \\
&\times \left(\int_{\bar{t}-s_{j,l}}^{\bar{t}+s_{j,l}} \prod_{i=1}^n \left(\int_{A_{k_{j+1},j,l} \times t} \left| ((\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n})_{x_i} \right| dx \right)^{\frac{1}{n}} dt \right)^{\frac{n}{n+1}} |A_{k_{j+1},j,l}|^{\frac{1}{n+1}} \\
&\leq \gamma \left(\sup_{|t-\bar{t}| < s_{j,l}} \int_{Q_{\eta_j,l}(\bar{x})} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n} dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \times \\
&\times \prod_{i=1}^n \left(\iint_{A_{k_{j+1},j,l}} \left| ((\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n})_{x_i} \right| dx dt \right)^{\frac{n}{n+1}} |A_{k_{j+1},j,l}|^{\frac{1}{n+1}}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Використовуючи нерівності $\Phi(u) - k_j \geq \frac{k}{2^{j+1}}$, яка справедлива на множині $A_{k_{j+1},j,l}$, і $\frac{\Phi(u)}{g(u)} \leq \delta(u)$, оцінимо другий множник у правій частині (3.12):

$$\begin{aligned}
&\iint_{A_{k_{j+1},j,l}} \left| ((\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n})_{x_i} \right| dx dt \leq \gamma \iint_{A_{k_{j+1},j,l}} g(u) (\Phi(u) - k_{j+1})_+ |u_{x_i}| \zeta_j^{p_n} dx dt + \\
&+ \gamma \iint_{A_{k_{j+1},j,l}} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| \zeta_j^{p_n-1} dx dt = \gamma \iint_{A_{k_{j+1},j,l}} (g(u))^{\frac{2(p_i-1)}{p_i}} (g(u))^{\frac{2}{p_i}} \times \\
&\times (g(u))^{-1} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^{\frac{p_i-1}{p_i}} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^{\frac{1}{p_i}} u^{\frac{(m_i-1)(p_i-1)}{p_i}} u^{-\frac{(m_i-1)(p_i-1)}{p_i}} |u_{x_i}| \zeta_j^{p_n} dx dt + \\
&+ \gamma \iint_{A_{k_{j+1},j,l}} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| \zeta_j^{p_n-1} dx dt \leq \\
&\leq \gamma 2^{j\gamma} k^{-\frac{p_i-1}{p_i}} \left(\iint_{A_{k_{j+1},j,l}} g^2(u) u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i} \zeta_j^{p_n} dx dt \right)^{\frac{1}{p_i}} \times \\
&\times \left(\iint_{A_{k_{j+1},j,l}} \left(\frac{\Phi(u)}{g(u)} \right)^{\frac{p_i}{p_i-1}} g(u) u^{m_n-m_i} f(u) (\Phi(u) - k_j)_+ \zeta_j^{p_n} dx dt \right)^{\frac{p_i-1}{p_i}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma \iint_{A_{k_j, j, l}} (\Phi(u) - k_j)_+^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| \zeta_j^{p_n - 1} dx dt \leq \\
& \leq \gamma 2^{j\gamma} k^{-\frac{p_i - 1}{p_i}} \delta(\theta, \tau) M_u^{\frac{mn - m_i}{p_i}(p_i - 1)}(\theta, \tau) \left(\iint_{A_{k_j, j, l}} g^2(u) u^{(m_i - 1)(p_i - 1)} |u_{x_i}|^{p_i} \zeta_j^{p_n} dx dt \right)^{\frac{1}{p_i}} \\
& \times \left(\iint_{A_{k_j, j, l}} g(u) f(u) (\Phi(u) - k_j)_+ \zeta_j^{p_n} dx dt \right)^{1 - \frac{1}{p_i}} + \\
& + \gamma \iint_{A_{k_j, j, l}} (\Phi(u) - k_j)_+^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| dx dt. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Комбінуючи оцінки (3.12), (3.13), будемо мати

$$\begin{aligned}
& \iint_{A_{k_{j+1}, j+1, l}} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 dx dt \leq \gamma \left(\sup_{|t - \bar{t}| < s_{j, l}} \int_{Q_{\eta_j, l}(\bar{x})} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n} dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \times \\
& \times \sum_{i=1}^n \left(2^{j\gamma} k^{-\frac{p_i - 1}{p_i}} \delta(\theta, \tau) M_u^{\frac{mn - m_i}{p_i}(p_i - 1)}(\theta, \tau) \left(\iint_{A_{k, \eta, s}} (\Phi(u) - k)_+^2 |\zeta_t| \zeta^{p_n - 1} dx dt + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{k, \eta, s}} (\Phi(u) - k)_+^2 \delta^{p_i - 2}(u) u^{(m_i - 1)(p_i - 1)} |\zeta_{x_i}|^{p_i} dx dt \right) + \right. \\
& \left. + \iint_{A_{k_j, j, l}} (\Phi(u) - k_j)_+^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| dx dt \right)^{\frac{n}{n+1}} |A_{k_{j+1}, j, l}|^{\frac{1}{n+1}}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Обираючи k з умови

$$k \geq \theta_n^{-p_n} \delta(\theta, \tau) M_u^{m_n p_n - 1}(\theta, \tau)$$

та використовуючи лему 1.1, з (3.14) маємо

$$y_{j+1, l} = \iint_{A_{k_{j+1}, j+1, l}} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 dx dt \leq$$

$$\leq \gamma(1-\sigma)^{-\gamma} 2^{(j+l)\gamma} k^{-\frac{2}{n+1}} |Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t})|^{-\frac{1}{n+1}} y_{j,l}^{1+\frac{1}{n+1}}.$$

Нехай $Q_l = Q_{\alpha_l \eta, \alpha_l s}$, $\Phi_l = \sup_{Q_l} \Phi(u)$, з леми 1.1 випливає, що $y_{j,l} \rightarrow 0$, коли $j \rightarrow \infty$, за умови, що k задовольняє рівності

$$k^2 = \gamma(1-\sigma)^{-\gamma} 2^{\gamma l} |Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t})|^{-1} \iint_{Q_{l+1}} \Phi^2(u) dx dt.$$

Якщо $\varepsilon \in (0, 1)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, тоді з попередньої нерівності отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi_l &\leq \gamma \theta_n^{-p_n} \delta(\theta, \tau) M_u^{m_n p_n - 1}(\theta, \tau) + \\ &+ \gamma(1-\sigma)^{-\gamma} 2^{\gamma l} \delta^{\frac{1}{2}}(\theta, \tau) M_u^{\frac{m_n - 1}{2}}(\theta, \tau) \Phi_{l+1}^{\frac{1}{2}} |Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t})|^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\iint_{Q_{\frac{\eta}{2}, \frac{s}{2}}(\bar{x}, \bar{t})} f(u) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \Phi_{l+1} + \gamma \theta_n^{-p_n} \delta(\theta, \tau) M_u^{m_n p_n - 1}(\theta, \tau) + \\ &+ \gamma \varepsilon^{-1} (1-\sigma)^{-\gamma} 2^{\gamma l} \delta(\theta, \tau) M_u^{m_n - 1}(\theta, \tau) |Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t})|^{-1} \iint_{Q_{\frac{\eta}{2}, \frac{s}{2}}(\bar{x}, \bar{t})} f(u) dx dt. \end{aligned}$$

За допомогою ітерацій приходимо до оцінки

$$\begin{aligned} \Phi(u(\bar{x}, \bar{t})) &\leq \Phi_0 \leq \varepsilon^l \Phi_l + \gamma \varepsilon^{-1} \sigma^{-\gamma} \sum_{i=0}^{l-1} (\varepsilon 2^{\gamma})^i \times \\ &\times \left(\theta_n^{-p_n} \delta(\theta, \tau) M_u^{m_n p_n - 1}(\theta, \tau) + \delta(\theta, \tau) M_u^{m_n - 1}(\theta, \tau) |Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t})|^{-1} \iint_{Q_{\frac{\eta}{2}, \frac{s}{2}}(\bar{x}, \bar{t})} f(u) dx dt \right), \end{aligned}$$

для кожного $l \geq 1$.

Оберемо $\varepsilon = 2^{-\gamma-1}$, щоб сума у правій частині попередньої нерівності була збіжним рядом, коли $l \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \Phi(u(\bar{x}, \bar{t})) &\leq \gamma(1-\sigma)^{-\gamma} \theta_n^{-p_n} \delta(\theta, \tau) M_u^{m_n p_n - 1}(\theta, \tau) dx dt + \\ &+ \gamma(1-\sigma)^{-\gamma} \delta(\theta, \tau) M_u^{m_n - 1}(\theta, \tau) |Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t})|^{-1} \iint_{Q_{\frac{\eta}{2}, \frac{s}{2}}(\bar{x}, \bar{t})} f(u) dx dt. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Нехай $\xi \in C_0^\infty(Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t}))$, $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi = 1$ у $Q_{\frac{\eta}{2}, \frac{s}{2}}(\bar{x}, \bar{t})$, $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right| \leq \gamma \eta_i^{-1}$, $i = \overline{1, n}$, $\left| \frac{\partial \xi}{\partial t} \right| \leq \gamma s^{-1}$. Щоб оцінити інтеграл у правій частині формули (3.15) в інтегральну тотожність (3.4) підставимо функцію

$\varphi = \frac{u}{u+\varepsilon} \xi^{p_n}$. Використовуючи умову (3.2), нерівність Гьольдера і переходячи до границі, коли $\varepsilon \rightarrow 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})} f(u) \xi^{p_n} dx dt &\leq \gamma \iint_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})} u |\xi_t| \xi^{p_n-1} dx dt + \\ &+ \gamma \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \iint_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})} |u_{x_i}|^{p_j} \xi^{p_n} dx dt \right)^{1-\frac{1}{p_i}} \left(\iint_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})} |\xi_{x_i}|^{p_i} dx dt \right)^{\frac{1}{p_i}}. \end{aligned}$$

Тепер підставляючи в інтегральну тотожність (3.4) пробну функцію $\varphi = u \xi^{p_n}$, використовуючи умову (3.2) і нерівність Юнга, матимемо

$$\iint_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})} f(u) \xi^{p_n} dx dt \leq \gamma M_u(\theta, \tau) |Q_{\eta}(\bar{x})|. \quad (3.16)$$

Комбінуючи нерівності (3.15), (3.16), приходимо до оцінки

$$\Phi(u(\bar{x}, \bar{t})) \leq \gamma \sigma^{-\gamma} \theta_n^{-p_n} \delta(\theta, \tau) M_u^{m_n p_n - 1}(\theta, \tau). \quad (3.17)$$

Оскільки (\bar{x}, \bar{t}) була довільною точкою з циліндру $Q_{\sigma\theta, \sigma\tau}(x^0, t^0)$, тоді з нерівності (3.17) виходить необхідна оцінка (3.6), що доводить теорему 3.1.

3.1.3 Доведення твердження 3.1

Спочатку звернімо увагу на нерівність, яка є безпосереднім наслідком нашого вибору ψ

$$\psi(u)v \leq \varepsilon^{-1} \psi(u)u + \psi(\varepsilon v)v, \quad \varepsilon, u, v > 0. \quad (3.18)$$

Дійсно, якщо $v \leq \varepsilon^{-1}u$, тоді $\psi(u)v \leq \varepsilon^{-1} \psi(u)u$, і якщо $v \geq \varepsilon^{-1}u$, тоді $\psi(u)v \leq \psi(\varepsilon v)v$, тобто в обох випадках нерівність (3.18) залишається справедливою.

Для $j = 0, 1, 2, \dots$ визначимо послідовності $\{\sigma_j\}, \{\theta_j\}, \{M_j\}$ наступним чином

$$\sigma_j := \frac{1 - 2^{-j-1}}{1 - 2^{-j-2}}, \quad \theta_j := (\theta_{1j}, \theta_{2j}, \dots, \theta_{nj}),$$

$$\theta_{ij} = \theta_i \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^j} \right), i = \overline{1, n}, M_j := \sup_{Q_{\theta_j(x^0)}} u.$$

У випадку, коли нерівність (3.5) не виконується, використовуючи умову (3.8) запишемо оцінку (3.6) для пари циліндрів $Q_{\theta_j}(x^0)$ і $Q_{\theta_{j+1}}(x^0)$:

$$M_j \psi(M_j) \leq \gamma 2^{j\gamma} \rho^{-\frac{pn}{mnpn+a-1}} M_{j+1}.$$

Якщо $\varepsilon \in (0, 1)$, тоді з (3.18), у випадку, коли $u = M_j$, $v = M_{j+1}$, отримаємо

$$\psi(M_j) M_{j+1} \leq \varepsilon^{-1} \psi(M_j) M_j + \psi(\varepsilon M_{j+1}) M_{j+1},$$

Комбінуючи останні дві нерівності, будемо мати

$$\psi(M_j) \leq \psi(\varepsilon M_{j+1}) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\psi(M_j) M_j}{M_{j+1}} \leq \psi(\varepsilon M_{j+1}) + \varepsilon^{-1} \gamma 2^{j\gamma} \rho^{-\frac{pn}{mnpn+a-1}}.$$

Використаємо тепер умову (A), яка приведе до рекурентних співвідношень

$$\psi(M_j) \leq \varepsilon^\mu \psi(M_{j+1}) + \varepsilon^{-1} \gamma 2^{j\gamma} \rho^{-\frac{pn}{mnpn+a-1}}, j = 0, 1, 2, \dots$$

Шляхом ітерацій, отримаємо

$$\psi(M_0) \leq \varepsilon^{j\mu} \psi(M_j) + \varepsilon^{-1} \gamma \rho^{-\frac{pn}{mnpn+a-1}} \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon^{i\mu} 2^{i\gamma},$$

для кожного $j \geq 1$.

Оберемо $\varepsilon^\mu = 2^{-\gamma-1}$, щоб ряд у правій частині останньої нерівності був збіжним і перейдемо до границі, коли $j \rightarrow \infty$:

$$\psi(u(x^0)) \leq \psi(M_0) \leq \gamma \rho^{-\frac{pn}{mnpn+a-1}}.$$

Це доводить твердження 3.1.

3.2 Оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропного параболічного рівняння з абсорбцією

Розглянемо розв'язки квазілінійного параболічного рівняння в дивергентному вигляді

$$u_t - \operatorname{div} A(x, t, u, \nabla u) + a_0(u) = 0, (x, t) \in \Omega_T, \quad (3.19)$$

які задовольняють початкову умову

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \{0\}, \quad (3.20)$$

де $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, Ω — обмежена область в R^n , $n \geq 2$, $0 < T < \infty$.

Будемо вважати, що коефіцієнти рівняння $A = (a_1, \dots, a_n)$ і a_0 задовольняють умові Каратеодорі та структурним нерівностям

$$\begin{aligned} A(x, t, u, \xi)\xi &\geq \nu_1 \sum_{i=1}^n |u|^{m_i-1} |\xi_i|^2, \\ |a_i(x, t, u, \xi)| &\leq \nu_2 u^{(m_i-1)\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |u|^{m_j-1} |\xi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = \overline{1, n}, \\ a_0(u) &\geq \nu_1 f(u), \end{aligned} \quad (3.21)$$

де ν_1, ν_2 додатні сталі, $f(u)$ — неперервна, додатня функція та для показників m_i справедливі нерівності

$$\min_{1 \leq i \leq n} m_i > 1 - \frac{2}{n}, \quad \max_{1 \leq i \leq n} m_i < m + \frac{2}{n}, \quad (3.22)$$

де $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$. Не втрачаючи спільності, будемо вважати, що $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$.

Введемо необхідні означення.

Означення 3.3. Будемо казати, що функція φ належить простору $V_{2,m}(\Omega_T)$, якщо $\varphi \in C_{loc}(0, T, L_{loc}^{1+m^-}(\Omega))$ і має місце нерівність $\sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} |\varphi|^{m_i+m^- - 2} |\varphi_{x_i}|^2 dx dt < \infty$ з $m^- = \min(m_1, 1)$.

Означення 3.4. Слабким розв'язком задачі (3.19), (3.20) будемо називати невід'ємну функцію $u(x, t)$, яка задовольняє включенню $u\psi \in V_{2,m}(\Omega_T) \cap L_{loc}^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$ та інтегральній тотожності

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u(x, \tau) \psi \varphi dx + \\ &+ \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \{-u(\psi \varphi)_t + A(x, t, u, \nabla u) \nabla(\psi \varphi) + a_0(u) \psi \varphi\} dx dt = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

для будь-якої пробної функції $\varphi \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \dot{W}^{1,2}(\Omega))$, будь-якої функції ψ з $C^1(\bar{\Omega}_T)$, яка обертається в нуль в околі точки $(0, 0)$ й для будь-якого $\tau \in (0, T)$.

Щоб сформулювати головний результат підрозділу введемо позначення. Нехай $(x^0, t^0) \in \Omega_T$, для довільних $\tau, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n > 0, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ визначимо циліндричну область $Q_{\theta, \tau}(x^0, t^0) := \{(x, t) : |t - t^0| < \tau, |x_i - x_i^0| < \theta_i, i = \overline{1, n}\}$ та позначимо $M_u(\theta, \tau) := \sup_{Q_{\theta, \tau}(x^0, t^0)} u$, $F(\theta, \tau) := \sup_{Q_{\theta, \tau}(x^0, t^0)} F(u)$, $F(u) = \int_0^u s^{m^- - 1} f(s) ds$, $m^+ = \max(m_n, 1)$.

Теорема 3.2. Нехай виконані умови (3.21), (3.22) і u – слабкий невід’ємний розв’язок рівняння (3.19), припустимо також, що $f \in C^1(R_+^1)$ і $f'(u) \geq 0$. Нехай $(x^0, t^0) \in \Omega_T$, зафіксуємо $\sigma \in (0, 1)$ і нехай $Q_{8\theta, 8\tau}(x^0, t^0) \subset \Omega_T$, $\rho = \begin{cases} \theta_n, & \text{if } m_n > 1, \\ \tau^{\frac{1}{2}}, & \text{if } m_n < 1. \end{cases}$ Тоді існують такі додатні сталі c_4, c_5 , які залежать тільки від $n, \nu_1, \nu_2, m_1, \dots, m_n$, що або справедлива нерівність

$$u(x^0, t^0) \leq \left(\frac{\theta_n^2}{\tau}\right)^{\frac{1}{m_n - 1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\rho}{\theta_i}\right)^{\frac{2}{m^+ - m_i}}, \quad (3.24)$$

або

$$\begin{aligned} (M_u(\sigma\theta, \sigma\tau))^{1 - m^- + \frac{n(m^- - m^-)}{2}} F(M_u(\sigma\theta, \sigma\tau)) &\leq \\ &\leq c_4(1 - \sigma)^{-\gamma} \rho^{-2} (M_u(\theta, \tau))^{m^+ + 1 + \frac{n(m^- - m^-)}{2}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Якщо виконується умова

$$F(\varepsilon u) \leq \varepsilon^{m^+ + m^- + \beta} F(u), \quad \beta > 0, \quad (3.26)$$

тоді

$$F(M_u(\theta, \tau)) \leq c_5(1 - \sigma)^{-\gamma} M_u^{m^+ + m^-}(\theta, \tau) \rho^{-2}, \quad (3.27)$$

Приклад 3.3. Прикладом функції f , яка задовольняє умові (3.26), є степенева функція $u^q, q \geq m + \frac{2}{n}$. Припускаючи для простоти, що $\text{dist}(x^0, \partial\Omega) = |x^0|$, й обираючи τ, θ_i , з умов

- $m_n > 1$: $\left(\frac{\theta_n^2}{\tau}\right)^{\frac{1}{m_n-1}} = \theta_n^{-\frac{2}{q-m_n}}$, тобто $\tau = \theta_n^{\frac{2(q-1)}{q-m_n}}$, $\left(\frac{\theta_n}{\theta_i}\right)^{\frac{2}{m_n-m_i}} = \theta_n^{-\frac{2}{q-m_n}} \implies \theta_i = \theta_n^{\frac{q-m_i}{q-m_n}}$,
- $m_n < 1$: $\left(\frac{\theta_n^2}{\tau}\right)^{\frac{1}{m_n-1}} = \tau^{-\frac{1}{q-m_n}}$, тобто $\tau = \theta_n^{\frac{2(q-1)}{q-m_n}}$, $\left(\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{\theta_i}\right)^{\frac{2}{1-m_i}} = \tau^{-\frac{1}{q-1}} \implies \theta_i = \tau^{\frac{q-m_i}{2(q-1)}}$,

і нерівностей (3.24), (3.27) отримаємо оцінку

$$u(x^0, t^0) \leq c \left(\sum_{i=1}^n |x_i^0|^{\frac{2}{q-m_i}} + (t^0)^{\frac{1}{q-1}} \right)^{-1}. \quad (3.28)$$

3.2.1 Інтегральні оцінки розв'язків

Розглянемо циліндр $Q_{\theta, \tau}(x^0, t^0)$ і нехай (\bar{x}, \bar{t}) довільна точка у $Q_{\sigma\theta, \sigma\tau}(x^0, t^0)$. Якщо

$$u(x^0, t^0) \geq \left(\frac{\theta_n^2}{\tau}\right)^{\frac{1}{m_n-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\rho}{\theta_i}\right)^{\frac{2}{m^+-m_i}},$$

тоді

$$M_u(\theta, \tau) = \max(M_u(\theta, \tau), \delta(\theta, \tau)) \geq (\tau^{-1}\theta_n)^{\frac{1}{m_n-1}} + \sum_{i=1}^n (\theta_i^{-1}\rho)^{\frac{2}{m^+-m_i}},$$

і отже $Q_{\eta, s}(\bar{x}, \bar{t}) \subset Q_{\theta, \tau}(x^0, t^0)$, де $s = (1 - \sigma)M_u^{1-m^+}(\theta, \tau)\rho^2$, $\eta_i = (1 - \sigma)M_u^{\frac{m_i-m^+}{2}}(\theta, \tau)\rho$, $i = \overline{1, n}$. Введемо наступні позначення для фіксованого $k > 0$ і $l, j = 0, 1, 2, \dots$ $\alpha_l = \frac{1}{4}(1 + 2^{-1} + \dots + 2^{-l})$, $k_j = k(1 - 2^{-j})$, $\eta_{i,j,l} = (\alpha_l + \frac{1}{4}2^{-j-l-1})\eta_i$, $i = \overline{1, n}$, $\eta_{j,l} = (\eta_{1,j,l}, \dots, \eta_{n,j,l})$, $s_{j,l} = (\alpha_l + \frac{1}{4}2^{-j-l-1})s$, $Q_{j,l} = Q_{\eta_{j,l}, s_{j,l}}(\bar{x}, \bar{t})$, $A_{k_j, j, l} = \{x \in Q_{j,l}(\bar{x}, \bar{t}) : F(u) > k_j\}$. Нехай $\xi_j \in C_0^\infty(Q_{j,l}(\bar{x}, \bar{t}))$, $0 \leq \xi_j \leq 1$, $\xi_j = 1$ у $Q_{j+1, l}(\bar{x}, \bar{t})$, $\left|\frac{\partial \xi_j}{\partial t}\right| \leq \gamma 2^{j+l} s^{-1}$, $\left|\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\right| \leq \gamma 2^{j+l} \eta_i^{-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Надалі через γ будемо позначати сталу, яка залежить тільки від $n, \nu_1, \nu_2, m_1, \dots, m_n$ і може змінюватись від рядка до рядка.

Лема 3.2. *Нехай виконані умови (3.21), (3.22) і u слабкий невід'ємний розв'язок рівняння (3.19). Тоді для будь-якого $j \geq 0$ справедлива насту-*

нна нерівність

$$\begin{aligned}
& l_j^{1-m^-} \int_{A_{k_j,j,l}(t)} (F(u) - k_j)_+^2 \xi_j^2 dx + \sum_{i=1}^n l_j^{m_i-m^-} \iint_{A_{k_j,j,l}} |\nabla((F(u) - k_j)_+)|^2 \xi_j^2 dx dt + \\
& + \iint_{A_{k_j,j,l}} (F(u) - k_j)_+ f^2(u) \xi_j^2 dx dt \leq \\
& \gamma M_u^{m^+-m^-}(\theta, \tau) \rho^{-2} \iint_{A_{k_j,j,l}} (F(u) - k_j)_+^2 dx dt \tag{3.29}
\end{aligned}$$

де $l_j = F^{-1}(k_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Доведення. В інтегральну тотожність (3.23) підставимо функцію $\varphi = (F(u) - k_j)_+ f(u) \xi_j^2$, використовуючи умову (3.21), отримаємо

$$\begin{aligned}
& \iint_{A_{k_j,j,l}} u_t f(u) (F(u) - k_j)_+ \xi_j^2 dx dt + \\
& + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{k_j,j,l}} u^{m_i+m^-} |u_{x_i}|^2 f^2(u) \xi_j^2 dx dt + \iint_{A_{k_j,j,l}} (F(u) - k_j)_+ f^2(u) \xi_j^2 dx dt \leq \\
& \leq \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{A_{k_j,j,l}} u^{\frac{m_i-1}{2}} \left(\sum_{l=1}^n u^{m_l-1} |u_{x_l}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (F(u) - k_j)_+ f(u) \xi_j \left| \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right| dx dt.
\end{aligned}$$

Звідси, застосувавши нерівність Юнга і очевидну нерівність $l_j < u(x, t) < M_u(\theta, \tau)$ на $A_{k_j,j,l}$ приходимо до необхідної оцінки (3.29). \square

3.2.2 Доведення теореми 3.2

Будемо використовувати лему 1.1 про геометричну збіжність послідовності чисел, у якості $Y_{j+1,l}$ візьмемо $\iint_{A_{k_{j+1},j+1,l}} (F(u) - k_{j+1})_+^2 dx dt$, застосувавши нерівність Гьольдера, маємо

$$Y_{j+1,l} = \iint_{A_{k_{j+1},j+1,l}} (F(u) - k_{j+1})_+^2 dx dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq |A_{k_{j+1},j+1,l}|^{\frac{2}{n+2}} \left(\iint_{A_{k_{j+1},j+1,l}} ((F(u) - k_{j+1})_+ \xi_j)^{\frac{2(n+2)}{n}} dx dt \right)^{\frac{n}{n+2}} \leq \\
&\leq |A_{k_{j+1},j+1,l}|^{\frac{2}{n+2}} \left(\int_0^t \left(\int_{A_{k_{j+1},j+1,l}} ((F(u) - k_{j+1})_+ \xi_j)^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(\int_{A_{k_{j+1},j+1,l}} ((F(u) - k_{j+1})_+^2 \xi_j^2 dx \right)^{\frac{2}{n}} dt \right)^{\frac{n}{n+2}}.
\end{aligned}$$

Один з множників в останній нерівності винесемо з під знаку інтеграла, оцінюючи суттєвим супремумом по t і застосувавши лему 1.2 з $\alpha_i = 0, i = \overline{1, n}$, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\iint_{A_{k_{j+1},j+1,l}} (F(u) - k_{j+1})_+^2 dx dt \leq \\
&\leq |A_{k_{j+1},j+1,l}|^{\frac{2}{n+2}} \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \left(\int_{A_{k_{j+1},j+1,l}(t)} (F(u) - k_{j+1})_+^2 \xi_j^2 dx \right)^{\frac{2}{n+2}} \times \\
&\times \left(\int_0^T \prod_{i=1}^n \left(\int_{A_{k_{j+1},j+1,l}(t)} |((F(u) - k_{j+1})_+ \xi_j)_{x_i}|^2 dx \right)^{\frac{1}{n}} dt \right)^{\frac{n}{n+2}} \leq \\
&\leq |A_{k_{j+1},j+1,l}|^{\frac{2}{n+2}} \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \left(\int_{A_{k_{j+1},j+1,l}(t)} (F(u) - k_{j+1})_+^2 \xi_j^2 dx \right)^{\frac{2}{n+2}} \times \\
&\times \left(\int_0^T \prod_{i=1}^n \left(\int_{A_{k_{j+1},j+1,l}(t)} |((F(u) - k_{j+1})_+)_{x_i}|^2 \xi_j^2 dx + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{A_{k_{j+1},j+1,l}(t)} (F(u) - k_{j+1})_+^2 \left| \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{n}} dt \right)^{\frac{n}{n+2}}
\end{aligned}$$

Застосуємо нерівність Юнга

$$Y_{j+1} \leq |A_{k_{j+1}, j+1, l}|^{\frac{2}{n+2}} \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \left(\int_{A_{k_{j+1}, j+1, l}(t)} (F(u) - k_{j+1})_+^2 \xi_j^2 dx \right)^{\frac{2}{n+2}} \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^n \left(\iint_{A_{k_{j+1}, j+1, l}} |((F(u) - k_{j+1})_+)_{x_i}|^2 \xi_j^2 dx dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \iint_{A_{k_{j+1}, j+1, l}} (F(u) - k_{j+1})_+^2 \left| \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n}{n+2}}$$

Позначимо $Q_l = Q_{\alpha_l \eta, \alpha_l s}$, $M_l = \sup_{Q_l} u$, використовуючи (3.27), отримаємо з леми 1.1, що $y_{j,l} \rightarrow 0$, коли $j \rightarrow \infty$, що забезпечується вибором k з умови

$$k^2 = \gamma 2^{l\gamma} l_j^{m^- - 1 + \frac{n(m^- - m)}{2}} M_{l+1}^{\frac{(n+2)(m^+ - m^-)}{2}} (\theta, \tau) \rho^{-n-2} \iint_{Q_{l+1}} F^2(u) dx dt$$

Звідси ми маємо

$$M_l^{1 - m^- + \frac{n(m^- - m)}{2}} F^2(M_l) \leq \\ \leq \gamma (1 - \sigma)^{-\gamma} 2^{l\gamma} M_{l+1}^{\frac{(n+2)(m^+ - m^-)}{2}} \rho^{-n-2} \iint_{Q_{l+1}} F^2(u) dx dt$$

Зробивши перепозначення $M_l^{\frac{1-m^-}{2} + \frac{n(m^- - m)}{4}} F(M_l) = M_l^{\frac{a}{2}} F(M_l) = \Psi_l$, отримаємо оцінку вигляду

$$\Psi_l^2 \leq \gamma (1 - \sigma)^{-\gamma} 2^{l\gamma} \Psi_{l+1} M_{l+1}^{\frac{(n+2)(m^+ - m^-)}{2} - \frac{a}{2}} \rho^{-n-2} \iint_{Q_{l+1}} F(u) dx dt \leq \\ \leq \varepsilon \Psi_{l+1}^2 + \frac{1}{\varepsilon} (1 - \sigma)^{-\gamma} \gamma 2^{l\gamma} (M_u(\theta, \tau))^{(n+2)(m^+ - m^-) - a} \times \\ \times \rho^{-2(n+2)} \left(\iint_{Q_{l+1}} F(u) dx dt \right)^2$$

Проітеруємо останню нерівність:

$$\Psi^2(u(\bar{x}, \bar{t})) \leq \Psi_0^2 \leq \varepsilon^l \Psi_l^2 + \frac{1}{\varepsilon} \gamma (1 - \sigma)^{-\gamma} \sum_{i=0}^{l-1} (\varepsilon 2^\gamma)^i \times \\ \times (M_u(\theta, \tau))^{(n+2)(m^+ - m^-) - a} \rho^{-2(n+2)} \left(\iint_{Q_{l+1}} F(u) dx dt \right)^2$$

Оберемо $\varepsilon = 2^{-\gamma-1}$ і перейдемо до границі, коли $l \rightarrow \infty$:

$$(u(\bar{x}, \bar{t}))^{1 - m^- + \frac{n(m-m^-)}{2}} F(u(\bar{x}, \bar{t})) \leq \\ \leq \gamma (1 - \sigma)^{-\gamma} \rho^{-n-2} (M_u(\theta, \tau))^{\frac{(n+2)(m^+ - m^-)}{2}} \iint_{Q_{\frac{\eta}{2}, \frac{s}{2}}(\bar{x}, \bar{t})} f(u) u^{m^-} dx dt \quad (3.30)$$

Щоб оцінити інтеграл у правій частині нерівності (3.30), підставимо в інтегральну тотожність функцію $\varphi = u^{m^-} \zeta^2$, використовуючи умову (3.22) й нерівність Гьольдера, отримаємо

$$\iint_{Q_{\frac{\eta}{2}, \frac{s}{2}}(\bar{x}, \bar{t})} f(u) u^{m^-} \zeta^2 dx dt \leq \gamma \iint_{Q_{\frac{\eta}{2}, \frac{s}{2}}(\bar{x}, \bar{t})} u^{m^-+1} |\zeta_t| \zeta dx dt + \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{Q_{\frac{\eta}{2}, \frac{s}{2}}(\bar{x}, \bar{t})} u^{m_i+m^-} |\zeta_{x_i}|^2 dx dt \leq \\ \leq \gamma \rho^{-2} M_u^{m^+ + m^-}(\theta, \tau) |Q_{\frac{\eta}{2}, \frac{s}{2}}(\bar{x}, \bar{t})| \leq \gamma \rho^n M_u^{m^-+1 + \frac{m-m^+}{2}n}(\theta, \tau). \quad (3.31)$$

Оскільки $(\bar{x}, \bar{t}) \in Q_{\sigma\theta, \sigma\tau}(x^0, t^0)$, з (3.30), (3.31) приходимо до нерівності

$$(M_u(\sigma\theta, \sigma\tau))^{1 - m^- + \frac{n(m-m^-)}{2}} F(M_u(\sigma\theta, \sigma\tau)) \leq \\ \leq \gamma (1 - \sigma)^{-\gamma} \rho^{-2} (M_u(\theta, \tau))^{m^+ + 1 + \frac{n(m-m^-)}{2}}. \quad (3.32)$$

Визначимо такі послідовності $\{\sigma_j\}, \{\theta_j\}, \{\tau_j\}, \{M_j\} : \sigma_j := \frac{1-2^{-j-1}}{1-2^{-j-2}},$
 $\theta_j := (\theta_{1j}, \theta_{2j}, \dots, \theta_{nj}), \theta_{ij} = \theta_i \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^j}\right), i = \overline{1, n},$
 $\tau_j = \tau \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^j}\right), M_j := \sup_{Q_{\theta_j, \tau_j}(x^0)} u, \Gamma(M_j) = \left[\frac{F(M_j)}{M_j^{m^+ + m^-}} \right]^{\frac{1}{m^+ + 1 + \frac{n(m-m^-)}{2}}}.$
 Запишемо оцінку (3.32) для пари циліндрів $Q_{\theta_j, \tau_j}(x^0, t^0)$ й $Q_{\theta_{j+1}, \tau_{j+1}}(x^0, t^0)$. Отже, маємо

$$M_j \Gamma(M_j) \leq \gamma (1 - \sigma)^{-\gamma} 2^{j\gamma} \rho^{\frac{-2}{m^+ + 1 + \frac{n(m-m^-)}{2}}} M_{j+1}.$$

Якщо $\varepsilon \in (0, 1)$, $\mu = \frac{\beta}{m^{++} + \frac{n(m-m^-)}{2}}$, тоді можемо застосувати нерівність (3.18)

$$\begin{aligned} \Gamma(M_l) &\leq \Gamma(\varepsilon M_{l+1}) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Gamma(M_l) M_l}{M_{l+1}} \leq \\ &\leq \Gamma(\varepsilon M_{l+1}) + \varepsilon^{-1} \gamma (1 - \sigma)^{-\gamma} 2^{l\gamma} \rho^{\frac{-2}{m^{++} + \frac{n(m-m^-)}{2}}} \leq \\ &\leq \varepsilon^\mu \Gamma(M_{l+1}) + \varepsilon^{-1} \gamma (1 - \sigma)^{-\gamma} 2^{l\gamma} \rho^{\frac{-2}{m^{++} + \frac{n(m-m^-)}{2}}}. \end{aligned}$$

Проітерувавши останню нерівність, маємо

$$\Gamma(M_0) \leq \varepsilon^{l\mu} \Gamma(M_{l+1}) + \varepsilon^{-1} \gamma (1 - \sigma)^{-\gamma} \sum_{i=0}^l (\varepsilon^{i\mu} 2^{i\gamma}) \rho^{\frac{-2}{m^{++} + \frac{n(m-m^-)}{2}}}.$$

Оберемо $\varepsilon^\mu = 2^{-\gamma-1}$ і перейдемо до границі, коли $l \rightarrow \infty$:

$$\Gamma(u(x^0, t^0)) \leq \gamma (1 - \sigma)^{-\gamma} \rho^{\frac{-2}{m^{++} + \frac{n(m-m^-)}{2}}}.$$

Повертаючись до попередніх позначень

$$F(u(x^0, t^0)) \leq \gamma (1 - \sigma)^{-\gamma} (M_u(\theta, \tau))^{m^+ + m^-} \rho^{-2}, \quad (3.33)$$

отримаємо твердження теореми 3.2.

3.3 Оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропного параболічного рівняння з градієнтною абсорбцією

Розглянемо слабкі розв'язки квазілінійного параболічного рівняння з дивергентною головною частиною

$$u_t - \operatorname{div} A(x, t, u, \nabla u) + g(x, t, \nabla u) = b(x, t, u, \nabla u), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (3.34)$$

де $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, Ω обмежена область в R^n , $n \geq 2$, $0 < T < +\infty$, $0 \in \Omega$, які задовольняють початкову умову

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \{0\}. \quad (3.35)$$

Будемо припускати, що коефіцієнти рівняння $A : \Omega \times R_+^1 \times R_+^1 \times R^n \rightarrow R^n$, $g, b : \Omega \times R_+^1 \times R_+^1 \times R^n \rightarrow R^1$ задовольняють наступним умовам:

- $A(\cdot, \cdot, u, \xi)$, $g(\cdot, \cdot, \xi)$, $b(\cdot, \cdot, u, \xi)$ є вимірними за Лебегом для всіх $u \in R_+^1, \xi \in R^n$;
- $A(x, t, \cdot, \cdot)$, $g(x, t, \cdot)$, $b(x, t, \cdot, \cdot)$ неперервні майже для всіх $(x, t) \in \Omega_T$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$;

-

$$\begin{aligned}
A(x, t, u, \xi)\xi &\geq \nu_1 \sum_{i=1}^n u^{m_i-1} |\xi_i|^2, \\
|a_i(x, t, u, \xi)| &\leq \nu_2 u^{m_i-1} |\xi_i|, \quad i = \overline{1, n}, \\
\nu_1 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{q_i} &\leq g(x, t, \xi) \leq \nu_2 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{q_i}, \\
|b(x, t, u, \xi)| &\leq \nu_2 u^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n u^{m_i-1} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.36}$$

де ν_1, ν_2 деякі додатні сталі.

Припускається, що для показників рівняння виконуються нерівності

$$1 - \frac{2}{n} < m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n < m + \frac{2}{n}, \quad m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i, \tag{3.37}$$

$$\frac{2 + nm}{1 + n} \leq q < 2, \quad \max_{0 \leq i \leq n} q_i < q \left(1 + \frac{1}{n} \right), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i}. \tag{3.38}$$

Означення 3.5. Будемо казати, що функція u належить простору $L^{\bar{q}}(0, T; W^{1, \bar{q}}(\Omega))$, якщо $\iint_{\Omega_T} |u|^q dx dt + \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} |u_{x_i}|^{q_i} dx dt < \infty$.

Означення 3.6. Будемо казати, що функція u належить простору $V_m(\Omega_T)$, якщо $u \in C(0, T; L^{1+m^-}(\Omega))$ і $\sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} |u|^{m_i+m^- - 2} |u_{x_i}|^2 dx dt < \infty$, де $m^- = \min(1, m_1)$.

Означення 3.7. Слабким розв'язком задачі (3.34), (3.35) будемо називати невід'ємну функцію $u(x, t)$, яка задовольняє включенню $u\psi \in V_m(\Omega_T) \cap L^{\bar{q}}(0, T; W^{1, \bar{q}}(\Omega))$ та виконується інтегральна тото-

жність

$$\int_{\Omega} u(x, \tau) \psi^p \varphi \, dx + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (-u(\psi^p \phi)_t + A(x, t, u, \nabla u) \nabla(\psi^p \varphi) + \\ + g(x, t, \nabla u) \psi^p \varphi - b(x, t, u, \nabla u) \psi^p \varphi) \, dx dt = 0, \quad (3.39)$$

для $p = \max(2 + m_n, \max_{1 \leq i \leq n} q_i)$, будь-якого $0 < \tau < T$, і будь-якої пробної функції $\varphi: \varphi \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \overset{o}{W}^{1,2}(\Omega))$ й будь-якої $\psi \in C^1(\overline{\Omega}_T)$, яка обертається в 0 в околі точки $(0, 0)$.

Сформулюємо головний результат підрозділу.

Теорема 3.3. *Нехай виконані умови (3.36)-(3.38). Тоді існує додатня стала c_6 , яка залежить тільки від $\nu_1, \nu_2, n, m_1, \dots, m_n, q_1, \dots, q_n$, що справедлива наступна оцінка*

$$u(x, t) \leq c_6 \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{2}{(2-m)q+(q-2)m_i}} + t^{\frac{1}{q(1-m)+2(q-1)}} \right)^{q-2} \quad (3.40)$$

для $(x, t) \in \Omega_T \setminus \{(0, 0)\}$.

3.3.1 Інтегральні оцінки розв'язків

Для $r > 0$ позначимо

$$D(r) = \left\{ (x, t) \in R^n \times R_+^1 : \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{2(q-m)}{(2-m)q+(q-2)m_i}} + t^{\frac{q-m}{q(1-m)+2(q-1)}} < r \right\}.$$

Зафіксуємо таку сталу R_0 , щоб $D(R_0) \subset \Omega_T$, й для $0 < r < R_0$ визначимо

$$M_u(r) := \text{ess sup}\{u(x, t) : (x, t) \in D(R_0) \setminus D(r)\}.$$

Через γ будемо позначати додатню сталу, яка залежить тільки від відомих параметрів $l, \nu_1, \nu_2, n, m_1, \dots, m_n, q_1, \dots, q_n, R_0$ і змінюється від рядка до рядка.

Нехай $0 < \rho < \frac{R_0}{2}$, $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $\frac{\rho}{2} \leq s(1 - \sigma) \leq s \leq \frac{3}{2}\rho$, $u_{2\rho} = (u - M_u(2\rho))_+$, для $k > 0$ та $j = 0, 1, 2, \dots$ покладемо $s_j = s(1 - \sigma 2^{-j})$, $\bar{s}_{j+1} = \frac{1}{2}(s_j + s_{j+1})$, $k_j = k(1 - 2^{-j})$, $Q_{s_j} = R_+^{n+1} \setminus D(s_j)$,

$A_{k_j, s_j} = \{(x, t) \in Q_{s_j} : u_{2\rho}(x, t) > k_j\}$, $l \geq p + 1$. Нехай $\varsigma_j \in C^\infty(R_+^{n+1})$, $0 \leq \varsigma_j \leq 1$, $\varsigma_j = 1$ в $Q_{s_{j+1}}$, $\varsigma_j = 0$ у $D(\bar{s}_j)$, й $\left| \frac{\partial \varsigma_j}{\partial t} \right| \leq \gamma \sigma^{-\gamma} 2^{j\gamma} s^{-\frac{q(1-m)+2(q-1)}{q-m}}$, $\left| \frac{\partial \varsigma_j}{\partial x_i} \right| \leq \gamma \sigma^{-\gamma} 2^{j\gamma} s^{-\frac{(2-m)q+(q-2)m_i}{2(q-m)}}$, $i = \overline{1, n}$.

Лема 3.3. *Нехай виконані умови теореми 3.3, тоді*

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} \int_{\Omega} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 \varsigma_j^l dx + \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+ |u_{x_i}|^{q_i} \varsigma_j^l dx dt \leq \\ \leq \gamma \sigma^{-\gamma} 2^{j\gamma} \rho^{-\frac{2+q(1-m)}{q-m}} H(s, \rho) |A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}|, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \text{де } H(s, \rho) &= \left(\rho^{\frac{2-q}{q-m}} M_u(s(1-\sigma)) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\rho^{\frac{2-q}{q-m}} M_u(s(1-\sigma)) \right)^{m_i+1} + \\ &+ \rho^2 \left(\rho^{\frac{2-q}{q-m}} M_u(s(1-\sigma)) \right)^{m+1}. \end{aligned}$$

Доведення. В інтегральну тотожність (3.39) підставимо пробну функцію $\varphi = (u_{2\rho} - k_{j+1})_+ \varsigma_j^{l-p}$, $\psi = \varsigma_j$, використовуючи структурні нерівності (3.36), будемо мати

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} \int_{\Omega} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 \varsigma_j^l dx + \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+ |u_{x_i}|^{q_i} \varsigma_j^l dx dt + \\ + \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 \varsigma_j^l dx dt \leq \iint_{\Omega_T} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+ u^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \varsigma_j^l dx dt + \\ + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+ u^{m_i-1} |u_{x_i}| \left| \frac{\partial \varsigma_j}{\partial x_i} \right| \varsigma_j^{l-1} dx dt + \\ + \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 \varsigma_j^{l-1} \left| \frac{\partial \varsigma_j}{\partial t} \right| dx dt \end{aligned}$$

Застосувавши нерівність Юнга, отримаємо

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} \int_{\Omega} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 \varsigma_j^l dx + \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+ |u_{x_i}|^{q_i} \varsigma_j^l dx dt + \\ + \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 \varsigma_j^l dx dt \leq \iint_{\Omega_T} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 u^{m-1} \varsigma_j^l dx dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 u^{m_i-1} \left| \frac{\partial \varsigma_j}{\partial x_i} \right|^2 \varsigma_j^{l-1} dx dt + \\
& + \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 \varsigma_j^{l-1} \left| \frac{\partial \varsigma_j}{\partial t} \right|^2 dx dt
\end{aligned}$$

Використовуючи означення функцій ς_j і $M_u(r)$, з останньої нерівності прийдемо до необхідної оцінки (3.39). □

3.3.2 Доведення теореми 3.3

Перейдемо до доведення теореми 3.3. Будемо використовувати лему 1.1 про геометричну збіжність послідовності чисел, у якості Y_{j+1} візьмемо

$\iint_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 dx dt$ та застосуємо нерівність Гьольдера:

$$\begin{aligned}
& \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 dx dt \leq \left(\iint_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}} ((u_{2\rho} - k_{j+1})_+ \varsigma_j^l)^{q+1+\frac{2q}{n}} dx dt \right)^{\frac{2}{q+1+\frac{2q}{n}}} \times \\
& \times |A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}|^{1-\frac{2}{q+1+\frac{2q}{n}}} \leq \gamma \left(\int_0^T \left(\int_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}(t)} ((u_{2\rho} - k_{j+1})_+ \varsigma_j^l)^{\frac{n(q+1)}{n-q}} dx \right)^{\frac{n-q}{n}} \right) \times \\
& \times \left(\int_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}(t)} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 \varsigma_j^l dx \right)^{\frac{q}{n}} dt \Big)^{\frac{2}{q+1+\frac{2q}{n}}} |A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}|^{1-\frac{2}{q+1+\frac{2q}{n}}}.
\end{aligned}$$

Застосувавши лему 1.2 з $\alpha_i = 1$, $p_i = q_i$, $i = \overline{1, n}$, отримаємо

$$\begin{aligned}
& \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 dx dt \leq \\
& \leq \gamma \left(\sup_{0 < t < T} \int_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}} \times \{t\}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 \varsigma_j^l dx \right)^{\frac{2q}{n(q+1+\frac{2q}{n})}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^T \left(\prod_{i=1}^n \left(\int_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}(t)} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+ |u_{x_i}|^{q_i} \zeta_j^l dx \right)^{\frac{q}{nq_i(1+q)}} \right)^{q+1} dt \right)^{\frac{2}{q+1+\frac{2q}{n}}} \times \\
& \times |A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}|^{1-\frac{2}{q+1+\frac{2q}{n}}} \leq \gamma \left(\sup_{0 < t < T} \int_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}} \times \{t\}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 \zeta_j^l dx \right)^{\frac{2q}{n(q+1+\frac{2q}{n})}} \times \\
& \times \left(\prod_{i=1}^n \left(\iint_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+ |u_{x_i}|^{q_i} \zeta_j^l dx dt \right)^{\frac{q}{nq_i}} \right)^{\frac{2}{q+1+\frac{2q}{n}}} |A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}|^{1-\frac{2}{q+1+\frac{2q}{n}}} \leq \\
& \leq \gamma \left(\sup_{0 < t < T} \int_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}} \times \{t\}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 \zeta_j^l dx \right)^{\frac{2q}{n(q+1+\frac{2q}{n})}} \times \\
& \times \left(\sum_{i=1}^n \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+ |u_{x_i}|^{q_i} \zeta_j^l dx dt \right)^{\frac{2}{q+1+\frac{2q}{n}}} |A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}|^{1-\frac{2}{q+1+\frac{2q}{n}}}.
\end{aligned}$$

З останньої оцінки, використовуючи нерівність

$$|A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}| \leq \gamma 2^{j\gamma} k^{-2} \iint_{A_{k_j, \bar{s}_j}} (u_{2\rho} - k_j)_+^2 dx dt, \text{ отримаємо для } j = 0, 1, 2 \dots$$

$$\begin{aligned}
y_{j+1} &= \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{s}_{j+1}}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 dx dt \leq \gamma \sigma^{-\gamma} 2^{j\gamma} k^{-2} \left(1 + \frac{2q}{n(q+1+\frac{2q}{n})} \right) \times \\
& \times \rho^{-\frac{2+q(1-m)}{q-m} (1+\frac{q}{n})} \frac{2}{q+1+\frac{2q}{n}} (H(s, \rho))^{\frac{(1+q)}{q+1+\frac{2q}{n}}} y_j^{1+\frac{2q}{n(q+1+\frac{2q}{n})}},
\end{aligned}$$

Згідно з лемою 1.1 $y_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, якщо обрати k з умови

$$k^{4+n+\frac{n}{q}} = \rho^{-\frac{2+q(1-m)}{q-m} (1+\frac{n}{q})} H^{1+\frac{n}{q}}(s, \rho) \iint_{Q_{\bar{s}_0}} u_{2\rho}^2 dx dt. \quad (3.42)$$

Оцінимо інтеграл у правій частині нерівності (3.42). Нехай $\varsigma \in C^\infty(R_+^{n+1})$, $0 \leq \varsigma \leq 1$, $\varsigma = 1$ у $Q_{\bar{s}_0}$, $\varsigma = 0$ у $D(s(1-\sigma))$, й $|\frac{\partial \varsigma}{\partial t}| \leq \gamma \sigma^{-\gamma} s^{-\frac{q(1-m)+2(q-1)}{q-m}}$, $|\frac{\partial \varsigma}{\partial x_i}| \leq \gamma \sigma^{-\gamma} s^{-\frac{(2-m)q+(q-2)m_i}{2(q-m)}}$, $i = \overline{1, n}$.

Підставимо в інтегральну тотожність (3.39) пробну функцію $\varphi = u_{2\rho}\varsigma^{l-p}$, $\psi = \varsigma$ та застосуємо нерівність $D(s) \leq \gamma s^{n+\frac{q(1-m)+2(q-1)}{q-m}}$, аналогічно як в (3.41) виводимо

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{\bar{s}_0}} u_{2\rho}^2 dx dt &\leq \gamma s^{\frac{q(1-m)+2(q-1)}{q-m}} \sup_{0 < t < T} \int_{Q_{\bar{s}_0} \times \{t\}} u_{2\rho}^2 \varsigma^l dx \leq \\ &\leq \gamma \sigma^{-\gamma} \rho^{n+2\frac{q(1-m)+2(q-1)}{q-m} - \frac{2+q(1-m)}{q-m}} H(s, \rho). \end{aligned}$$

З оцінки (3.42) з урахуванням останньої нерівності виходить, що

$$(M_u(s) - M_u(2\rho))^{4+n+\frac{n}{q}} \leq \gamma \sigma^{-\gamma} \rho^{n+2\frac{q(1-m)+2(q-1)}{q-m} - \frac{2+q(1-m)}{q-m}} (2+\frac{n}{q}) H^{2+\frac{n}{q}}(s, \rho).$$

Якщо $\varepsilon \in (0, 1)$, тоді з (3.37), (3.38), нерівності Юнга та останньої оцінки маємо

$$M_u(s) \leq \varepsilon M_u(s(1-\sigma)) + M_u(2\rho) + \gamma \sigma^{-\gamma} \varepsilon^{-\gamma} \rho^{\frac{q-2}{q-m}}. \quad (3.43)$$

Позначимо через $\{\sigma_j\}, \{s_j\}, \{M_j\}$ $j = 0, 1, 2, \dots$ послідовності $\sigma_j := \frac{1}{2+2^j}$, $s_j := \frac{\rho}{2}(1+2^{-j+1})$, $M_j = M_u(s_j)$, з (3.43) ми приходимо до рекурсивної нерівності

$$M_j \leq \varepsilon M_{j+1} + M_u(2\rho) + \gamma 2^{j\gamma} \varepsilon^{-\gamma} \rho^{\frac{q-2}{q-m}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Ітеруючи останню нерівність, отримаємо

$$M_0 \leq \varepsilon^j M_{j+1} + M_u(2\rho) \sum_{i=0}^j \varepsilon^i + \gamma \varepsilon^{-\gamma} \rho^{\frac{q-2}{q-m}} \sum_{i=0}^j (\varepsilon 2^\gamma)^i$$

для кожного $j \geq 1$. Ми обираємо $\varepsilon \leq 2^{-\gamma-1}\varepsilon_0$ таким чином, щоб сума в другому доданку праворуч була з збіжним рядом при $j \rightarrow \infty$

$$M_u(\rho) \leq M_0 \leq (1-\varepsilon)^{-1} M_u(2\rho) + \gamma \varepsilon^{-\gamma} \rho^{\frac{q-2}{q-m}}.$$

Визначимо послідовність $\rho_j := 2^{-j} R_0$, $j = 0, 1, 2, \dots$, тоді попередня нерівність може бути представлена у вигляді

$$M_u(\rho_j) \leq (1-\varepsilon)^{-1} M_u(\rho_{j-1}) + \gamma \varepsilon^{-\gamma} \rho_j^{\frac{q-2}{q-m}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Звідси, за допомогою ітерацій виводимо, що

$$M_u(\rho_j) \leq (1 - \varepsilon)^{-j} M_u(R_0) + \gamma \varepsilon^{-\gamma} \rho_j^{\frac{q-2}{q-m}} \sum_{i=0}^j \left(\frac{2^{-\frac{2-q}{q-m}}}{1 - \varepsilon} \right)^i,$$

Обираючи ε з умови $\varepsilon < 1 - 2^{-\frac{q-2}{q-m}}$ таким чином, що сума в правій частині попередньої нерівності може бути мажорирована збіжним рядом, отримаємо

$$M(\rho_j) \leq \gamma \rho_j^{\frac{q-2}{q-m}} \left(R_0^{\frac{2-q}{q-m}} M_u(R_0) + 1 \right), \quad j = 1, 2, \dots$$

що доводить теорему 3.3.

3.4 Нерівність Гарнака для нелінійного параболического рівняння з абсорбцією

Нерівність Гарнака отримана для рівняння (3.1) з першого підрозділу цього розділу у випадку, коли $2 < p_1 = p_2 = \dots = p_n$, $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$. Модельним випадком є таке рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i})_{x_i} + f(u) = 0. \quad (3.44)$$

Теорема 3.4. *Нехай u невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (3.1) на множині Ω_T , виконана умова (3.2) і $2 < p_1 = p_2 = \dots = p_n$, $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$. Припустимо також, що $a_0(u) \leq \nu_2 f(u)$ і нехай $f \in C^1(R_+^1)$, $f \geq 0$, і функція $\Psi(u) = u^{-1} F^{\frac{1}{p}}(u)$ задовольняє умові (A). Тоді існують такі додатні сталі c_7, c_8 , які залежать тільки від ν_1, ν_2, n, p і не залежать від самого розв'язку u , що має місце нерівність*

$$u(x^0, t^0) \leq c_7 \inf_{B_\rho(x^0)} u(x, t^0 + \tau), \quad \tau = \rho^p \left(\frac{c_8}{u(x^0, t^0)} \right)^{p-2}, \quad (3.45)$$

для всіх циліндрів $Q_{8\rho, 8\tau}(x^0, t^0) \subset \Omega_T$.

Формулювання теореми 3.4 таке саме, як в класичних роботах [29, 32, 62, 63, 76], однак, через наявність молодшого члену, результати [29,

32, 62, 63, 76] не можуть бути застосовані. Якщо $f(u) = u^q, q > p - 1$, тоді нерівність Гарнака є простим наслідком оцінки Келлера-Оссермана (див. [6, 60]). Головна новизна цих результатів полягає в тому, що сталі c_7, c_8 не залежать від розв'язку u .

3.4.1 Локальні енергетичні оцінки

Нехай (x^0, t^0) така довільна точка, що $u(x^0, t^0) > 0$. Для $r, \eta > 0$ побудуємо циліндри

$$Q_{r,\eta}(\bar{x}, \bar{t}) \subset Q_{2\rho, 2\theta}(x^0, t^0) \subset \Omega_T, \quad \theta = \rho^p \left(\frac{c_{14}}{x^0, t^0} \right)^{p-2}. \quad (3.46)$$

Нехай $\zeta \in C_0^\infty(Q_{r,\eta}(\bar{x}, \bar{t}))$, $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta = 1$ in $Q_{\sigma r, \sigma \eta}(\bar{x}, \bar{t})$, $|\nabla \zeta| \leq (1 - \sigma)^{-1} r^{-1}$, $|\zeta_t| \leq (1 - \sigma)^{-1} \eta^{-1}$.

Лема 3.4. *Нехай виконані всі умови теореми 3.4, тоді для кожного*

$0 < k < \sup_{Q_{2\rho, 2\tau}(x^0, t^0)} u$ *справедливі оцінки*

$$\begin{aligned} & \sup_{\bar{t}-\eta < t < \bar{t}+\eta} \int_{B_r(\bar{x})} (u-k)_+^2 \zeta^p dx + \iint_{Q_{r,\eta}(\bar{x}, \bar{t})} |\nabla(u-k)_+|^p \zeta^p dx dt \leq \\ & \leq \gamma(1-\sigma)^{-1} \eta^{-1} \iint_{Q_{r,\eta}(\bar{x}, \bar{t})} (u-k)_+^2 dx dt + \gamma(1-\sigma)^{-p} r^{-p} \iint_{Q_{r,\eta}(\bar{x}, \bar{t})} (u-k)_+^p dx dt, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} & \sup_{\bar{t}-\eta < t < \bar{t}+\eta} \int_{B_r(\bar{x})} (k-u)_+^2 \zeta^p dx + \iint_{Q_{r,\eta}(\bar{x}, \bar{t})} |\nabla(k-u)_+|^p \zeta^p dx dt \leq \\ & \leq \gamma(1-\sigma)^{-1} (k^2 \eta^{-1} + k^p \eta^{-p}) |A_{k,r,\eta}^-|, \end{aligned} \quad (3.48)$$

де $A_{k,r,\eta}^- = Q_{r,\eta}(\bar{x}, \bar{t}) \cap \{u < k\}$.

Доведення. В інтегральну тотожність (3.4) підставимо пробну функцію $\varphi = (u - k)_+ \zeta^p$, використаємо умови (2.3) з $p = p_1 = \dots = p_n$, $m_1 = \dots = m_n = 1$, нерівність Юнга і прийдемо до внаслідкової оцінки (3.47). Щоб довести оцінку (3.48) в інтегральну тотожність (3.4) підставимо $\varphi = (k - u)_+ \zeta^p$, використовуючи структурні нерівності (3.2) з

$p = p_1 = \dots = p_n$, $m_1 = \dots = m_n = 1$ і нерівність Юнга, отримаємо

$$\begin{aligned} & \sup_{\bar{t}-\eta < t < \bar{t}+\eta} \int_{B_r(\bar{x})} (k-u)_+^2 \zeta^p dx + \iint_{Q_{r,\eta}(\bar{x},\bar{t})} |\nabla(k-u)_+|^p \zeta^p dx \leq \\ & \leq \gamma(1-\sigma)^{-1} \eta^{-1} \iint_{Q_{r,\eta}(\bar{x},\bar{t})} (k-u)_+^2 dx dt + \gamma(1-\sigma)^{-p} r^{-p} \iint_{Q_{r,\eta}(\bar{x},\bar{t})} (k-u)_+^p dx dt + \\ & \quad + \gamma \iint_{Q_{r,\eta}(\bar{x},\bar{t})} f(u)(k-u)_+ \zeta^p dx dt. \end{aligned}$$

Використовуючи твердження 3.2 з $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$, оцінимо інтеграл у правій частині попередньої нерівності наступним чином

$$\iint_{Q_{r,\eta}(\bar{x},\bar{t})} f(u)(k-u)_+ \zeta^p dx dt \leq \gamma \Phi(k) |A_{k,r,\eta}^-| \leq \gamma r^{-p} k^p |A_{k,r,\eta}^-|.$$

Це завершує доведення нерівності (3.47). \square

3.4.2 Лема типу Де Джорджі

Наступна лема є наслідком леми 3.4, леми 1.1 та теореми вкладення (див. [17, розділ 3, лема 3.1]).

Лема 3.5. *Нехай виконані всі умови теореми 3.4 і $(x^0, t^0) \in \Omega_T$ така довільна точка, що $u(x^0, t^0) > 0$, зафіксуємо θ , як у (3.45), $\xi, a \in (0, 1)$, $0 < \omega < \sup_{Q_{2\rho, 2\theta}(x^0, t^0)} u$, $\theta^{-1} \leq (\xi\omega)^{p-2}$. Тоді існує стала $\nu^- \in (0, 1)$, яка залежить тільки від ν_1, ν_2, κ, p і a , що якщо справедлива оцінка*

$$\left| \left\{ (x, t) \in Q_{r, r^p(\xi\omega)^{2-p}}^-(\bar{x}, \bar{t}) : u(x, t) \leq \xi\omega \right\} \right| \leq \nu^- \left| Q_{r, r^p(\xi\omega)^{2-p}}^-(\bar{x}, \bar{t}) \right|, \quad (3.49)$$

тоді має місце

$$u(x, t) \geq a\xi\omega \quad (3.50)$$

для майже усіх точок $(x, t) \in Q_{\frac{r}{2}, (\frac{r}{2})^p(\xi\omega)^{2-p}}^-(\bar{x}, \bar{t})$ та для будь-якого циліндру $Q_{r, r^p(\xi\omega)^{2-p}}^-(\bar{x}, \bar{t}) = B_r(\bar{x}) \times (\bar{t} - r^p(\xi\omega)^{2-p}, \bar{t}) \subset Q_{2\rho, 2\theta}(x^{(0)}, t^{(0)}) \subset \Omega_T$. Аналогічно, нехай M деяка стала, яка задовольняє нерівності $M \geq \sup_{Q_{r, r^p(\xi\omega)^{2-p}}^-(\bar{x}, \bar{t})} u$, тоді існує стала $\nu^+ \in (0, 1)$, яка

залежить тільки від ν_1, ν_2, n, p, a, M і ω , що якщо справедлива нерівність

$$\left| \left\{ (x, t) \in Q_{r, r^p(\xi\omega)^{2-p}}^-(\bar{x}, \bar{t}) : u(x, t) \geq M(1 - \xi) \right\} \right| \leq \nu^+ \left| Q_{r, r^p(\xi\omega)^{2-p}}^-(\bar{x}, \bar{t}) \right|, \quad (3.51)$$

тоді виконується оцінка

$$u(x, t) \leq M(1 - a\xi) \quad (3.52)$$

для майже всіх точок $(x, t) \in Q_{\frac{r}{2}, (\frac{r}{2})^p(\xi\omega)^{2-p}}^-(\bar{x}, \bar{t})$ та для будь-якого циліндру $Q_{r, r^p(\xi\omega)^{2-p}}^-(\bar{x}, \bar{t}) \subset Q_{2\rho, 2\theta}(x^0, t^0) \subset \Omega_T$.

3.4.3 Поширення додатності

Наступна лема - це результат поширення додатності. Для довільної точки $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T$ і для $0 < N < \sup_{Q_{2\rho, 2\theta}(x^0, t^0)} u$ розглянемо циліндр

$$B_{4r}(\bar{x}) \times \left(\bar{t}, \bar{t} + \frac{b^{p-2}}{(\varepsilon N)^{p-2}} \delta (4r)^p \right) \subset Q_{2\rho, 2\theta}(x^0, t^0) \subset \Omega_T,$$

де b, ε, δ є додатніми сталими з наступної леми.

Лема 3.6. *Нехай виконані умови теореми 3.4. Припустимо, що для деякої точки $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T$, деяких $r > 0, \alpha \in (0, 1)$ справедлива нерівність*

$$|\{x \in B_r(\bar{x}) : u(x, \bar{t}) < N\}| \leq (1 - \alpha) |B_r(\bar{x})|. \quad (3.53)$$

Тоді існують такі сталі $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$ і $b > 1$, які залежать тільки від ν_1, ν_2, p, n і α , що має місце оцінка

$$u(x, t) \geq \varepsilon N \quad (3.54)$$

для майже всіх точок $x \in B_{2r}(\bar{x})$ та для будь-якого часу

$$\bar{t} + \frac{1}{2} \frac{b^{p-2}}{(\varepsilon N)^{p-2}} \delta r^p \leq t \leq \bar{t} + \frac{b^{p-2}}{(\varepsilon N)^{p-2}} \delta r^p. \quad (3.55)$$

де $A_{k, r, \eta}^\pm = Q_{r, \eta}(\bar{x}, \bar{t}) \cap \{(u - k)_\pm > 0\}$.

Доведення. З (3.53), використовуючи (3.47), аналогічно як у [17, розділ 4, лема 4.1], отримаємо для кожного $\tau > 0$

$$\left| \left\{ x \in B_r(\bar{x}) : u(x, \bar{t} + e^\tau N^{2-p} \delta r^p) \leq \varepsilon_1 e^{-\frac{\tau}{p-2}} N \right\} \right| \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) |B_r(\bar{x})| \quad (3.56)$$

з деякими $\varepsilon_1, \delta \in (0, 1)$, які залежать тільки від ν_1, ν_2, p, n і α .

Так само, як і в [17, розділ 2, пропозиція 4.1] розглянемо функцію

$$w(x, \tau) = e^{\frac{\tau}{p-2}} N^{-1} (\delta r^p)^{\frac{1}{p-2}} u(x, \bar{t} + e^\tau N^{2-p} \delta r^p), \quad \tau > 0.$$

Позначимо $k_0 = \varepsilon_1 (\delta r^p)^{\frac{1}{p-2}}$, тоді нерівність (3.56) запишемо в наступному вигляді через w

$$|\{x \in B_r(\bar{x}) : w(x, \tau) \leq k_0\}| \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) |B_r(\bar{x})|, \quad (3.57)$$

для кожного $\tau > 0$.

Оскільки $w \geq 0$, взявши похідну стандартним чином, отримаємо

$$\begin{aligned} w_\tau &= \frac{1}{p-2} w + \left(e^{\frac{\tau}{p-2}} N^{-1} (\delta r^p)^{\frac{1}{p-2}} \right)^{p-1} u_t = \\ &= \frac{1}{p-2} w + \operatorname{div} \tilde{A}(x, \tau, w, \nabla w) - \tilde{a}_0(w), \end{aligned} \quad (3.58)$$

де \tilde{A}, \tilde{a}_0 задовольняють умовам

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x, \tau, w, \nabla w) \nabla w &\geq \nu_1 \sum_{i=1}^n |w_{x_i}|^p, \\ |\tilde{a}_i(x, \tau, w, \nabla w)| &\leq \nu_2 \left(\sum_{i=1}^n |w_{x_i}|^p \right)^{1-\frac{1}{p}}, \quad 1 = \overline{1, n}, \\ \nu_1 \tilde{f}(w) &\leq \tilde{a}_0(w) \leq \nu_2 \tilde{f}(w), \end{aligned} \quad (3.59)$$

де $\tilde{f}(w) = \left(e^{\frac{\tau}{p-2}} N^{-1} (\delta r^p)^{\frac{1}{p-2}} \right)^{p-1} f \left(w e^{-\frac{\tau}{p-2}} N (\delta r^p)^{-\frac{1}{p-2}} \right)$.

Нехай $k_s = k_0 2^{-s}$, $s = 0, 1, \dots, s_*$, де s_* достатньо велике додатне число, яке залежить лише від n, p, ν_1, ν_2 , і задовольняє умові $e^{2^{s_*}(p-2)} \leq c_{14}$.

Завдяки нашому вибору та твердженню 3.2 маємо

$$\tilde{F}(k_s) = \int_0^{k_s} \tilde{f}(l) dl = \left(e^{\frac{\tau}{p-2}} N^{-1} (\delta r^p)^{\frac{1}{p-2}} \right)^p F \left(k_s e^{-\frac{\tau}{p-2}} N (\delta r^p)^{-\frac{1}{p-2}} \right) \leq \gamma k_s^p r^{-p}$$

для $x \in B_{4r}(\bar{x})$ і для усіх $0 < \tau \leq \ln c_8$.

Таким чином, енергетичні оцінки (3.47) для функції $(k_s - w)_+$ за циліндрами $Q_{4r, \eta_*}^+(\bar{x}, 0) = B_{4r}(\bar{x}) \times (0, \eta_*)$, $\eta_* = k_{s_*}^{2-p} r^p$ можна записати у формі

$$\sup_{0 < \tau < \eta_*} \int_{B_{4r}(\bar{x})} (k_s - w)_+^2 \zeta^p dx + \iint_{Q_{4r, \eta_*}^+(\bar{x}, 0)} |\nabla(k_s - w)_+|^p \zeta^p dx d\tau \leq \gamma k_s^p r^{-p} |A_{k_s, 4r, \eta_*}^-|,$$

де $A_{k_s, 4r, \eta_*}^- = Q_{4r, \eta_*}^+(\bar{x}, 0) \cap \{w < \kappa_s\}$ і $\zeta \in C_0^\infty(Q_{4r, \eta_*}^+(\bar{x}, 0))$, $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta = 1$ у $B_{2r}(\bar{x}) \times (\frac{\eta_*}{4}, \frac{\eta_*}{2})$, $|\nabla \zeta| \leq \gamma r^{-1}$, $|\zeta_\tau| \leq \gamma \eta_*^{-1}$.

Кінець доведення леми 3.6 таке саме, як у роботі (див. [17, розділ 4, пропозиція 4.1]). \square

Після доведення лем 3.5, 3.6 решта доведення не відрізняються від [33] (див. [17, розділ 5, теореми 1.1]). Це завершує доведення теореми 3.4.

Висновки до розділу 3

Поданий розділ присвячен дослідженню слабких розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з абсорбцією і градієнтною абсорбцією та отриманню для них поточкових верхніх оцінок. У першому підрозділі розглянуто подвійно нелінійне параболічне рівняння з абсорбційним членом, який залежить тільки від розв'язку. Другий підрозділ містить дослідження розв'язків анізотропного параболічного рівняння з абсорбційним членом, модельним випадком якого є анізотропне рівняння пористого середовища з абсорбцією $f(u)$. У третьому підрозділі розглядається анізотропне рівняння пористого середовища з градієнтною абсорбцією. Результати дослідження з першого підрозділу застосовуються для доведення нерівності Гарнака для нелінійного параболічного рівняння з абсорбційним членом у четвертому підрозділі.

Основні результати розділу:

- отримана оцінка типу Келлера-Оссермана для подвійно нелінійного

анізотропного параболічного рівняння з абсорбційним членом, який залежить тільки від розв'язку (теорема 3.1);

- наведені оцінки типу Келлера-Оссермана для подвійно нелінійного анізотропного параболічного рівняння у випадку коли абсорбційний член набуває вигляду u^q та e^u (приклади 3.1 і 3.2 відповідно);
- отримана більш точна верхня оцінка розв'язків для подвійно нелінійного параболічного рівняння при додатковій умові на абсорбційний член (твердження 3.1);
- встановлена точна верхня оцінка для великих розв'язків двічі нелінійного ізотропного параболічного рівняння з абсорбційним членом (твердження 3.2);
- отримана оцінка типу Келлера-Оссермана для анізотропного рівняння пористого середовища з абсорбційним членом $f(u)$ (теорема 3.2);
- наведено приклад оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропного рівняння пористого середовища з абсорбційним членом вигляду u^q (Приклад 3.3);
- отримана оцінка типу Келлера-Оссермана для анізотропного рівняння пористого середовища з градієнтною абсорбцією (теорема 3.3);
- доведена нерівність Гарнака зі сталою, яка не залежить від розв'язку, для нелінійного параболічного рівняння з абсорбційним членом $f(u)$ (теорема 3.4).

Основні результати опубліковані у роботах [14], [80], [81], [82].

РОЗДІЛ 4

УСУВНІСТЬ ІЗОЛЬОВАНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ ДЛЯ РІВНЯНЬ З АБСОРБЦІЄЮ ТА ГРАДІЄНТНОЮ АБСОРБЦІЄЮ

В даному розділі досліджуються поведінка слабких розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з абсорбцією вигляду u^q і градієнтною абсорбцією в околі особливості. Використовуючи апріорні оцінки типу Келлера-Оссермана, які доведені у попередньому розділі, отримані достатні умови усувності ізольованої особливості для анізотропного рівняння пористого середовища з абсорбцією

$$u_t - \sum_{i=1}^n (u^{m_i-1} u_{x_i})_{x_i} + u^q = 0$$

та градієнтною абсорбцією

$$u_t - \sum_{i=1}^n (u^{m_i-1} u_{x_i})_{x_i} + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^{q_i} = 0.$$

4.1 Усувність ізольованих особливостей розв'язків анізотропного рівняння пористого середовища з абсорбцією

4.1.1 Вироджений випадок

Розглянемо рівняння (3.1) з розділу 3 з показниками $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p = 2$, тобто випадок виродженого анізотропного рівняння пористого середовища з абсорбцією. Будемо досліджувати розв'язки рівняння, які задовольняють початкову умову

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \{0\}. \quad (4.1)$$

Головним результатом даного пункту є наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай виконані умови (3.2), (3.3) і u невід'ємний слабкий розв'язок задачі (3.1), (4.1). Припустимо, що $f(u) = u^q$ і виконується*

наступна умова на показник q

$$q \geq m + \frac{2}{n}, \quad (4.2)$$

тоді особливість в точці $(0, 0)$ є усувною.

Для $0 \leq \lambda < n$ визначемо сталі

$$\kappa(\lambda) = \frac{1}{2 + (n - \lambda)(m - 1)}, \quad \kappa_i(\lambda) = \frac{2}{2 + (n - \lambda)(m - m_i)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Нехай

$$\rho_\lambda(x, t) = \left(t^{\frac{\kappa(\lambda)}{\kappa_1(\lambda)}} + \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{\kappa_i(\lambda)}{\kappa_1(\lambda)}} \right)^{\kappa_1(\lambda)},$$

і позначимо $D_\lambda(r) = \{(x, t) : \rho_\lambda(x, t) < r\}$, $D_\lambda(R_0) \subset \Omega_T$, для $0 < r < R_0$ встановимо $M_u(r, \lambda) = \sup_{D_\lambda(R_0) \setminus D_\lambda(r)} u(x, t)$, $E(r, \lambda) = \{(x, t) \in \Omega_T : u(x, t) > M_u(r, \lambda)\}$, $u_r(r, t, \lambda) = (u(x, t) - M_u(r, \lambda))_+$. Розглянемо функцію $\psi_r(x, t) = \eta_r(\rho_\lambda(x, t))$, де $\eta_r : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ функція, яка приймає наступні значення:

$$\eta_r(z) = \begin{cases} 0, & z \leq r, \\ 1, & z \geq R(r), \\ \left[(1 - \varepsilon) \ln \ln \frac{1}{r} \right]^{-1} \left(\ln \ln \frac{1}{r} - \ln \ln \frac{1}{z} \right), & r \leq z \leq R(r), \end{cases}$$

де ε – стала з інтервалу $(0, 1)$, яка вказана нижче і функція $R(r)$ визначається з рівності

$$\ln \frac{1}{R(r)} = \ln^\varepsilon \frac{1}{r}. \quad (4.3)$$

Зауважимо, що в силу очевидних рівностей $\frac{1}{q-1} = (n - \lambda)\kappa(\lambda)$, $\frac{2}{q-m_i} = (n - \lambda)\kappa_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, зі сталою $\lambda \geq 0$, яка визначається наступним чином

$$\lambda = n - \frac{2}{q - m}, \quad (4.4)$$

оцінка Келлера-Оссермана набуває вигляду

$$M_u(r, \lambda) \leq \gamma r^{\lambda-n}, \quad r > 0. \quad (4.5)$$

Ця оцінка отримана з теореми 3.1 і твердження 3.1 у випадку, коли $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 2$.

Розглянемо допоміжні функції $F_1(r, \lambda)$, $F_2(r, \lambda)$, які в залежності від значень параметрів λ, q мають різний вигляд

$$F_1(r, \lambda) = \begin{cases} R^\lambda(r), & \lambda > 0, \\ \ln^{\frac{q-2}{q-1}} \frac{1}{r}, & \lambda = 0, \quad q > 2, \\ \ln \ln \frac{1}{r}, & \lambda = 0, \quad q = 2, \\ \ln^{-\frac{2-q}{q-1}}, & \lambda = 0, \quad q < 2 \end{cases}$$

$$F_2(r, \lambda) = \begin{cases} R^\lambda(r), & \lambda > 0, \\ \ln^{\frac{q-2m_1}{q-m_1}} \frac{1}{r}, & \lambda = 0, \quad q > 2m_1, \\ \ln \ln \frac{1}{r}, & \lambda = 0, \quad q = 2m_1, \\ \ln^{-\frac{2m_1-q}{1-m_1}}, & \lambda = 0, \quad q < 2m_1. \end{cases}$$

Для спрощення наступних записів будемо використовувати позначення $M(r)$, $E(r)$, $u_r(x, t)$ замість $M_u(r, \lambda)$, $E(r, \lambda)$, $u_r(x, t, \lambda)$.

Лема 4.1. *Нехай виконані умови теореми 4.1, тоді для всіх значень l, ρ , які задовольняють нерівностям $l \geq \frac{2q}{q-m_n}$, $2r < \rho \leq \frac{R_0}{2}$, має місце оцінка*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < T} \int_{E(\frac{\rho}{2}) \times \{t\}} \int_{M(\frac{\rho}{2})}^u \ln_+ \frac{s}{M(\frac{\rho}{2})} ds \psi_r^l dx + \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{m_i-2} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt + \\ & + \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^q \ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \psi_r^l dx dt \leq \gamma (F_1(r, \lambda) + F_2(r, \lambda)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Доведення. В інтегральну тотожність (3.4) підставимо пробну функцію

$\varphi = \ln_+ \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \psi_r^l$. Використаємо умову (3.2) і нерівність Юнга:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < T} \int_{E(\frac{\rho}{2}) \times \{t\}} \int_{M(\frac{\rho}{2})}^u \ln_+ \frac{s}{M(\frac{\rho}{2})} ds \psi_r^l dx + \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{m_i-2} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt + \\ & + \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^q \ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \psi_r^l dx dt \leq \gamma \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u \ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right| \psi_r^{l-1} dx dt + \\ & + \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{m_i} \ln^2 \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right|^2 \psi_r^{l-2} dx dt. \end{aligned}$$

З останньої формули, застосовуючи нерівність Юнга, випливає, що

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < T} \int_{E(\frac{\rho}{2}) \times \{t\}} \int_{M(\frac{\rho}{2})}^u \ln_+ \frac{s}{M(\frac{\rho}{2})} ds \psi_r^l dx + \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{m_i-2} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt + \\ & + \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^q \ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \psi_r^l dx dt \leq \gamma \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right|^{\frac{q}{q-1}} dx dt + \\ & + \gamma \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \ln^{\frac{2q-m_i}{q-m_i}} \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right|^{\frac{2q}{q-m_i}} dx dt = \gamma (J_1 + J_2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

За допомогою формули (4.5), отримаємо

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 & \leq \gamma \iint_{D_\lambda(R(r)) \setminus D_\lambda(r)} \ln^{-\frac{1}{q-1}} \frac{1}{\rho_\lambda} \rho_\lambda^{-\frac{1}{\kappa(\lambda)} \frac{q}{q-1}} dx dt + \\ & + \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{D_\lambda(R(r)) \setminus D_\lambda(r)} \ln^{-\frac{m_i}{q-m_i}} \frac{1}{\rho_\lambda} \rho_\lambda^{-\frac{2q}{\kappa_i(\lambda)(q-m_i)}} dx dt \leq \\ & \leq \gamma \int_r^{R(r)} \ln^{-\frac{1}{q-1}} \frac{1}{z} z^{\lambda-1} dz + \gamma \int_r^{R(r)} \ln^{-\frac{m_1}{q-m_1}} \frac{1}{z} z^{\lambda-1} dz \leq \gamma (F_1(r, \lambda) + F_2(r, \lambda)). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Об'єднуючи формули (4.7), (4.8), отримаємо необхідну оцінку (4.6), яка завершує доведення лема. \square

Визначимо функцію $u^{(\rho)}(x, t)$ і множину $E(\frac{\rho}{2}, 2\rho)$ наступним чином

$$u^{(\rho)}(x, t) = \min \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho), u_{2\rho}(x, t) \right),$$

$$E\left(\frac{\rho}{2}, 2\rho\right) = \{x \in E(2\rho) : u < M\left(\frac{\rho}{2}\right)\}.$$

Лема 4.2. В умовах попередньої лему 4.1 має місце наступна нерівність

$$\begin{aligned} \iint_{E(2\rho)} u^{(\rho)} u^q \psi_r^l dx dt &\leq \gamma \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right) \times \\ &\times \left\{ F_3(r, \lambda) + (F_1(r, \lambda) + F_2(r, \lambda))^{\frac{1}{2}} F_4^{\frac{1}{2}}(r, \lambda) \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

де

$$F_3(r, \lambda) = \begin{cases} R^\lambda(r), & \lambda > 0, \\ \ln^{-\frac{1}{q-1}} \frac{1}{r}, & \lambda = 0, \end{cases} \quad F_4(r, \lambda) = \begin{cases} R^\lambda(r), & \lambda > 0, \\ \ln^{-1} \frac{1}{r}, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Доведення. В інтегральну тотожність (3.4) підставимо пробну функцію $\varphi = u^{(\rho)} \psi_r^l$, використаємо умову (3.2) і нерівність Юнга:

$$\begin{aligned} \iint_{E(2\rho)} u^{(\rho)} u^q \psi_r^l dx dt &\leq \gamma \iint_{E(2\rho)} u^{(\rho)} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right|^{\frac{q}{q-1}} dx dt + \\ &+ \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E(2\rho)} \left(\sum_{j=1}^n u^{m_j-1} |u_{x_j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{m_i-1}{2}} u^{(\rho)} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right| \psi_r^{l-1} dx dt = \\ &= \gamma (J_3 + J_4). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Застосувавши нерівність Гьольдера, формулу (4.5) і лему 4.1, оцінимо інтеграли у правій частині нерівності (4.10) наступним чином

$$\begin{aligned} J_3 &\leq \gamma \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right) \iint_{E(2\rho)} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right|^{\frac{q}{q-1}} dx dt \leq \\ &\leq \gamma \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right) \iint_{D_\lambda(R(\lambda)) \setminus D_\lambda(r)} \ln^{-\frac{q}{q-1}} \frac{1}{\rho_\lambda} \rho_\lambda^{-\frac{q}{(q-1)\kappa(\lambda)}} dx dt \leq \\ &\leq \gamma \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right) \int_r^{R(\lambda)} \ln^{-\frac{q}{q-1}} \frac{1}{z} z^{\lambda-1} dz \leq \gamma \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right) F_3(r, \lambda). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
J_4 &\leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right) \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \iint_{E(2\rho)} u^{m_j-2} |u_{x_j}|^2 \psi_r^l dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \left(\iint_{E(2\rho)} u^{m_i} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right|^2 \psi_r^l dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right) \times \\
&\times (F_1(r, \lambda) + F_2(r, \lambda))^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \left(\iint_{D_\lambda(R(\lambda)) \setminus D_\lambda(r)} \ln^{-2} \frac{1}{\rho_\lambda} \rho_\lambda^{-m_i(n-\lambda) - \frac{2}{\kappa_i(\lambda)}} dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right) (F_1(r, \lambda) + F_2(r, \lambda))^{\frac{1}{2}} \left(\int_r^{R(r)} \ln^{-2} \frac{1}{z} z^{\lambda-1} dz \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right) (F_1(r, \lambda) + F_2(r, \lambda))^{\frac{1}{2}} F_4^{\frac{1}{2}}(r, \lambda). \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Підставляючи оцінки (4.12), (4.11) у (4.10), закінчуємо доведення леми. \square

Аналогічно як довели оцінку (4.12), використовуючи ітерацію типу Де Джіорджі, ми отримуємо наступну оцінку

$$\begin{aligned}
&(M(\rho) - M(2\rho))^{1+m+m\frac{n+2}{2}} \leq \\
&\leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{1}{\kappa(\lambda)}} + \sum_{i=1}^n M^{m_i} \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{2}{\kappa_i(\lambda)}} \right)^{\frac{n+2}{2}} \iint_{D_\lambda(R_0) \setminus D_\lambda(\frac{\rho}{2})} u_{2\rho}^{1+m} dx dt.
\end{aligned}$$

Оскільки $u_{2\rho} \leq M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho)$ для $(x, t) \in D_\lambda(R_0) \setminus D_\lambda \left(\frac{\rho}{2} \right)$, застосовуючи нерівність Гьольдера і лему 4.2, маємо

$$\begin{aligned}
&(M(\rho) - M(2\rho))^{1+m+m\frac{n+2}{2}} \leq \\
&\leq \gamma M^{\frac{m+1}{q+1}} \left(\frac{\rho}{2} \right) \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{1}{\kappa(\lambda)}} + \sum_{i=1}^n M^{m_i} \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{2}{\kappa_i(\lambda)}} \right)^{\frac{n+2}{2}} \times \\
&\times \left\{ F_3(r, \lambda) + (F_1(r, \lambda) + F_2(r, \lambda))^{\frac{1}{2}} F_4^{\frac{1}{2}}(r, \lambda) \right\} |D_\lambda(R_0)|^{\frac{q-m}{q+1}}. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

З урахуванням (4.3) справедливі наступні відношення при $\lambda = 0$

$$F_1(r, 0)F_4(r, 0) = \ln^{\frac{q-2}{q-1}} \frac{1}{r} \ln^{-1} \frac{1}{R(r)} = \ln^{\frac{q-2}{q-1}-\varepsilon} \frac{1}{r}, \text{ якщо } q > 2,$$

$$F_2(r, 0)F_4(r, 0) = \ln^{\frac{q-2m_1}{q-m_1}} \frac{1}{r} \ln^{-1} \frac{1}{R(r)} = \ln^{\frac{q-2m_1}{q-m_1}-\varepsilon} \frac{1}{r}, \text{ якщо } q > 2m_1.$$

Обираючи ε з умови $\max\left(\frac{1}{2}, \frac{q-2}{q-1}, \frac{q-2m_1}{q-m_1}\right) < \varepsilon < 1$, перейдемо до границі у нерівності (4.13), коли $r \rightarrow 0$, і отримаємо для будь-якого $\rho \leq \frac{R_0}{2}$ нерівність

$$M(\rho) - M(2\rho) \leq 0.$$

Ітеруючи останню нерівність, маємо для $\rho \leq \frac{R_0}{2}$

$$M(\rho) \leq M(R_0),$$

що доводить обмеженість розв'язку.

Доведемо тепер, що особливість є усувною. Нехай K компактна підмножина в Ω , і $\xi = \begin{cases} 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ 1, & (x, t) \in K \times (0, T). \end{cases}$ В інтегральну тотожність

(3.4) підставимо функцію $\varphi = u\xi^2\psi_r$, $\psi = \psi_r$, використовуючи умову (3.2), нерівність Юнга, обмеженість розв'язку u і переходячи до границі, коли $r \rightarrow 0$, отримаємо

$$\sup_{0 < t < T} \int_K u^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_K u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 dx dt + \int_0^T \int_K u^{q+1} dx dt \leq \gamma. \quad (4.14)$$

В інтегральну тотожність (3.4) підставимо пробну функцію $\varphi\psi_r$, де φ довільна функція, яка належить простору $\overset{o}{V}_{2,m}(\Omega_T)$, застосуємо нерівність (4.14), обмеженість розв'язку і переходячи до границі, коли $r \rightarrow 0$, отримаємо виконання інтегральної тотожності (3.4) з довільною функцією $\varphi \in \overset{o}{V}_{2,m}(\Omega_t)$ і $\psi \equiv 1$, що доводить теорему 4.1.

4.1.2 Вироджений та сингулярний випадки

В даному підрозділі будемо вивчати питання усувності ізольованих особливостей для рівняння (3.19) з розділу 3, тобто об'єктом дослідження

буде анізотропне рівняння пористого середовища з абсорбцією.

Означення 4.1. Будемо казати, що слабкий розв'язок u задачі (3.19), (3.20) має усувну особливість в точці $(0, 0)$, якщо інтегральна тотожність (3.23) в означенні 3.4 має місце для функції $\psi \equiv 1$.

Головним результатом даного пункту є така теорема.

Теорема 4.2. Нехай виконані умови (3.21), (3.22) і u невід'ємний слабкий розв'язок задачі (3.19), (3.20). Припустимо, що $f(u) = u^q$ і виконується наступна умова

$$q \geq m + \frac{2}{n},$$

тоді особливість в точці $(0, 0)$ є усувною.

Нехай

$$Q_r = \left\{ (x, t) \in \Omega_T : \left(t^{\frac{\kappa(\lambda)}{\kappa_1(\lambda)}} + \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{\kappa_i(\lambda)}{\kappa_1(\lambda)}} \right)^{\kappa_1(\lambda)} < r, \right\}$$

де $\kappa(\lambda) = \frac{1}{2+(n-\lambda)(m-1)}$, $\kappa_i(\lambda) = \frac{2}{2+(n-\lambda)(m-m_i)}$, $i = \overline{1, n}$, $\lambda = n - \frac{2}{q-m}$.

Для $0 < r < \rho < \frac{R_0}{2}$ ($R_0 : Q_{R_0} \subset \Omega_T$) введемо позначення

$M_u(r) = \sup_{Q_{R_0} \setminus Q_r} u(x, t)$ і $u_{2\rho} = u(x, t) - M_u(2\rho) \leq M_u(\frac{\rho}{2}) - M_u(2\rho)$ для

точок $(x, t) \in Q_{R_0} \setminus Q_{\frac{\rho}{2}}$. Для фіксованого $k > 0$ і $j = 0, 1, \dots$ покладемо

$\rho_j = \frac{\rho}{4} \left(1 + \frac{1}{2^j}\right)$, $k_j = k(1 - 2^{-j})$, $A_{k_j, j} = \{(x, t) \in Q_{\rho_j} : u_{2\rho} > k_j\}$.

Нехай $\zeta_j \in C^\infty(Q_{\frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2}})$, $0 \leq \zeta_j \leq 1$, $\zeta_j = 1$ зовні Q_{ρ_j} , $\zeta_j = 0$ у

$Q_{\rho_{j+1}}$, і $\left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial t} \right| \leq \gamma 2^{j\gamma} \rho^{-\frac{1}{\kappa(\lambda)}}$, $\left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| \leq \gamma 2^{j\gamma} \rho^{-\frac{2}{\kappa_i(\lambda)}}$, $i = \overline{1, n}$. Нехай i_0 таке чи-

сло, що $m_i \leq 1$, $i = 1, \dots, i_0$ і $m_i > 1$, $i = i_0 + 1, \dots, n$, $m' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i_0} m_i$,

$m'' = \frac{1}{n} \sum_{i=i_0+1}^n m_i$. Зауважимо, що $i_0 = 0$, якщо $m_i > 1$, $i = \overline{1, n}$, і $i_0 = n$ у

випадку, коли $m_i \leq 1$, $i = \overline{1, n}$.

В інтегральну тотожність (3.23) підставимо функцію $\varphi = (u_{2\rho} - k_j)_+ \zeta_j^2$ і використаємо умову (3.21):

$$\text{ess sup} \int_{A_{k_j, j}(t)} (u_{2\rho} - k_j)_+^2 \zeta_j dx + \sum_{i=1}^{i_0} M_u^{m_i-1} \left(\frac{\rho}{2}\right) \iint_{A_{k_j, j}} |u_{x_i}|^2 \zeta_j^2 dx + dt$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=i_0+1}^n k_j^{m_i-1} \iint_{A_{k_j,j}} |u_{x_i}|^2 \zeta_j^2 dx dt + \iint_{A_{k_j,j}} (u_{2\rho} - k_j)_+ u^q \zeta_j^2 dx dt \leq \\
& \leq \gamma \left(M_u^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{1}{\kappa(\lambda)}} + \sum_{i=1}^n M_u^{m_i+1} \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{2}{\kappa_i(\lambda)}} \right) |A_{k_j,j}|. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Застосувавши лему 1.2, нерівність Гьольдера і оцінку (4.15), отримаємо

$$\begin{aligned}
Y_{j+1} & = \iint_{A_{k_{j+1},j+1}} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 dx dt \leq \\
& \leq |A_{k_{j+1},j+1}|^{\frac{2}{n+2}} \left(\iint_{A_{k_{j+1},j+1}} ((u_{2\rho} - k_{j+1})_+ \zeta_j)^{2+\frac{4}{n}} dx dt \right)^{\frac{n}{n+2}} \leq \\
& \leq |A_{k_{j+1},j+1}|^{\frac{2}{n+2}} \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \left(\int_{A_{k_{j+1},j+1}(t)} (u_{2\rho} - k_{j+1})_+^2 \zeta_j^2 dx \right)^{\frac{2}{n+2}} \times \\
& \times \left(\int_0^t \prod_{i=1}^n \left(\int_{A_{k_{j+1},j+1}(t)} |((u_{2\rho} - k_{j+1})_+ \zeta_j)_{x_i}|^2 dx \right)^{\frac{1}{n}} d\tau \right)^{\frac{n}{n+2}} \leq \\
& \leq \gamma M_u^{\frac{(1-m')i_0}{n+2}} \left(\frac{\rho}{2} \right) k_{j+1}^{\frac{(1-m'')(n-i_0)}{n+2}} \times \\
& \times \left(M_u^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{1}{\kappa(\lambda)}} + \sum_{i=1}^n M_u^{m_i+1} \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{2}{\kappa_i(\lambda)}} \right) |A_{k_{j+1},j+1}|^{1+\frac{2}{n+2}}.
\end{aligned}$$

З цієї оцінки і очевидної нерівності $(u_{2\rho} - k_j)_+ \geq \frac{k}{2^{j+1}}$, яка справедлива на множині $A_{k_{j+1},j}$, випливає, що

$$\begin{aligned}
Y_{j+1} & \leq \gamma 2^{j\gamma} M_u^{\frac{(1-m')i_0}{n+2}} \left(\frac{\rho}{2} \right) k_{j+1}^{\frac{(1-m'')(n-i_0)}{n+2}} \left(M_u^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{1}{\kappa(\lambda)}} + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^n M_u^{m_i+1} \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{2}{\kappa_i(\lambda)}} \right) Y_j^{1+\frac{2}{n+2}}. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

З леми 1.1 виходить, що

$$(M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{\frac{(m''-1)(n-i_0)}{2} + n+4} \leq \gamma 2^{j\gamma} M_u^{\frac{(1-m')i_0}{n+2}} \left(\frac{\rho}{2} \right) \times$$

$$\times \left(M_u^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{1}{\kappa(\lambda)}} + \sum_{i=1}^n M_u^{m_i+1} \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{2}{\kappa_i(\lambda)}} \right) \iint_{Q_{\frac{\rho}{2}}} u_{2\rho}^2 dx dt. \quad (4.17)$$

Застосувавши нерівність Гьольдера і лему 4.2, отримаємо

$$\begin{aligned} (M_u(\rho) - M_u(2\rho))^{\frac{(m''-1)(n-i_0)}{2} + n+4} &\leq \gamma 2^{j\gamma} M_u^{\frac{(1-m')i_0}{n+2}} \left(\frac{\rho}{2} \right) \times \\ &\times \left(M_u^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{1}{\kappa(\lambda)}} + \sum_{i=1}^n M_u^{m_i+1} \left(\frac{\rho}{2} \right) \rho^{-\frac{2}{\kappa_i(\lambda)}} \right) \times \\ &\times \left\{ F_3(r, \lambda) + (F_1(r, \lambda) + F_2(r, \lambda))^{\frac{1}{2}} F_4^{\frac{1}{2}}(r, \lambda) \right\} |Q_{\frac{\rho}{2}}|^{\frac{q-1}{q+1}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Аналогічно, як у попередньому пункті, отримаємо наступну оцінку

$$M_u(\rho) - M_u(2\rho) \leq 0.$$

Ітеруючи останню нерівність, будемо мати для будь-якого $\rho \leq \frac{R_0}{2}$

$$M_u(\rho) \leq M_u(R_0),$$

що доводить обмеженість розв'язку.

Покажемо, що особливість в точці $(0, 0)$ є усувною. Нехай K компактна підмножина в Ω і $\xi = \begin{cases} 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ 1, & (x, t) \in K \times (0, T) \end{cases}$. В інтегральну тотожність (3.23) підставимо функцію $\varphi = u^{m^-} \xi^2 \psi_r$, $\psi = \psi_r$, використовуючи умову (3.21), нерівність Юнга, обмеженість розв'язку u і переходячи до границі, коли $r \rightarrow 0$, отримаємо

$$\sup_{0 < t < T} \int_K u^{m^-+1} dx + \sum_{i=1}^n \iint_0^T u^{m_i+m^- - 2} |u_{x_i}|^2 dx dt + \iint_{0K} u^{q+m^-} dx dt \leq \gamma. \quad (4.19)$$

Тепер в інтегральну тотожність (3.23) підставимо функцію $\varphi \psi_r$, застосуємо умови (3.21), (4.19), обмеженість розв'язку і переходячи до границі, коли $r \rightarrow 0$, отримаємо виконання інтегральної тотожності (3.23) з довільною функцією $\varphi \in W_{loc}^{1,2}(0, T; L_{loc}^2(\Omega)) \cap L_{loc}^2(0, T; \overset{o}{W}_{loc}^{1,2}(\Omega))$ і $\psi \equiv 1$. Що завершує доведення теореми 4.2.

4.2 Усувність ізольованих особливостей розв'язків анізотропного рівняння пористого середовища з градієнтною абсорбцією

Основний результат підрозділу - це умова усувності ізольованих особливостей анізотропного рівняння пористого середовища з градієнтною абсорбцією (3.34), яке було розглянуто у розділі 3.

Означення 4.2. Будемо казати, що слабкий розв'язок u задачі (3.34), (3.35) має усувну особливість в точці $(0, 0)$, якщо інтегральна тотожність (3.39) в означенні 3.7 має місце для функції $\psi \equiv 1$.

Теорема 4.3. Нехай виконані умови (3.36)-(3.38) і u невід'ємний слабкий розв'язок задачі (3.34), (3.35). Припустимо, що $q = \frac{2+nm}{1+n}$ і $q_i = \frac{2+nm}{1+n+\frac{n}{2}(m-m_i)}$, $i = \overline{1, n}$ тоді особливість в точці $(0, 0)$ є усувною.

4.2.1 Інтегральні оцінки для градієнту розв'язку

Визначимо послідовності чисел для $0 \leq \lambda < n$

$$\kappa(\lambda) = 2 + (n - \lambda)(m - 1), \quad a_i(\lambda) = 1 + \frac{n - \lambda}{2}(m - m_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.20)$$

і покладемо

$$\rho_\lambda(x, t) = \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{a_1(\lambda)}{a_i(\lambda)}} \right)^{\frac{\kappa(\lambda)}{a_1(\lambda)}} + t \right\}^{\frac{1}{\kappa}}, \quad G_\lambda(r) = \{(x, t) \in R^n \times R_+^1 : \rho_\lambda(x, t) < r\}.$$

Припустимо, що $G_\lambda(R_0) \subset \Omega_T$ і для $0 < r < R_0$ позначимо $M_u(r, \lambda) = \sup\{|u(x, t)| : (x, t) \in G_\lambda(R_0) \setminus G_\lambda(r)\}$, $E(r, \lambda) = \{(x, t) \in \Omega_T : u(x, t) > M_u(r, \lambda)\}$, $u_r(x, t, \lambda) = (u(x, t) - M_u(r, \lambda))_+$ і розглянемо функцію $\psi_r(x, t) = \eta_r(\rho_\lambda(x, t))$, де $\eta_r : R^1 \rightarrow R^1$ й приймає наступні значення

$$\eta_r(s) = \begin{cases} 0, & s \leq r \\ 1, & s \geq R(r) \\ \left[(1 - \delta) \ln \ln \frac{1}{r} \right]^{-1} \left(\ln \ln \frac{1}{r} - \ln \ln \frac{1}{s} \right), & r \leq s \leq R(r), \end{cases}$$

де δ число з інтервалу $(0, 1)$ зазначене в рівності, що визначає $R(r)$

$$\ln \frac{1}{R(r)} = \ln^\delta \frac{1}{r}. \quad (4.21)$$

Зауважимо, що в силу очевидних рівностей

$$\frac{q-2}{q(1-m)+2(q-1)} = -\frac{n-\lambda}{\kappa(\lambda)}, \quad \frac{2(q-2)}{(2-m)q+(q-2)m_i} = -\frac{n-\lambda}{a_i(\lambda)}, \quad i = \overline{1, n},$$

з $\lambda \geq 0$ визначеною наступним чином

$$\lambda = \frac{q(1+n)-2-nm}{q-m} \geq 0,$$

оцінка Келлера-Оссермана (3.40) має вигляд

$$M_u(\rho, \lambda) \leq \gamma \rho^{\lambda-n}, \quad \rho > 0. \quad (4.22)$$

Для спрощення наступних записів будемо позначати $M(r)$, $E(r)$ і $u_r(x, t)$ замість $M_u(r, \lambda)$, $E(r, \lambda)$ and $u_r(x, t, \lambda)$.

У випадку, коли $\lambda = 0$, тобто $q = \frac{2+nm}{1+n}$ і $q_i = \frac{2+nm}{1+n+\frac{n}{2}(m-m_i)}$, $i = \overline{1, n}$, зафіксуємо $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ з умов

$$\frac{1}{q_n} < \varepsilon_1 < \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n}\right) \frac{q}{q_n - q}, \quad \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_1 q_n - 1}{q} < \varepsilon_2 < \varepsilon_1,$$

і нехай

$$0 < \frac{\varepsilon_1 q_n - 1}{q \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{n}\right)} < \delta < 1. \quad (4.23)$$

Розглянемо функції $F_1(r, \lambda)$, $F_2(r, \lambda)$, $F_3(r, \lambda)$, які визначаються наступними рівностями

$$F_1(r, \lambda) = \begin{cases} R^\lambda(r), & \text{if } \lambda > 0, \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{2-q_1}, & \text{якщо } \lambda = 0, \end{cases}$$

$$F_2(r, \lambda) = \begin{cases} R^\lambda(r), & \text{якщо } \lambda > 0, \\ \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)q'}, & \text{якщо } \lambda = 0, (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)q' < 1, \\ \ln \ln \frac{1}{r}, & \text{якщо } \lambda = 0, (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)q' = 1, \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{1-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)q'}, & \text{якщо } \lambda = 0, (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)q' > 1. \end{cases}$$

$$F_3(r, \lambda) = \begin{cases} R^\lambda(r), & \text{якщо } \lambda > 0, \\ \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-(1-\delta_1)q_1 - q\delta(\varepsilon_2 - \frac{1}{n})}, & \text{якщо } \lambda = 0, (1 - \varepsilon_1)q_1 < 1, \\ \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{-q\delta(\varepsilon_2 - \frac{1}{n})}, & \text{якщо } \lambda = 0, (1 - \varepsilon_1)q_1 = 1, \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{1-(1-\varepsilon_1)q_1 - q(\varepsilon_2 - \frac{1}{n})}, & \text{якщо } \lambda = 0, (1 - \varepsilon_1)q_1 > 1, \end{cases}$$

де $q' = \frac{q}{q-1}$, $q'_i = \frac{q_i}{q_i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Лема 4.3. *Нехай виконані припущення теореми 4.3, тоді справедливі наступні оцінки*

$$I_0 = \sup_{0 < t < T} \int_{E(\frac{\rho}{2}) \times \{t\}} \int_{M(\frac{\rho}{2})}^u \ln \frac{s}{M(\frac{\rho}{2})} ds \psi_r^l dx + \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{m_i-2} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^l dx dt \leq \gamma (F_1(r, \lambda) +$$

$$+ F_2(r, \lambda) + F_3(r, \lambda)) + \gamma \rho^2 \ln^2 \frac{1}{\rho}. \quad (4.24)$$

Доведення. Підставляючи в інтегральну тотожність (3.39) функцію $\varphi = \ln_+ \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \psi_r^{l-p}$, $\psi = \psi_r$, використовуючи умову (3.36) і нерівність Юнга, отримаємо

$$I_o \leq \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \int_{M(\frac{\rho}{2})}^u \ln \frac{s}{M(\frac{\rho}{2})} ds \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right| \psi_r^{l-1} dx dt +$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} u^{m_i-1} |u_{x_i}| \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right| \psi_r^{l-1} dx dt + \\
& +\gamma \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^m \ln^2 \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \psi_r^l dx dt = I_1 + I_2 + I_3. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Застосувавши формулу (4.22), останній доданок у правій частині нерівності (4.25) оцінюється наступним чином

$$I_3 \leq \gamma \rho^2 \ln^2 \frac{1}{\rho}. \tag{4.26}$$

Якщо $\lambda > 0$, тоді використовуючи нерівність Юнга і формулу (4.22), маємо

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{m_i-2} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt & \leq \gamma \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \left(u - M\left(\frac{\rho}{2}\right) \right) \ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right| \psi_r^{l-1} dx dt + \\
& + \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{m_i} \ln^2 \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right|^2 \psi_r^{l-2} dx dt \leq \gamma \iint_{G_\lambda(R(r))} \rho_\lambda^{\lambda-n-\kappa(\lambda)} dx dt + \\
& + \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{G_\lambda(R(r))} \rho_\lambda^{(\lambda-n)m_i-2a_i(\lambda)} dx dt \leq \gamma \int_0^{R(r)} s^{\lambda-1} ds \leq \gamma R^\lambda(r). \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Якщо $\lambda = 0$, тоді за допомогою нерівності Юнга, отримаємо

$$\begin{aligned}
I_2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^l dx dt & \leq \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{(m_i-1)q'_i} \ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right|^{q'_i} \times \\
& \times \psi_r^{l-q'_i} dx dt \leq \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{G_\lambda(R(r)) \setminus G_\lambda(r)} \rho_0^{-(n(m_i-1)+2a_i(0))q'_i} \left[\ln \frac{1}{\rho_0} \right]^{1-q'_i} dx dt \leq \\
& \leq \gamma \sum_{i=1}^n \int_r^{R(r)} \left[\ln \frac{1}{s} \right]^{1-q'_i} \frac{ds}{s} \leq \gamma F_1(r, \lambda). \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Покладемо $v = \left(\int_{M(\frac{\rho}{2})}^u \ln^a \frac{s}{M(\frac{\rho}{2})} ds \right) \psi_r^{l-1}$, $\rho(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{a_1(0)}{a_i(0)}} \right)^{\frac{1}{a_1(0)}}$, застосувавши нерівність Юнга, матимемо

$$I_1 \leq \gamma \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \left[\ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \right]^{(1-\varepsilon_1)q'} \left[\ln \frac{1}{\rho(x)} \right]^{\varepsilon_2 q'} \rho^{q'}(x) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right|^{q'} dx dt + \\ + \gamma \iint_{E(\frac{\rho}{2})} v^q \rho^{-q}(x) \left[\ln \frac{1}{\rho(x)} \right]^{\varepsilon_2 q} dx dt = I_4 + I_5. \quad (4.29)$$

Використовуючи оцінку типу Келлера-Оссермана (4.22), оцінимо перший член у правій частині попередньої нерівності наступним чином

$$I_4 \leq \gamma \int_r^{R(r)} \left[\ln \frac{1}{s} \right]^{-(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)q'} \frac{ds}{s} \leq \gamma F_2(r, \lambda), \quad (4.30)$$

також тут застосували очевидну рівність $q' - \kappa(0)q' = -2 - nm$.

Другий доданок у правій частині формули (4.29) оцінимо за допомогою нерівності Гьольдера і леми 1.2 з $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$:

$$I_5 \leq \gamma \int_0^T \left(\int_{G_0(R(r))} \rho^{-n}(x) \left[\ln \frac{1}{\rho(x)} \right]^{-\varepsilon_2 n} dx \right)^{\frac{q}{n}} \left(\int_{E(\frac{\rho}{2}) \times \{t\}} v^{\frac{nq}{n-q}} dx \right)^{\frac{n-q}{n}} dt \leq \\ \leq \gamma \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-q(\varepsilon_2 - \frac{1}{n})} \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} |v_{x_i}|^{q_i} dx dt \leq \\ \leq \gamma \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-q(\varepsilon_2 - \frac{1}{n})} \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \ln^{\varepsilon_1 q_i} \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^{(l-1)q_i} dx dt + \\ + \gamma \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-q(\varepsilon_2 - \frac{1}{n})} \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{q_i} \left[\ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} \right]^{\varepsilon_1 q_i} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right|^{q_i} \psi_r^{(l-2)q_i} dx dt.$$

За нашими припущеннями $\varepsilon_1 q_i > 1$, $i = \overline{1, n}$, отже, вибираючи l достатньо великим, використовуючи (4.22), з попередньої нерівності отримаємо

$$I_5 \leq \gamma \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-q(\varepsilon_2 - \frac{1}{n})} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\varepsilon_1 q_n - 1} \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^l dx dt +$$

$$+\gamma \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-q(\varepsilon_2 - \frac{1}{n})} \sum_{i=1}^n \int_r^{R(r)} \left[\ln \frac{1}{s} \right]^{(\varepsilon_1 - 1)q_i} \frac{ds}{s}.$$

Беручи до уваги, що згідно з нашим вибором $\varepsilon_1 q_n - 1 - \delta q (\varepsilon_2 - \frac{1}{n}) < 0$, припускаючи, що стала R_0 достатньо мала, що задовольняє умові

$$\left[\ln \frac{1}{R_0} \right]^{\varepsilon_1 q_n - 1 - \delta q (\varepsilon_2 - \frac{1}{n})} \leq \frac{1}{4\gamma},$$

отримаємо

$$I_5 \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \ln \frac{u}{M(\frac{\rho}{2})} |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^l dx dt + \gamma F_3(r, \lambda). \quad (4.31)$$

Комбінуючи нерівності (4.25)-(4.31), приходимо до необхідної оцінки (4.24). \square

У випадку, коли $\lambda = 0$, тобто $q = \frac{2+nm}{1+n}$ і $q_i = \frac{2+nm}{1+n+\frac{n}{2}(m-m_i)}$, $i = \overline{1, n}$, зафіксуємо числа $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$, обираючи їх з умови $\varepsilon_3 \in (0, 1)$, $\frac{1-\varepsilon_3}{q_1} < \varepsilon_4 < 1$, $\frac{1-\varepsilon_3}{n} < \varepsilon_5 < \frac{1-\varepsilon_3}{q}$, і нехай

$$F_4(r, \lambda) = \begin{cases} R^\lambda(r), & \text{якщо } \lambda > 0, \\ \ln^{-1} \frac{1}{R(r)}, & \text{якщо } \lambda = 0, \end{cases}$$

$$F_5(r, \lambda) = \begin{cases} R^\lambda(r), & \text{якщо } \lambda > 0, \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{1-(1-\varepsilon_5)\bar{q}'}, & \text{якщо } \lambda = 0, \end{cases}$$

$$F_6(r, \lambda) = \begin{cases} R^\lambda(r), & \text{якщо } \lambda > 0, \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-q(\frac{\varepsilon_5}{1-\varepsilon_3} - \frac{1}{n})} (R(r))^{\varepsilon_3 n q_1}, & \text{якщо } \lambda = 0, \end{cases}$$

де $\bar{q} = \frac{q}{1-\varepsilon_3}$, $\bar{q}' = \frac{\bar{q}}{\bar{q}-1}$.

Для $1 < \theta < 1 + \frac{2}{n}$ покладемо $\Phi_\rho(u) = \left((M(\frac{\rho}{2}) - M(2\rho))^{1-\theta} - u_{2\rho}^{1-\theta} \right)_+$.

Лема 4.4. В умовах теореми 4.3 справедлива наступна оцінка

$$\sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u_{2\rho}^{-\theta} u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt + \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \Phi_\rho(u) |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^l dx dt \leq \gamma H_1(r, \rho, \lambda), \quad (4.32)$$

де

$$\begin{aligned} H_1(r, \rho, \lambda) = & \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{1-\theta} \left(F_1(r, \lambda) + F_2(r, \lambda) + F_3(r, \lambda) + \rho^2 \ln^2 \frac{1}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times F_4^{\frac{1}{2}}(r, \lambda) + \left(\sum_{i=1}^n \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_4}{1-\varepsilon_3} q_i - 1} \right)^{\frac{1-\varepsilon_3}{q-1+\varepsilon_3}} F_5(r, \lambda) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_4 q_i}{1-\varepsilon_3}} \left(\sum_{i=1}^n \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_4 q_i}{1-\varepsilon_3} - 1} \right)^{-1} F_6(r, \lambda) + \\ & + \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{2(1-\theta)} \rho^{2+n-\theta n+\lambda\theta}. \end{aligned}$$

Доведення. Підставимо в інтегральну тотожність (3.39) пробну функцію $\varphi = \Phi_\rho(u) \psi_r^{l-p}$, $\psi = \psi_r$ і використаємо умову (3.36)

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < T} \int_{E_{\frac{\rho}{2}} \times \{t\}} \int_{M(\frac{\rho}{2})}^u \Phi_\rho(s) ds \psi_r^l dx + \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u_{2\rho}^{-\theta} u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt + \\ & + \sum_{i=1}^n \iint_{E_{\frac{\rho}{2}}} \Phi_\rho(u) |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^l dx dt \leq \gamma \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \int_{M(\frac{\rho}{2})}^u \Phi_\rho(s) ds \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right| \psi_r^{l-1} dx dt + \\ & + \gamma \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{1-\theta} \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{m_i-1} |u_{x_i}| \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right| \psi_r^{l-1} dx dt + \\ & + \gamma \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{1-\theta} \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \psi_r^l dx dt = \\ & = I_6 + \gamma \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{1-\theta} (I_7 + I_8). \quad (4.33) \end{aligned}$$

З оцінки типу Келлера-Оссермана (4.22), нерівності Гьольдера і леми 4.3 виводимо, що

$$I_7 \leq \sum_{i=1}^n \left(\iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{m_i-2} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{m_i} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \gamma \left(F_1(r, \lambda) + F_2(r, \lambda) + F_3(r, \lambda) + \rho^2 \ln^2 \frac{1}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} F_4^{\frac{1}{2}}(r, \lambda). \quad (4.34)$$

Завдяки нашому вибору θ маємо

$$\left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{1-\theta} I_8 - \frac{1}{4\gamma} \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u_{2\rho}^{-\theta} u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt \leq \\ \leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{2(1-\theta)} \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{\theta+m-1} \psi_r^l dx dt \leq \\ \leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{2(1-\theta)} \iint_{G_\lambda(2\rho) \setminus G_\lambda(r)} \rho_\lambda^{-(n-\lambda)(\theta+m-1)} dx dt \leq \\ \leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{2(1-\theta)} \int_r^{2\rho} s^{-(n-\lambda)(\theta+m-1)+2+(n-\lambda)(m-1)+n} \frac{ds}{s} \leq \\ \leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{2(1-\theta)} \rho^{2+n-\theta n+\lambda\theta}. \quad (4.35)$$

Якщо $\lambda > 0$, тоді з (4.22)

$$I_6 \leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{1-\theta} \iint_{G_\lambda(R(r)) \setminus G_\lambda(r)} \rho_\lambda^{\lambda-n-\kappa(\lambda)} \ln^{-1} \frac{1}{\rho_\lambda} dx dt \leq \\ \leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{1-\theta} R^\lambda(r). \quad (4.36)$$

Якщо $\lambda = 0$, покладемо $w = \left(\int_{M_{\frac{\rho}{2}}}^u \Phi_\rho^{\varepsilon_4}(s) s^{-\varepsilon_3} ds \right)_+ \psi_r^{l-1}$, тоді з нерівності

Юнга отримаємо

$$I_6 \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_4}{1-\varepsilon_3} q_i - 1} \right)^{\frac{1-\varepsilon_3}{q-1+\varepsilon_3}} \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{\varepsilon_3 \bar{q}'} (\rho(x))^{(1-\varepsilon_3)\bar{q}'} \left[\ln \frac{1}{\rho(x)} \right]^{\varepsilon_5 \bar{q}'} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right|^{\bar{q}'} dxdt + \gamma \left(\sum_{i=1}^n \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_4}{1-\varepsilon_3} q_i - 1} \right)^{-1} \iint_{E(\frac{\rho}{2})} w^{\bar{q}} \rho^{-q}(x) \times \\
& \times \left[\ln \frac{1}{\rho(x)} \right]^{-\varepsilon_5 \bar{q}} dxdt = I_9 + I_{10}. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

За допомогою (4.22) перший доданок у правій частині (4.37) оцінимо наступним чином

$$\begin{aligned}
I_9 & \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_4}{1-\varepsilon_3} q_i - 1} \right)^{\frac{1-\varepsilon_3}{q-1+\varepsilon_3}} \int_r^{R(r)} \left[\ln \frac{1}{s} \right]^{-(1-\varepsilon_5)\bar{q}'} \frac{ds}{s} \leq \\
& \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_4}{1-\varepsilon_3} q_i - 1} \right)^{\frac{1-\varepsilon_3}{q-1+\varepsilon_3}} F_5(r, \lambda), \tag{4.38}
\end{aligned}$$

також тут використали очевидну нерівність $(n\varepsilon_3 - 1 + \varepsilon_3 + \kappa(0))\bar{q}' = 2 + nm$.

Другий доданок у правій частині формули (4.37) оцінимо, використовуючи нерівність Гьольдера та лему 1.2 з $\alpha_i = \frac{\varepsilon_3}{1-\varepsilon_3} q_i$, $i = \overline{1, n}$, і обираючи l достатньо великим, матимемо

$$\begin{aligned}
I_{10} & \sum_{i=1}^n \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_4}{1-\varepsilon_3} q_i - 1} \leq \\
& \leq \gamma \int_0^T \left(\int_{G_0(R(r)) \times \{t\}} \rho^{-n}(x) \left[\ln \frac{1}{\rho(x)} \right]^{-\frac{\varepsilon_5 n}{1-\varepsilon_3}} dx \right)^{\frac{q}{n}} \left(\int_{E(\frac{\rho}{2}) \times \{t\}} w^{\frac{n\bar{q}}{n}} dx \right)^{\frac{n-q}{n}} dt \leq \\
& \leq \gamma \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-q \left(\frac{\varepsilon_5}{1-\varepsilon_3} - \frac{1}{n} \right)} \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} (\Phi_\rho(u))^{\frac{\varepsilon_4 q_i}{1-\varepsilon_3}} |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^l dxdt + \\
& + \gamma \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-q \left(\frac{\varepsilon_5}{1-\varepsilon_3} - \frac{1}{n} \right)} \sum_{i=1}^n \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_4 q_i}{1-\varepsilon_3}} \iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{(1-\varepsilon_3)q_i} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right|^{q_i} dxdt.
\end{aligned}$$

З обраними сталими $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$, використовуючи нерівність $(n + a_i(0))q_i = 2 + nm$ і обираючи R_0 з умови

$$\left[\ln \frac{1}{R_0} \right]^{-q \left(\frac{\varepsilon_5}{1-\varepsilon_3} - \frac{1}{n} \right)} \leq \frac{1}{4\gamma},$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
I_{10} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2})} \Phi_{\rho}(u) |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^l dx dt &\leq \\
&\leq \gamma \sum_{i=1}^n \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_4 q_i}{1-\varepsilon_3}} \left(\sum_{i=1}^n \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_4 q_i}{1-\varepsilon_3} - 1} \right)^{-1} F_6(r, \lambda). \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Комбінуючи нерівності (4.33)-(4.39), приходимо до шуканої оцінки (4.32). \square

Визначимо функцію $u^{(\rho)}(x, t)$ і множину $E(\frac{\rho}{2}, 2\rho)$ наступним чином $u^{(\rho)} = \min(M(\frac{\rho}{2}) - M(2\rho), u_{2\rho})$, $E(\frac{\rho}{2}, 2\rho) = E(2\rho) \cap \{u < M(\frac{\rho}{2})\}$.

Лема 4.5. *За припущеннями теореми 4.3 має місце нерівність*

$$\begin{aligned}
\sup_{0 < t < R_0^{\kappa(\lambda)}} \int_{E(\frac{\rho}{2}, 2\rho) \times \{t\}} u_{2\rho}^2 dx + \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2}, 2\rho)} u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 dx dt + \\
+ \sum_{i=1}^n \iint_{E(2\rho)} u^{(\rho)} |u_{x_i}|^{q_i} dx dt \leq \gamma \rho^{2-n+2\lambda}. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Доведення. В інтегральну тотожність (3.39) підставимо пробну функцію $\varphi = u^{(\rho)} \psi_r^{l-p}$, $\psi = \psi_r$ та використаємо структурні нерівності (3.36):

$$\begin{aligned}
\sup_{0 < t < R_0^{\kappa(\lambda)}} \int_{E(\frac{\rho}{2}, 2\rho) \times \{t\}} u_{2\rho}^2 \psi_r^l dx + \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2}, 2\rho)} u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt + \\
+ \sum_{i=1}^n \iint_{E(2\rho)} u^{(\rho)} |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^l dx dt \leq \gamma \iint_{E(2\rho)} u^{(\rho)} u_{2\rho} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right| \psi_r^{l-1} dx dt + \\
+ \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E(2\rho)} u^{(\rho)} u^{m_i-1} |u_{x_i}| \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right| \psi_r^{l-1} dx dt + \\
+ \gamma \iint_{E(2\rho)} u^{\frac{m-1}{2}} u^{(\rho)} \left(\sum_{i=1}^n u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \psi_r^l dx dt = I_{11} + I_{12} + I_{13}. \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Застосувавши нерівності Гьольдера і Юнга, леми 4.3, 4.4 матимемо

$$\begin{aligned}
I_{12} + I_{13} - \frac{1}{4} \iint_{E(\frac{\rho}{2}, 2\rho)} u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt &\leq \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2}, 2\rho)} u^{m_i+1} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right|^2 \psi_r^{l-2} dx dt + \\
&+ \gamma \iint_{E(\frac{\rho}{2}, 2\rho)} u^{m+1} \psi_r^l dx dt + \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right) \sum_{i=1}^n \left(\iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{m_i-2} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left(\iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{m_i} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} + \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right) \times \\
&\times \sum_{i=1}^n \left(\iint_{E(\frac{\rho}{2})} u_{2\rho}^{-\theta} u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{E(\frac{\rho}{2})} u^{\theta+m-1} \psi_r^l dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \gamma \sum_{i=1}^n M^{m_i+1} \left(\frac{\rho}{2} \right) R^{nm_i}(r) + \gamma \rho^{2-n+2\lambda} + \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right) \times \\
&\times \left(F_1(r, \lambda) + F_2(r, \lambda) + F_3(r, \lambda) + \rho^2 \ln \frac{1}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times F_4^{\frac{1}{2}}(r, \lambda) + \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right) H_1^{\frac{1}{2}}(r, \rho, \lambda) \rho^{\frac{2+n-\theta n+\lambda \theta}{2}}. \quad (4.42)
\end{aligned}$$

Оцінимо перший доданок у правій частині нерівності (4.41). Якщо $\lambda > 0$, тоді

$$\begin{aligned}
I_{11} &\leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right) \iint_{G_\lambda(R(r))} \rho_\lambda^{\lambda-n-\kappa(\lambda)} \ln^{-1} \frac{1}{\rho_\lambda} dx dt \leq \\
&\leq \gamma \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right) R^\lambda(r). \quad (4.43)
\end{aligned}$$

Якщо $\lambda = 0$, покладемо $\omega = (u(\rho))^{\frac{1-\varepsilon_3}{q_1}} u^{1-\varepsilon_3} \psi_r^{l-1}$, де $\varepsilon_3 \in (0, 1)$ довільне число. Застосуємо нерівність Юнга

$$I_{11} \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\frac{q_i}{q_1}-1} \right)^{\frac{1-\varepsilon_3}{q-1+\varepsilon_3}} \iint_{E(2\rho)} (u(\rho))^{\varepsilon_3 q'} u_{2\rho}^{\varepsilon_3 q'} (\rho(x))^{(1-\varepsilon_3)q'} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\ln \frac{1}{\rho(x)} \right]^{\varepsilon_5 \bar{q}'} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right|^{\bar{q}'} dxdt + \gamma \left(\sum_{i=1}^n \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\frac{q_i}{q_1} - 1} \right)^{-1} \times \\ & \times \iint_{E(2\rho)} \omega^{\bar{q}} \rho^{-q}(x) \left[\ln \frac{1}{\rho(x)} \right]^{-\varepsilon_5 \bar{q}} dxdt = I_{14} + I_{15}. \end{aligned}$$

Сталі ε_5, \bar{q} і \bar{q}' визначені у лемі 4.4. Перший доданок у правій частині попередньої нерівності ми оцінили як у (4.38):

$$I_{14} \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\frac{q_i}{q_1} - 1} \right)^{\frac{1-\varepsilon_3}{q-1+\varepsilon_3}} \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\varepsilon_3 \bar{q}'} F_5(r, \lambda). \quad (4.44)$$

Щоб оцінити другий доданок у правій частині попередньої нерівності, застосуємо нерівність Гьольдера і лему 1.2 з $\alpha_i = \frac{\varepsilon_3}{1-\varepsilon_3} q_i$, $i = \overline{1, n}$ та оберемо достатньо велике l , тоді отримаємо

$$\begin{aligned} I_{15} \sum_{i=1}^n \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\frac{q_i}{q_1} - 1} & \leq \gamma \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-q \left(\frac{\varepsilon_5}{1-\varepsilon_3} - \frac{1}{n} \right)} \sum_{i=1}^n \iint_{E(2\rho)} (u^{(\rho)})^{\frac{q_i}{q_1}} \times \\ & \times |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^l dxdt + \gamma \left(\ln \frac{1}{R(r)} \right)^{-q \left(\frac{\varepsilon_5}{1-\varepsilon_3} - \frac{1}{n} \right)} \sum_{i=1}^n \iint_{E(2\rho)} (u^{(\rho)})^{\frac{\varepsilon_3 q_i}{q_1}} u^{\varepsilon_3 q_i} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} \right|^{q_i} dxdt. \end{aligned}$$

Тепер обираючи R_0 достатньо малим, щоб виконувалась нерівність $\left[\ln \frac{1}{R_0} \right]^{-q \left(\frac{\varepsilon_5}{1-\varepsilon_3} - \frac{1}{n} \right)} \leq \frac{1}{4\gamma}$, будемо мати

$$\begin{aligned} I_{15} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \iint_{E(2\rho)} u^{(\rho)} |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^l dxdt & \leq \gamma \left(\sum_{i=1}^n \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\frac{q_i}{q_1} - 1} \right)^{-1} \times \\ & \times \sum_{i=1}^n \left(M \left(\frac{\rho}{2} \right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_3 q_i}{q_1}} \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-q \left(\frac{\varepsilon_5}{1-\varepsilon_3} - \frac{1}{n} \right) - q_1} (R(r))^{n(1-\varepsilon_3)q_1}. \quad (4.45) \end{aligned}$$

Об'єднуючи нерівності (4.41)-(4.45), приходимо до оцінки

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < R_0^{\kappa(\lambda)}} \int_{E(\frac{\rho}{2}, 2\rho)} u_{2\rho}^2 \psi_r^l dx + \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2}, 2\rho)} u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 \psi_r^l dxdt + \\ & + \sum_{i=1}^n \iint_{E(2\rho)} u^{(\rho)} |u_{x_i}|^{q_i} \psi_r^l dxdt \leq \gamma (R(r))^{nm_1} \sum_{i=1}^n M^{m_i+1} \left(\frac{\rho}{2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma F_5(r, \lambda) \left(\sum_{i=1}^n \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{\frac{q_i}{q_1} - 1} \right)^{\frac{1-\varepsilon_3}{q-1+\varepsilon_3}} \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{\varepsilon_3 q'} + \\
& +\gamma \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-q\left(\frac{\varepsilon_5}{1-\varepsilon_3} - \frac{1}{n}\right) - q_1} (R(r))^{n(1-\varepsilon_3)q_1} \left(\sum_{i=1}^n \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{\frac{q_i}{q_1} - 1} \right)^{-1} \times \\
& \times \sum_{i=1}^n \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{\frac{\varepsilon_3 q_i}{q_1}} + \gamma \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right) (F_1(r, \lambda) + F_2(r, \lambda) + \\
& + F_3(r, \lambda) + \rho^2 \ln^2 \frac{1}{\rho})^{\frac{1}{2}} F_4^{\frac{1}{2}}(r, \lambda) + \\
& + \gamma \left(M\left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right) H_1^{\frac{1}{2}}(r, \rho, \lambda) \rho^{\frac{2+n-\theta n+\theta \lambda}{2}} + \gamma \rho^{2-n+2\lambda}. \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Будемо переходити до границі у нерівності (4.46), коли $r \rightarrow 0$. Маємо, що $\lim_{r \rightarrow 0} F_1(r, \lambda) F_4(r, \lambda) = \lim_{r \rightarrow 0} F_5(r, \lambda) = \lim_{r \rightarrow 0} F_6(r, \lambda) = 0$. Використовуючи нерівність (4.21) виводимо, що для $\lambda = 0$ і $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)q' \leq 1$ справедливі наступні співвідношення

$$F_2(r, 0) F_4(r, 0) = \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)q'} \ln^{-1} \frac{1}{R(r)} = \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)q' - \delta}.$$

Аналогічно для $\lambda = 0$ і $(1 - \varepsilon_1)q_1 \leq 1$, маємо

$$F_3(r, 0) F_4(r, 0) = \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-(1-\varepsilon_1)q_1 - q\delta\left(\varepsilon_2 - \frac{1}{n}\right) - \delta}.$$

Обираючи δ з умови

$$\max \left(\frac{1}{2}, 1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)q', 1 - (1 - \varepsilon_1)q_1, \frac{\varepsilon_1 q_n - 1}{q \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{n} \right)} \right) < \delta < 1,$$

перейдемо тепер до границі, коли $r \rightarrow 0$, у формулі (4.46) і використаємо нерівність (4.22), що завершує доведення леми 4.5. \square

4.2.2 Поточкові оцінки розв'язків

Покладемо $I' = \{i = \overline{1, i_0} : m_i \leq 1\}$, $I'' = \{i = \overline{i_0 + 1, n} : m_i > 1\}$, $m' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i_0} m_i$, $m'' = \frac{1}{n} \sum_{i=i_0+1}^n m_i$ і $i_0 = 0$, якщо I' пуста множина, $i_0 = n$, якщо I'' пуста множина. Нехай $(\bar{x}, \bar{t}) \in G_\lambda(R_0) \setminus G_\lambda(\rho)$ довільна точка,

аналогічно як (4.17), використовуючи ітераційну техніку Де Джорджі, доводимо наступну оцінку

$$(u(\bar{x}, \bar{t}) - M(2\rho))_+^{4+n-(1-m'')\frac{n}{2}} \leq \gamma M^{(1-m')\frac{n}{2}} \left(\frac{\rho}{2}\right) \times \\ \times \left(\frac{M^2 \left(\frac{\rho}{2}\right)}{\rho^{\kappa(\lambda)}} + \sum_{i=1}^n \frac{M^{m_i+1} \left(\frac{\rho}{2}\right)}{\rho^{2a_i(\lambda)}} \right)^{\frac{n+2}{2}} \iint_{Q_{\frac{\rho}{2}, \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\kappa(\lambda)}}(\bar{x}, \bar{t})} u_{2\rho}^2 dx dt,$$

де $Q_{\rho, \rho^{\kappa(\lambda)}}(\bar{x}, \bar{t}) = B_\rho(\bar{x}) \times (\bar{t} - \rho^{\kappa(\lambda)}, \bar{t} + \rho^{\kappa(\lambda)})$.

Оскільки (\bar{x}, \bar{t}) довільна точка множини $G_\lambda(R_0) \setminus G_\lambda(\rho)$, використовуючи нерівність (4.22), отримаємо

$$\left(M \left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \right)^{4+n-(1-m'')\frac{n}{2}} \leq \gamma \rho^{-(n-\lambda)(1-m')\frac{n}{2} - (2+(n-\lambda)(m+1))\frac{n+2}{2}} \iint_{Q_{\frac{\rho}{2}, \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\kappa(\lambda)}}(\bar{x}, \bar{t})} u_{2\rho}^2 dx dt.$$

Отже $u_{2\rho} \leq u^{(\rho)}$ на $G_\lambda(R_0) \setminus G_\lambda(\frac{\rho}{2})$, за допомогою леми 1.2 з $\alpha_i = 2\frac{m_i - m_1}{m_1 + 1} \geq 0$, $i = \overline{1, n}$ і леми 4.5, приходимо до оцінки

$$\iint_{Q_{\frac{\rho}{2}, \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\kappa(\lambda)}}(\bar{x}, \bar{t})} u_{2\rho}^2 dx dt \leq \gamma \rho^{2-(n-\lambda)(1-m)} \sum_{i=1}^n \iint_{E(\frac{\rho}{2}, 2\rho)} u^{m_i-1} |u_{x_i}|^2 dx dt \leq \\ \leq \gamma \rho^{4-n-(n-\lambda)(1-m)+2\lambda}.$$

Комбінуючи останні дві нерівності, отримаємо оцінку

$$M \left(\frac{\rho}{2}\right) - M(2\rho) \leq \gamma \rho^{-n+\lambda+\lambda_0},$$

$$\text{з } \lambda_0 = \frac{2}{4+n-(1-m'')\frac{n}{2}} > 0.$$

Ітеруючи останню нерівність, приходимо до такого результату.

Теорема 4.4. *Нехай виконані всі умови теореми 4.3. Тоді*

$$M_u(\rho, \lambda) \leq \gamma \rho^{-n+\lambda+\lambda_0}. \quad (4.47)$$

4.2.3 Обмеженість розв'язків

Нехай $\xi_r := \xi_r(x, t) \in C^\infty(R_+^{n+1})$, $\xi_r = 0$ для $\rho_\lambda(x, t) \leq r$, $\xi_r = 0$ для $\rho_\lambda(x, t) \geq 2r$, $0 \leq \xi_r \leq 1$ і $\left| \frac{\partial \xi_r}{\partial t} \right| \leq \gamma r^{-\kappa(\lambda)}$, $\left| \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right| \leq \gamma r^{a_i(\lambda)}$, $i = \overline{1, n}$. Для $j = 0, 1, 2, \dots$, покладемо $\rho_j = \frac{R_0}{2}(1 + 2^{-j})$, $\bar{\rho}_j = \frac{1}{2}(\rho_j + \rho_{j+1})$, $k_j = k(1 - 2^{-j})$, $\bar{k}_j = \frac{1}{2}(k_j + k_{j+1})$, $A_{k_j, \rho_j} = G_\lambda(\rho_j) \cap \{u > k_j\}$, де k додатня стала, яка буде визначена нижче. Нехай $\varphi_j \in C_0^\infty(G_\lambda(\bar{\rho}_j))$, $\varphi_j = 1$ у $G_\lambda(\rho_j)$, $0 \leq \varphi_j \leq 1$, і $\left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \right| \leq \gamma 2^{j\gamma} R_0^{-\kappa(\lambda)}$, $\left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| \leq \gamma 2^{j\gamma} R_0^{a_i(\lambda)}$, $i = \overline{1, n}$.

В інтегральну тотожність (4.39) підставимо функцію $\varphi = (u^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon)_+ \varphi_j^l \xi_r^{l-p}$, $\psi = \xi_r$, де $\varepsilon > 0$ достатньо мала стала, що буде визначена пізніше. Використовуючи умову (4.36) і нерівність Юнга, матимемо

$$\begin{aligned}
& \sup_{0 < t < R_0^{\kappa(\lambda)}} \int_{A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j} \times \{t\}} \int_{\bar{k}_j}^u (s^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon) ds \varphi_j^l \xi_r^l dx + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j}} u^{m_i + \varepsilon - 2} |u_{x_i}|^2 \varphi_j^l \xi_r^l dx dt + \\
& + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j}} (u^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon)_+ |u_{x_i}|^{q_i} \varphi_j^l \xi_r^l dx dt \leq \gamma \iint_{A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j}} \int_{\bar{k}_j}^u (s^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon) ds \left| \frac{\partial \xi_r}{\partial t} \right| \varphi_j^l \xi_r^{l-1} dx dt + \\
& + \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j}} u^{m_i - \varepsilon} (u^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon)_+^2 \left| \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right|^2 \varphi_j^l \xi_r^{l-2} dx dt + \\
& + \gamma \iint_{A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j}} \int_{\bar{k}_j}^u (s^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon) ds \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \right| \varphi_j^{l-1} \xi_r^l dx dt + \gamma \sum_{i=1}^n \iint_{A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j}} u^{m_i - \varepsilon} (u^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon)_+^2 \times \\
& \times \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^2 \varphi_j^{l-2} \xi_r^l dx dt + \gamma \iint_{A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j}} u^{m_i - \varepsilon} (u^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon)_+^2 \varphi_j^l \xi_r^l dx dt. \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Оцінимо перших два доданки у правій частині нерівності (4.48), застосувавши теорему 4.4, маємо

$$\iint_{A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j}} \int_{\bar{k}_j}^u (s^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon) ds \left| \frac{\partial \xi_r}{\partial t} \right| \varphi_j^l \xi_r^{l-1} dx dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \iint_{A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j}} u^{m_i - \varepsilon} (u^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon)_+^2 \left| \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right|^2 \varphi_j^l \xi_r^{l-2} dx dt \leq \gamma r^{\lambda_0(\varepsilon+1) - \varepsilon n} + \gamma r^{\lambda_0(m_1 + \varepsilon) - \varepsilon n}.$$

Покладемо $m_* = \max \left(m_n, \max_{1 \leq i \leq n} q_i \right) + \varepsilon$, $q_* = (\varepsilon + 1) \frac{q}{n} + q + \varepsilon$, якщо $0 < \varepsilon < \frac{\lambda_0 m^-}{n}$, тоді з очевидних нерівностей $u \leq \gamma 2^{j\gamma} (u^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon)_+^{\frac{1}{\varepsilon}}$, які виконуються на множині $A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j}$, $(u^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon)_+ \leq (u - \bar{k}_j)_+^\varepsilon$ і $(u - k_{j+1})_+ \leq \gamma (u^\varepsilon - k_{j+1}^\varepsilon)_+^{\frac{1}{\varepsilon}} + \gamma k_{j+1}^{1-\varepsilon} (u^\varepsilon - k_{j+1}^\varepsilon)_+ \leq \gamma (u^\varepsilon - k_{j+1}^\varepsilon)_+^{\frac{1}{\varepsilon}} + \gamma 2^{j\gamma} (u^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon)_+^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$ $(u^\varepsilon - k_{j+1}^\varepsilon)_+ \leq \gamma 2^{j\gamma} (u^\varepsilon - \bar{k}_j^\varepsilon)_+^{\frac{1}{\varepsilon}}$, переходячи до границі, коли $r \rightarrow 0$, у формулі (4.48), приходимо до наступної нерівності

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < R_0^{\kappa(\lambda)}} \int_{A_{k_{j+1}, \bar{\rho}_j} \times \{t\}} (u - k_{j+1})_+^{\varepsilon+1} \varphi_j^l dx + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{\rho}_j}} (u - k_{j+1})_+^\varepsilon |u_{x_i}|^{q_i} \varphi_j^l dx dt \leq \\ & \leq \gamma R_0^{-\gamma} 2^{j\gamma} \left(\iint_{A_{k_j, \rho_j}} (u - k_j)_+^{m_*} dx dt + |A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j}| \right). \end{aligned}$$

З цього, використовуюючи лему 1.2 з $\alpha_i = \varepsilon > 0, i = \overline{1, n}$, отримаємо

$$\begin{aligned} Y_{j+1} &= \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{\rho}_{j+1}}} (u - k_{j+1})_+^{m_*} dx dt \leq \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{\rho}_j}} (u - k_{j+1})_+^{m_*} \varphi_j^{lm_*} dx dt \leq \\ & \leq \gamma \left(\iint_{A_{k_{j+1}, \bar{\rho}_{j+1}}} (u - k_{j+1})_+^{q_*} \varphi_j^{lq_*} dx dt \right)^{\frac{m_*}{q_*}} |A_{k_{j+1}, \bar{\rho}_j}|^{1 - \frac{m_*}{q_*}} \leq \\ & \leq \left(\sup_{0 < t < R_0^{\kappa(\lambda)}} \int_{A_{k_{j+1}, \bar{\rho}_j} \times \{t\}} (u - k_{j+1})_+^{\varepsilon+1} \varphi_j^l dx \right)^{\frac{m_* q}{n q_*}} |A_{k_{j+1}, \bar{\rho}_j}|^{1 - \frac{m_*}{q_*}} \times \\ & \times \left(\sum_{i=1}^n \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{\rho}_j}} (u - k_{j+1})_+^\varepsilon |u_{x_i}|^{q_i} \varphi_j^l dx dt + \sum_{i=1}^n \iint_{A_{k_{j+1}, \bar{\rho}_j}} (u - k_{j+1})_+^{\varepsilon+q_i} \times \right. \\ & \times \left. \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^{q_i} \varphi_j^{l-q_i} dx dt \right)^{\frac{m_*}{q_*}} \leq \gamma R_0^{-\gamma} 2^{j\gamma} \left(y_j + |A_{\bar{k}_j, \bar{\rho}_j}| \right)^{\frac{m_* q}{n q_*} + \frac{m_*}{q_*}} |A_{k_{j+1}, \bar{\rho}_j}|^{1 - \frac{m_*}{q_*}} \leq \\ & \leq \gamma R_0^{-\gamma} 2^{j\gamma} k^{-m_* \left(1 - \frac{m_*}{q_*}\right)} (1 + k^{-m_*})^{\frac{m_* q}{n q_*} + \frac{m_*}{q_*}} Y_j^{1 + \frac{m_* q}{n q_*}}. \end{aligned}$$

За допомогою леми 1.1 про геометричну збіжність послідовності чисел отримаємо, що з останньої нерівності виходить, що $y_j \rightarrow 0$, коли $j \rightarrow \infty$, якщо k задовольняє умові $k^{m_* + \frac{nq_*}{q}} = \gamma R_0^{-\gamma} y_0 + 1$, що означає

$$\text{ess sup} \left\{ u : (x, t) \in G_\lambda \left(\frac{R_0}{2} \right) \right\} \leq \gamma R_0^{-\gamma} \left(\iint_{G_\lambda(R_0)} u^{m_*} dx dt \right)^{\frac{1}{m_* + \frac{nq_*}{q}}} + \gamma.$$

Якщо $0 < \varepsilon < \frac{\lambda_0 m_1}{n}$, тоді інтеграл у правій частині останньої нерівності скінченний, що завершує доведення обмеженості розв'язку u на всій множині $G_\lambda \left(\frac{R_0}{2} \right)$.

4.2.4 Кінець доведення теореми 4.3

Нехай $\varsigma \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \overset{o}{W}^{1,2}(\Omega))$ довільна функція, в інтегральну тотожність (4.39) підставимо функцію $\varphi = (u + \varepsilon)^{m^- - 1} \varsigma \psi_r^{l-p}$, $\psi = \psi_r$, використаємо структурні нерівності (4.36), нерівність Юнга, обмеженість розв'язку u і перейдемо до границі, коли $r \rightarrow 0$ і $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} \int_{\Omega} u^{1+m^-} \varsigma dx + \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} u^{m_i + m^- - 2} |u_{x_i}|^2 \varsigma dx dt &\leq \\ &\leq \gamma \iint_{\Omega_T} \left(1 + |\varsigma_t| + \sum_{i=1}^n |\varsigma_{x_i}|^2 \right) dx dt. \end{aligned}$$

Тепер підставимо в інтегральну тотожність (4.39) функцію $\varphi = \varsigma \psi_r^{l-p}$, $\psi = \psi_r$, застосувавши умову (4.36), попередню нерівність і обмеженість розв'язку u , перейдемо до границі, коли $r \rightarrow 0$, і отримаємо

$$\sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_T} |u_{x_i}|^{q_i} \varsigma dx dt \leq \gamma \iint_{\Omega_T} \left(1 + |\varsigma_t| + \sum_{i=1}^n |\varsigma_{x_i}|^2 \right) dx dt.$$

З цього, тестуючи інтегральну тотожність (4.39) функцією $\psi = \psi_r$, використовуючи обмеженість розв'язку, і переходячи до границі, коли $r \rightarrow 0$, отримаємо, що інтегральна тотожність (4.39) справедлива для довільної функції $\varphi \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \overset{o}{W}^{1,2}(\Omega))$ і $\psi \equiv 1$. Отже, теорема 4.3 доведена.

Висновки до розділу 4

У розділі 4 розглядається питання усувності ізольованої особливості для розв'язків рівнянь, які розглянуті в попередньому розділі. У першому підрозділі розглянуто анізотропне рівняння пористого середовища з абсорбційним членом вигляду u^q . У другому підрозділі розглядається анізотропне рівняння пористого середовища з градієнтною абсорбцією. Результати дослідження з розділу 3, а саме оцінки типу Келлера-Оссермана, застосовуються для отримання основних результатів цього розділу, сформулюємо їх:

- отримана умова усувності ізольованих особливостей для анізотропного рівняння пористого середовища зі степеневою функцією у якості абсорбції (теорема 4.1);
- отримана умова усувності ізольованих особливостей для розв'язків анізотропного рівняння пористого середовища з абсорбційним членом вигляду u^q (теорема 4.2);
- отримана умова усувності ізольованих особливостей для розв'язків анізотропного рівняння пористого середовища з градієнтним абсорбційним членом (теорема 4.3).

Основні результати опубліковані у роботах [80], [81], [82].

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків дивергентних нелінійних анізотропних параболічних рівнянь в околі сингулярної точки. Дана задача ускладнюється тим, що загальна якісна теорія для анізотропних еліптичних і параболічних рівнянь не побудована. Крім того, точний вигляд фундаментального розв'язку для таких рівнянь невідомий. Але незважаючи на це, були встановлено умови усувності особливості для анізотропних параболічних рівнянь і для таких рівнянь з абсорбцією та градієнтною абсорбцією, які були отримані за допомогою метода І. В. Скрипніка точних поточкових оцінок розв'язків типу "нелінійного потенціалу", запропонованого ним для еліптичних дивергентних квазілінійних рівнянь та адаптованого в поданій роботі для анізотропних параболічних рівнянь.

Модельними випадками рівнянь, які досліджені, є анізотропне рівняння пористого середовища та це ж рівняння з абсорбцією та градієнтною абсорбцією. В дисертаційній роботі вдалося знайти універсальний підхід в дослідженнях властивостей розв'язків анізотропного рівняння пористого середовища, який не залежить від значень показників анізотропії.

Окремої уваги заслуговують оцінки типу Келлера-Оссермана, які описані в розділі 3. Вони мають багато застосувань, у даній роботі використані для отримання умов усувності особливостей для рівнянь з абсорбційним членом. Ці оцінки також відіграють важливу роль в теорії великих розв'язків, а саме їх застосовують для доведення існування або неіснування таких розв'язків. Ще за допомогою оцінок типу Келлера-Оссермана можна отримати нерівність типу Гарнака, як це було зроблено в розділі 3.

Всі отримані результати у дисертаційній роботі є новими, сформулюємо найбільш важливі з них:

- отримано достатню умову усувності ізольованих особливостей для

розв'язків анізотропних параболічних рівнянь;

- отримано оцінки типу Келлера-Оссермана для подвійно нелінійного анізотропного параболічного рівняння з абсорбційним членом, який залежить тільки від розв'язку;
- отримано оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропних параболічних рівнянь з абсорбційним членом $f(u)$;
- отримано оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропних параболічних рівнянь з градієнтною абсорбцією;
- доведено нерівність Гарнака зі сталою, яка не залежить від розв'язку, для нелінійного параболічного рівняння з абсорбційним членом;
- отримано достатню умову усувності ізольованих особливостей для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з абсорбційним членом вигляду u^q ;
- отримано достатню умову усувності ізольованих особливостей для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з градієнтним абсорбційним членом.

Список використаних джерел

1. Антонцев С.Н. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений / С.Н. Антонцев // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 260, № 6. — С. 1289—1293.
2. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. - Москва: Наука, 1996. - 480 с.
3. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде / Г. И. Баренблатт // Прикладная математика и механика. — 1952. — Т. 16, № 1. — С. 67—78.
4. Колодий И. М. Об ограниченности обобщенного решения эллиптических дифференциальных уравнений / И. М. Колодий // Вестник МГУ. — 1970. — Т. 5. — С. 45—52.
5. Колодий И. М. Об ограниченности обобщенных решений параболических дифференциальных уравнений / И. М. Колодий // Вестник МГУ. — 1971. — № 5. — С. 25—31.
6. Кондратьев В. А. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка / В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис // Матем. сб. — 1988. — Т. 135(177), № 3. — С. 346—360.
7. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. — Москва: Наука, 1973. — 576 с.
8. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций / А.И. Маркушевич. — В кн.: Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. Москва: Наука, 1981. — С. 115—255.
9. Риман Б. Основы общей теории функций одной комплексной переменной / Риман Б. — Сочинения. М-Л.: ОГИЗ, 1948. — С. 49—87.

10. Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач / Скрыпник И. В.— Москва: Наука, 1990. — 442 с.
11. Скрыпник И. И. Устранимость изолированных особенностей решений квазилинейных параболических уравнений с абсорбцией / И. И. Скрыпник // Матем. сб. — 2005. — Т. 196, № 11. — С. 141–160.
12. Скрыпник И. И. Устранимость изолированных особенностей решений квазилинейных параболических уравнений с абсорбцией / И. И. Скрыпник // Математический сборник. — 2005. — Т. 196, №11. — С. 141–160.
13. Скрыпник И. И. Об устранимости изолированной особенности для анизотропных эллиптических уравнений с абсорбцией / И. И. Скрыпник // Математический сборник. — 2008. — Т. 199, № 7. — С. 1033–1051.
14. Шань М. О. Априорні оцінки типу Келлера-Оссермана для двічі нелінійних анізотропних параболических рівнянь з абсорбцією / М. О. Шань // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. — 2018. — Т. 32. — С. 149–159.
15. Шань М. О. Результат усунутості для анізотропного рівняння пористого середовища з абсорбційним членом / М. О. Шань // Сучасні проблеми механіки та математики: Міжнародна наукова конференція, 22-26 травня, 2018 р.: тези доп. — Львів, 2018. — С. 180.
16. Alarcoón S. Keller–Osserman type conditions for some elliptic problems with gradient terms / Alarcoón S., García-Melián J., A. Quaas // Journal of Differential Equations. — 2012. — Vol. 252. — P. 886–914.
17. Aronson D.G. The porous medium equation. In: Fasano A., Primicerio M. (eds) Nonlinear Diffusion Problems. Lecture Notes in Mathematics / D.G. Aronson. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1986. — P. 1–46.

18. Bandle C. Boundary blow up for semilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms / C. Bandle, E. Giarrusso // *Advances in Differential Equations*. — 1996. — Vol. 1. — P. 133–150.
19. Bandle C. On the solutions of quasilinear elliptic problems with boundary blow-up / C. Bandle, M. Essèn // *Partial differential equations of elliptic type*, *Sympos. Math.*, XXXV. — Cortona, 1992. — P. 93–111.
20. Bandle C. Large solutions of quasilinear elliptic equations: existence and qualitative properties / C. Bandle, A. Greco, G. Porru // *Boll. Un. Mat. Ital.* — 1997. — B(7), 11(1). — P. 227–252.
21. Bandle C. Large solutions of semilinear elliptic equations: existence, uniqueness and asymptotic behaviour / C. Bandle, M. Marcus // *J. Anal. Math.* — 1992. — Vol. 58. — P. 9–24.
22. Bear J. *Dynamics of Fluids in Porous Media* / J. Bear. — New York: American Elsevier Publishing Company, 1972. — 764 p.
23. Bidaut-Veron M. F. Isolated initial singularities for the viscous Hamilton-Jacobi equation / M. F. Bidaut-Veron, N. A. Dao // *Adv. Diff. Equations*. — 2012. — Vol. 17. — P. 903–934.
24. Bidaut-Veron M. F. Remarks on some quasilinear equations with gradient terms and measure data / M. F. Bidaut-Veron, M. Garcia-Huidobro, L. Veron // *Contemporary mathematics-american mathematical society*. — 2013. — Vol. 595. — P. 31–53.
25. Boccardo L. Anisotropic equations in L^1 / L. Boccardo, T. Gallouet, P. Marcellini // *Differ. and Integr. Equat.* — 1996. — Vol. 9, N 11. — P. 209–212.
26. Bocher M. Singular points of functions which satisfy partial differential equations of elliptic type / M. Bocher // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1903. — Vol. 9. — P. 455–465.

27. Brezis H. Removable singularities for some nonlinear elliptic equations / H. Brezis, L. Veron // Arch. Rational Mech. Anal. – 1980. – Vol. 75. – P. 1–6.
28. Chandrasekhar S. An introduction to the study of stellar structure / S. Chandrasekhar. – New York: Dover Pub. Inc., 1967. – 512 p.
29. DiBenedetto E. Degenerate Parabolic Equations / E. DiBenedetto. – New York: Universitext, Springer-Verlag, 1993. – 387 p.
30. DiBenedetto E. On the local behaviour of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients / E. DiBenedetto // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1986. – Vol. 13, N. 3. – P. 487–535.
31. DiBenedetto E. Forward, backward and elliptic Harnack inequalities for non-negative solutions to certain singular parabolic partial differential equations / E. DiBenedetto, U. Gianazza, V. Vespri // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. – 2010. – Vol. 9, N. 2. – P. 385–422.
32. DiBenedetto E. Harnack type estimates and Hölder continuity for non-negative solutions to certain sub-critically singular parabolic partial differential equations / E. DiBenedetto, U. Gianazza, V. Vespri // Manuscripta Math. – 2010. – Vol. 131. – P. 231–245.
33. DiBenedetto E. Harnack's inequality for degenerate and singular parabolic equations / E. DiBenedetto, U. Gianazza, V. Vespri. – New York: Springer, 2012. – 278 p.
34. De Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari / E. De Giorgi // Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. – 1957. – Vol. 3. – P. 25–43.
35. Emden V.R. Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärme-theorie auf kosmologische und meteorologische Probleme / V.R. Emden. – Leipzig, Berlin: B.G. Teubner, 1907. – 498 p.

36. Fowler R.H. Further studies on Emden's and similar differential equations / R.H. Fowler // *Quart. JI. Math.* – 1931. – Vol. 2. – P. 259–288.
37. Brezis H. Nonlinear parabolic equations involving measure as initial conditions / H. Brezis, A. Friedman // *J. Math. Pures Appl.* – 1983. – Vol. 62. – P. 73–97.
38. Fusco N., Sbordone C. Some remarks on the regularity of minima of anisotropic integrals / N. Fusco, C. Sbordone // *Comm. P.D.E.* – 1993. – Vol. 18. – P. 153–167.
39. Garcia-Melian J. Large solutions to an anisotropic quasilinear elliptic problem / J. Garcia-Melian, J.D. Rossi, J.C. Sabina de Lis // *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* – 2010. – Vol. 189. – P. 689–712.
40. Gevrey M. Sur une generalisation du principe des singularites positives / M. Gevrey, M. Picard // *C.R. Acad. Sci. Paris 211 Ser I.* – 1940. – P. 581–584.
41. Ghergu M. On a class of sublinear singular elliptic problems with convection term / M. Ghergu, V. Radulescu // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* – 2005. – Vol. 311. – P. 635–646.
42. Giaquinta M. Growth conditions and regularity, a counterexample / M. Giaquinta // *Manuscripta Math.* – 1987. – Vol. 59, N. 2. – P. 245–248.
43. Gidas, B., Spruck, J. Local and global behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations / B. Gidas, J. Spruck // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1980. – Vol. 34. – P. 525–598.
44. Gilbarg D. On isolated singularities of second order elliptic differential equations / D. Gilbarg, J. Serrin // *JI Anal. Math.* – 1954. – Vol. 4. – P. 309–340.
45. Gmira A. On quasilinear parabolic equations involving measure data / Gmira A. // *Asymptotic Anal.* – 1990. – Vol. 3. – P. 43–56.

46. Henriques E. Concerning the regularity of the anisotropic porous medium equation / E. Henriques // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – Vol. 377. – P. 710–731.
47. Hille E. Some aspects of the Thomas-Fermi equation / Hille E. // JI. Analyse Math. – 1970. – Vol. 23. – P. 147–170.
48. Hille E. Aspects of Emden's equations / Hille E. // JI. Fac. Sci. Tokyo, Sec. 1, 17. – 1970. – P. 12–30.
49. Kamin S. Classification de solutions singulieres a l'origine pour une equation de la chaleur nonlineaire / S. Kamin, L.A. Peletier, J.L. Vazquez // CR. Acad. Sci. Paris Ser. I. – 1987. – Vol. 305. – P. 595–598.
50. Kamin S. Source-type solutions of degenerate diffusion equations with absorption / S. Kamin, L.A. Peletier // Israel J. Math. – 1985. – Vol. 50. – P. 219–230.
51. Keller J. B. On the solutions of $\Delta u = f(u)$ / J. B. Keller // Comm. Pure Applied Math. – 1957. – Vol. 10. – P. 503–510.
52. Kovalevsky A.A. Singular solutions of nonlinear elliptic and parabolic equations / A.A. Kovalevsky, I.I. Skrypnik, A.E. Shishkov. — Berlin: De Gruyter, Series in Nonl. Analysis and Applications, 2016. – 499 p.
53. Lasry J. M. Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constraints / J. M. Lasry, P. L. Lions // Mathematische Annalen. – 1989. – Vol. 283. – P. 583–630.
54. Lieberman G. Gradient estimates for anisotropic elliptic equations / G. Lieberman // Adv. Diff. Equ. – 2005. – Vol. 10. – P. 767–812.
55. Lions P.L. Isolated singularities in semilinear problems / P.L. Lions // JI. Diff. Equ. – 1980. – Vol. 38. – P. 441–450.

56. Marcellini P. Un exemple de solution discontinue d'un problem variationnel dans le cas scalaire / P. Marcellini. – Ins. Mat, “U. Dini”, Firenze, 1987. – Preprint.
57. Marcellini P. Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p, q growth conditions / P. Marcellini // J. Diff. Equat. – 1991. – Vol. 90. – P. 1–30.
58. Marcus M. Positive solutions of quasilinear elliptic equations with subquadratic growth in the gradient / M. Marcus, P. T. Nguyen. – arXiv:1311.7519, 2013. – Preprint.
59. Marcus M. Nonlinear second order elliptic equations involving measures / M. Marcus, L. Veron. – Berlin: De Gruyter, 2013. – 248 p.
60. Marcus M. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations in Lipschitz domains: the subcritical case / M. Marcus, L. Veron // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. – 2011. – Vol. 5. – P. 913–984.
61. Moser J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations / J. Moser // Comm. Pure Appl. Math. – 1960. – Vol. 13. – P. 457–468.
62. Moser J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations / J. Moser // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – Vol. 14. – P. 577–591.
63. Moser J. A Harnack inequality for parabolic differential equations / J. Moser // Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – Vol. 17. – P. 101–134.
64. Namlyeyeva Yu. V. Isolated singularities of solutions of quasilinear anisotropic elliptic equations / Yu. V. Namlyeyeva, A. E. Shishkov, I.I. Skrypnik // Adv. Nonlin. Studies. – 2006. – Vol. 6, N. 4. – P. 617–641.
65. Namlyeyeva Yu. V. Removable isolated singularities for solutions of doubly nonlinear anisotropic parabolic equations / Yu. V. Namlyeyeva, A. E. Shishkov, I.I. Skrypnik // Applicable Analysis. – 2010. – Vol. 89, N. 10. – P. 1559–1574.

66. Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations / J. Nash // Amer. J. Math. — 1958. — Vol. 80. — P. 931–954.
67. Nicolosi F. Removable isolated singularities for solutions of quasilinear parabolic equations / F. Nicolosi, I.I. Skrypnik, I.V. Skrypnik // Український математичний вісник. — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 208–234.
68. Nicolosi F. Precise point-wise growth conditions for removable isolated singularities / F. Nicolosi, I.I. Skrypnik, I.V. Skrypnik // Comm. Part. Diff. Equat. — 2003. — Vol. 28, N. 3–4. — P. 677–696.
69. Nguyen P. T. Boundary singularities of solutions to elliptic viscous Hamilton–Jacobi equations / P. T. Nguyen, L. Veron // Journal of Functional Analysis. — 2012. — Vol. 263. — P. 1487–1538.
70. Osserman R. On the inequality $-\Delta u \geq f(u)$ / R. Osserman // Pacific J. Math. — 1957. — V. 7, N. 4. — P. 1641–1647.
71. Pattle R.E. Diffusion from an instantaneous point source with concentration dependent coefficient / R.E. Pattle // Quart. JI. Mech. Anal. — 1959. — Vol. 12. — P. 407–409.
72. Peletier L. A. Source-type solutions of the porous media equation with absorption: the fast diffusion case / L. A. Peletier, J. Zhao. // Nonlin. Analysis. — 1990. — Vol. 14. — P. 107–121.
73. Porretta A. Absorption effects for some elliptic equations with singularities / A. Porretta // Bollettino della Unione Matematica Italiana. Serie VIII. Sezione B. Articoli di Ricerca Matematica. — 2005. — Vol. 8. — P. 369–395.
74. Qi Y.W. The self-similar profiles of generalized KPZ equation / Y.W. Qi, M.X. Wang // Pacific J. Math. — 2001. — Vol. 201. — P. 223–240.
75. Radulescu V.D. Singular phenomena in nonlinear elliptic problems: from blow-up boundary solutions to equations with singular nonlinearities / V.D. Radulescu // Handb. Differ. Equat. — 2007. — Vol. 4. — P. 485–593.

76. Serrin J. Local behaviour of solutions of quasilinear equations / J. Serrin // *Acta Math.* — 1964. — Vol. 111. — P. 247–302.
77. Serrin J. Isolated singularities of solutions of quasilinear equations / J. Serrin // *Acta Math.* — 1965. — Vol. 113. — P. 219–240.
78. Shan M. A. Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous medium equation / M. A. Shan // *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* — 2017. — Vol. 196. — P. 1913–1926.
79. Shan M. A. Keller-Osserman a priori estimates and the Harnack inequality for quasilinear elliptic and parabolic equations with absorption term / M. A. Shan, I.I. Skrypnik // *Nonlinear Analysis.* — 2017. — Vol. 155. — P. 97–114.
80. Shan M. A. Removability of an isolated singularity for solutions of anisotropic porous medium equation with absorption term / M. A. Shan // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2017. — Vol. 222. — P. 741–749.
81. Shan M. A. Keller-Osserman estimates and removability result for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. A. Shan, I.I. Skrypnik // *Mathematische Nachrichten.* — 2019. — Vol. 292. — P. 436–453.
82. Shan M. A. Keller-Osserman a priori estimates and removability result for the anisotropic porous medium equation with absorption term / M. A. Shan // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2018. — V. 235. — P. 63–73.
83. Shan M. A. On the precise condition for removability of isolated singularities for anisotropic porous media equation / M. A. Shan // *International Conference on Differential Equations: International conference dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20–24, 2016: abstr.* — Lviv, 2016. — P. 107.
84. Shan M. A. Removability of isolated singularity for anisotropic porous medium equation with absorption term / M. A. Shan // *Differential equati-*

- ons and Applications: 5th International conference for young scientists, dedicated to Yaroslav Lopatynsky, November 9–11, 2016: abstr. — Kyiv, 2016. — P. 129–130.
85. Shan M. O. On the precise condition for removability of isolated singularities for anisotropic porous medium equation with absorption term / M. O. Shan // XVII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям "Еругинские чтения-2017", 16-20 мая 2017 г.: тез. докладов. — Минск, 2017. — С. 29–30.
86. Shan M. A. Removability result for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. A. Shan // Differential Equations, Mathematical Physics and Applications: International Conference, October 17-19, 2017: abstr. — Cherkasy, 2017. — P. 76–77.
87. Shan M.O. Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous media equation / M. O. Shan // Матеріали наукової конференції професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів наукового ступеня за підсумками науково-дослідної роботи за період 2015-2016 рр., ДонНУ імені Василя Стуса, 15–18 травня 2017 р.: тези доп. — Вінниця, 2017. — С. 211–212.
88. Shan M. A. Keller-Osserman a priori estimates and removability of isolated singularities for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. A. Shan // Mathematics, informatics and information technologies: International conference dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, April 19-21, 2018: abstr. — Balti, 2018. — P. 78–79.
89. Shan M. O. Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. O. Shan // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Міжнародна наукова конференція, присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Черніве-

цького національного університету імені Юрія Федьковича, 17–19 вересня 2018 р.: тези доп. – Чернівці, 2018. — P. 34.

90. Shan M. A. Removable singularities for anisotropic parabolic equations / M. A. Shan // Contemporary Analysis and Nonlinear Boundary Problems: workshop dedicated to the 80th anniversary of B.V. Bazaliy and to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, October 17–18, 2018: abstr. — Sloviansk, 2018. — P. 8–9.
91. Shan M. O. Removability result for anisotropic parabolic equations / M. O. Shan // 6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, June 18–20, 2019: abstr. — Vinnytsia, 2019. — P. 66–68.
92. Shi P. Global solutions of the fast diffusion equation with gradient absorption terms / P. Shi, M. Wang // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 326. — P. 602–621.
93. Shi P. Self-similar singular solution of a p -Laplacian evolution equation with gradient absorption term / P. Shi // Journal of Partial Differential Equations. — 2004. — Vol. 17, N. 4. — P. 369–383.
94. Skrypnik I.I. Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption / I.I. Skrypnik // Israel Journal of Mathematics. — 2016. — Vol. 215. — P. 163–179.
95. Skrypnik I.I. Removability of isolated singularity for anisotropic parabolic equations with absorption / I.I. Skrypnik // Manusc. Math. — 2013. — Vol. 140. — P. 145–178.
96. Sommerfeld A. Asymptotische integration der differentialgleichung des Thomas-Fermischen atom / A. Sommerfeld // Z für Phys. — 1932. — Vol. 78. — P. 283–308.

97. Song B. H. Fundamental Solution of the Anisotropic Porous Medium Equation / B. H. Song, H. Yu Jian // *Acta Mathematica Sinica*. — 2005. — Vol. 21, N. 5. — P. 1183—1190.
98. Vazquez J.L. An Introduction to the Mathematical Theory of the Porous Medium Equation / J.L. Vazquez. — In: Delfour M.C., Sabidussi G. (eds) *Shape Optimization and Free Boundaries*. NATO ASI Series (C: Mathematical and Physical Sciences), Springer, Dordrecht, 1992. vol 380. Springer, Dordrecht. — P. 347-389.
99. Veron L. Singularities of Solution of Second Order Quasilinear Equations / L. Veron. — Harlow: Longman, 1996. — 392 p.
100. Veron L. Singular solutions of some nonlinear elliptic equations / L. Veron // *Nonlinear Anal.* — 1981. — Vol. 5. — P. 225—242.
101. Veron L. Comportement asymptotique des solutions d'équations elliptiques semilineaires dans R^N / L. Veron // *Ann. Mat. Pura Appl.* — 1981. — Vol. 127. — P. 25—50.
102. Zel'dovich Y.B. On the theory of heat propagation where thermal conductivity depends on temperature / Y.B. Zel'dovich, A.S. Kompanets. — Collection published on the occasion of the seventieth birthday of Academician A.F. Ioffe, Akad. Nauk. SSSR (Russian), Moscow, 1950.

Додаток А

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Шань М. О. Априорні оцінки типу Келлера-Оссермана для двічі нелінійних анізотропних параболічних рівнянь з абсорбцією / М. О. Шань // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. — 2018. — Т. 32. — С. 149—159.

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

2. Shan M. A. Removability of an isolated singularity for solutions of anisotropic porous medium equation with absorption term / M. A. Shan // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 222. — P. 741—749.
(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)
3. Shan M. A. Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous medium equation / M. A. Shan // Annali di Matematica Pura ed Applicata. — 2017. — Vol. 196. — P. 1913—1926.
(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 1.268), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)
4. Shan M. A. Keller-Osserman a priori estimates and the Harnack inequality for quasilinear elliptic and parabolic equations with absorption term / M. A. Shan, I. I. Skrypnik // Nonlinear Analysis. — 2017. — Vol. 155. — P. 97—114.
(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 1.291), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)

Особистий внесок здобувача. Здобувачу належать Proposition 1.3, Proposition 1.4, Theorem 1.2, Theorem 1.4.

5. Shan M. A. Keller-Osserman a priori estimates and removability result for the anisotropic porous medium equation with absorption term / M. A. Shan // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — V. 235. — P. 63—73.

(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)

6. Shan M. A. Keller-Osserman estimates and removability result for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. A. Shan, I. I. Skrypnyk // Mathematische Nachrichten. — 2019. — Vol. 292. — P. 436—453.

(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 0.847), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)

Особистий внесок здобувача. Здобувачу належать Theorem 1.1, Theorem 1.2.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Shan M. A. On the precise condition for removability of isolated singularities for anisotropic porous media equation / M. A. Shan // International Conference on Differential Equations: International conference dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20–24, 2016: abstr. — Lviv, 2016. — P. 107.
8. Shan M. A. Removability of isolated singularity for anisotropic porous medium equation with absorption term / M. A. Shan // Differential equations and Applications: 5th International conference for young scientists, dedicated to Yaroslav Lopatynsky, November 9–11, 2016: abstr. — Kyiv, 2016. — P. 129—130.

9. Shan M. O. On the precise condition for removability of isolated singularities for anisotropic porous medium equation with absorption term / M. O. Shan // XVII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям "Еругинские чтения-2017", 16-20 мая 2017 г.: тез. докладов. — Минск, 2017. — С. 29—30.
10. Shan M. A. Removability result for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. A. Shan // Differential Equations, Mathematical Physics and Applications: International Conference, October 17-19, 2017: abstr. — Cherkasy, 2017. — P. 76—77.
11. Shan M.O. Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous media equation / M. O. Shan // Матеріали наукової конференції професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів наукового ступеня за підсумками науково-дослідної роботи за період 2015-2016 рр., ДонНУ імені Василя Стуса, 15–18 травня 2017 р.: тези доп. — Вінниця, 2017. — С. 211—212.
12. Shan M. A. Keller-Osserman a priori estimates and removability of isolated singularities for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. A. Shan // Mathematics, informatics and information technologies: International conference dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, April 19-21, 2018: abstr. — Balti, 2018. — P. 78—79.
13. Шань М. О. Результат усунутості для анізотропного рівняння пористого середовища з абсорбційним членом / М. О. Шань // Сучасні проблеми механіки та математики: Міжнародна наукова конференція, 22-26 травня, 2018 р.: тези доп. — Львів, 2018. — С. 180.
14. Shan M. O. Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. O. Shan // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Міжнародна наукова конференція

ція, присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17–19 вересня 2018 р.: тези доп. – Чернівці, 2018. — P. 34.

15. Shan M. A. Removable singularities for anisotropic parabolic equations / M. A. Shan // Contemporary Analysis and Nonlinear Boundary Problems: workshop dedicated to the 80th anniversary of B.V. Bazaliy and to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, October 17–18, 2018: abstr. — Sloviansk, 2018. — P. 8–9.
16. Shan M. O. Removability result for anisotropic parabolic equations / M. O. Shan // 6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, June 18–20, 2019: abstr. — Vinnytsia, 2019. — P. 66–68.