

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Харьковский национальный университет

имени В. Н. Каразина

На правах рукописи

**Ревина Татьяна Владимировна**

УДК 517.977.14

**Позиционный синтез для робастных линейных  
систем**

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Коробов Валерий Иванович,

доктор физико-математических наук,

профессор

Харьков – 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
РАЗДЕЛ 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ, ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕ- ДОВАНИЙ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ	14
1.1. Метод функции управляемости . . . . .	14
1.2. Метод функции управляемости для линейной системы . . .	17
1.3. Метод функции управляемости для канонической системы с одномерным управлением . . . . .	19
1.4. Метод функции управляемости для канонической системы с многомерным управлением . . . . .	24
1.5. Обзор литературы по теме решение задачи синтеза за конеч- ное время и по теме робастности . . . . .	29
1.6. Устойчивость интервальных полиномов и интервальных матриц . . . . .	32
1.7. Работы автора по теме диссертации . . . . .	39
1.8. Выводы к разделу . . . . .	39
РАЗДЕЛ 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГЛОБАЛЬНОГО СИНТЕЗА ДЛЯ РО- БАСТНЫХ СИСТЕМ	40
2.1. Решение задачи глобального синтеза для робастной системы с одним возмущением . . . . .	40
2.2. Несколько подходов к определению границ изменения воз- мущения в задаче глобального синтеза для робастных систем	50

2.3. Решение задачи глобального синтеза для трехмерной робастной системы . . . . .	55
2.4. Выводы к разделу . . . . .	63

### РАЗДЕЛ 3. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО ОТРЕЗКА ГРАНИЦ ИЗМЕНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ . . . . . 64

3.1. Наддиагональные возмущения . . . . .	65
3.2. Общий случай . . . . .	68
3.3. Решение задачи синтеза для двумерной робастной системы . . . . .	70
3.4. Управление движением материальной точки с учетом неизвестного трения . . . . .	81
3.5. Решение задачи синтеза для робастной колебательной системы . . . . .	85
3.6. Решение задачи синтеза для связанного осциллятора . . . . .	89
3.7. Выводы к разделу . . . . .	96

### РАЗДЕЛ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ . . . . . 97

4.1. Решение задачи синтеза для робастной системы в случае одномерного управления . . . . .	97
4.1.1. Случай наддиагональных возмущений и симметричного отрезка их изменения . . . . .	99
4.1.2. Общий случай симметричного отрезка изменения возмущений . . . . .	103
4.1.3. Применение методов интервального анализа в случае произвольных границ изменения возмущений . . . . .	104
4.1.4. Решение задачи синтеза для двумерной и трехмерной робастных систем в случае независимых возмущений . . . . .	105
4.2. Решение задачи синтеза для линейной системы в случае многомерного управления . . . . .	110

4.2.1. Решение задачи синтеза для двумерной и трехмерной канонических систем с многомерным управлением . . . . .	114
4.3. Решение задачи синтеза для робастной системы в случае многомерного управления . . . . .	120
4.3.1. Наддиагональные возмущения . . . . .	122
4.3.2. Общий случай . . . . .	124
4.4. Остановка колебаний управляемого движения системы двух связанных маятников . . . . .	125
4.5. Выводы к разделу . . . . .	140
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	141
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b>	144

## ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$m_{ij}$  – элементы матрицы  $M$ ;

$M^*$  – матрица, транспонированная к матрице  $M$ ;

$\sigma(M)$  – спектр матрицы  $M$ ;

$\lambda_{\min}(M) = \min\{\lambda : \lambda \in \sigma(M)\}$ ;  $\lambda_{\max}(M) = \max\{\lambda : \lambda \in \sigma(M)\}$ ;

$\rho(M)$  – спектральный радиус матрицы  $M$ ;

$|M| = (|m_{ij}|)_{i,j=1}^n$  – абсолютное значение матрицы  $M$  – матрица, состоящая из модулей элементов матрицы  $M$ ;

$\|M\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}|$  – норма матрицы  $M$ ;

$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$  – евклидова норма вектора;

$\|S\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma(S^*S)\}$  – евклидова норма матрицы;

выражение  $M < 0$  означает, что матрица  $M$  отрицательно определена;

выражение  $M > 0$  означает, что матрица  $M$  положительно определена;

выражение  $M_1 < M_2$  означает, что  $M_1 - M_2 < 0$ ;

под левым собственным вектором матрицы  $M$  понимается собственный вектор сопряженной матрицы  $M^*$ ;

$E$  – единичная матрица пространства  $\mathbb{R}^n$ .

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** В работе рассматривается задача синтеза для одного класса линейных систем – задача построения управления в виде функции от фазовых координат, такого, что траектория системы с этим управлением, начинающаяся в произвольной начальной точке некоторой окрестности начала координат, оканчивается в начале координат в конечный момент времени. При этом управление удовлетворяет заранее заданным ограничениям, что усложняет задачу. В книге Коробова В. И. [13] предложены методы решения задачи синтеза для управляемых систем. На основании этого в работе предложено решение задачи синтеза для линейной системы с ограниченными неизвестными возмущениями. Решается следующая задача: найти ограничения на неизвестные возмущения, при которых управление, решающее задачу синтеза для линейной системы без возмущений, решает также задачу синтеза и для возмущенной системы. Предлагаются разные подходы к определению границ изменения возмущений. Получены оценки сверху и снизу на время движения из произвольной начальной точки в начало координат.

В настоящее время большое внимание уделяется задачам управляемости, устойчивости и стабилизации робастных систем управления, то есть систем управления, математические модели которых содержат неопределенности (термин "робастные системы" см., напр. Ackermann [54] (1980), Поляк [34, стр. 173] (2002)). На практике большое значение имеют непрерывные и дискретные модели динамики систем управления с неопределенностью (см. напр. работы Зименко К. А., Емельянов С. В., Коровин С. К., Мазко А. Г., Поляка Б. Т., Полякова А., Цыпкина Я. З., Ackermann J., Adamy J., Balakrishnan V., Boyd S., Jaulin, Ding S., Du H., Hong Y., Li S., Ovseevich A., Perruquetti W.) Модель "неизвестных, но ограниченных" ("unknown-but-bounded") возмущений впервые была рас-

смотрена Scherpe [107] (1973), далее была рассмотрена Куржанским [23] (1977) и Черноусько [51] (1988).

Впервые математическое определение устойчивости решений систем дано Ляпуновым А. М. в книге [25] (1892, г. Харьков). Метод функций Ляпунова является основным методом исследования устойчивости систем, описываемых дифференциальными уравнениями. Одними из первых работ по устойчивости систем за конечное время были работы Roxin и Weiss [104, 116] (1966). Однако в работе [116] под устойчивостью за конечное время понимается нахождение траектории в ограниченном множестве пространства в течении заданного конечного интервала времени.

При решении задач оптимального управления, то есть при нахождении экстремума функционала, управление ищут либо в виде  $u = u(t)$  (программное управление), либо в виде функции от фазовых координат  $u = u(x)$  (синтезирующее управление). Под задачей оптимального быстрогодействия понимается задача нахождения программного управления, переводящего заданную точку в заданную за минимальное время. В [35] (Понтрягин Л. С. и др., 1962) для линейных задач оптимального быстрогодействия предложен принцип максимума, на основе которого приведены примеры. В общем случае линейная задача оптимального быстрогодействия решена Коробовым В. И. и Скляром Г. М. в работе [18] (1987) на основании введения понятия min-проблемы моментов Маркова.

В работах Коробова В. И. [9, 10] (1979) впервые дан общий подход к решению задачи синтеза допустимых управлений для произвольной нелинейной автономной управляемой системы. При этом получена оценка на время движения (settling-time function) из произвольной начальной точки в начало координат. Этот метод далее был развит в совместных работах Коробова В. И., Скляра Г. М., Скорика В. А. и других авторов [3, 12, 13, 14, 17, 18, 86, 87, 98] и других. К работам Коробова В. И. при- мыкают работы Polyakov и др. [7, 88, 91], Rodoumta и др. [98]. Оказалось,

что метод функции управляемости можно применить к задачам управления хаосом (Bowong и др. [62]).

В работе [17] Коробовым В. И., Скляром Г. М. (1990) предложен один из возможных подходов к решению задачи глобального позиционного синтеза для произвольной линейной системы, причем выделен случай, когда функция управляемости является временем движения из произвольной начальной точки в начало координат. В частности, предложено решение задачи синтеза для канонической системы.

В английском переводе работы [9] и других работ этого автора, понятие "позиционного синтеза" было переведено на английский язык как "positional synthesis". Позднее это понятие было введено и изучено в работе [64] и других, где оно называлось "feedback synthesis". Сейчас понятие синтеза, введенного в работе [9] имеет английский аналог "feedback synthesis". Метод функции управляемости В. И. Коробова дает решение задачи синтеза за конечное время. Значительно позже задача попадания из произвольной начальной точки в начало координат (или в общем случае в точку покоя) за конечное время была названа "finite-time stabilization" (см., например Haimo [74] (1986), Ryan [105] (1991), Bhat [59] (1998), Hong [76]) (2002). Существенным отличием метода функции управляемости является то, что он может быть распространен на случай, когда начало координат не является точкой покоя системы. Тогда синтез является неустойчивым в том смысле, что после попадания в ноль траектория не только не остается в нуле, но покидает некоторую его окрестность и снова возвращается в ноль за конечное время. Работа [87] (Коробов В. И. и др, 2015) посвящена задаче построения ограниченного управления, которое переводит управляемую систему из произвольной точки в заданную не точку покоя за конечное время в глобальном смысле. В работе [3] (Бессонов Г. А. и др, 1988) синтез называется устойчивым при условии, что конечная точка является точкой покоя системы. Отметим, что в случае, когда конечная точка не яв-



ляется точкой покоя, синтез, как правило, не устойчив. В качестве примера приведем систему, предложенную в [3], а именно

$$\dot{x}_1 = x_2 + 1, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq 1.$$

Требуется попасть в начало координат из произвольной начальной точки  $(x_1, x_2)$ . Управление, решающее задачу синтеза, имеет вид:

$$u(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x_1 + (x_2 + 1)\text{sign}(x_2 + 1)/2 \leq 0, \\ 1, & \text{при } x_1 + (x_2 + 1)\text{sign}(x_2 + 1)/2 < 0 \end{cases}$$

В то же время любой допустимый синтез в этой задаче неустойчив. В самом деле, пусть  $x_1(t_0) > 0$ . Для попадания в начало координат необходимо, чтобы в некоторый момент времени  $t_1$  было  $\dot{x}_1(t_1) \leq 0$ , т. е.  $x_2(t_1) \leq -1$ , откуда и следует неустойчивость любого возможного синтеза.

**Связь работы с научными программами, планами, темами.** Диссертационная работа выполнена на кафедре прикладной математики Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина в рамках государственных научно-исследовательских работ по темам «Решение задач управляемости, стабилизации, синтеза, идентификации для динамических систем» (номер государственной регистрации 0109U001548), «Решение задач управляемости, линеаризации, синтеза и стабилизации для нелинейных систем» (номер государственной регистрации 0111U010365), «Исследование качественного поведения динамических систем разной природы» (номер государственной регистрации 0116U000823).

**Цель и задачи исследования.** *Целью* диссертационной работы является решение задачи локального и глобального позиционного синтеза для линейных робастных систем с одномерным и многомерным управлением, а также применение полученных методов решения для исследования механических объектов.

Основной задачей, которую приходится решать для достижения ука-

занной цели, является поиск таких границ изменения возмущений, при которых решение задачи синтеза для линейной системы с неизвестными ограниченными возмущениями производится тем же управлением, что и для системы без возмущений.

Таким образом, *объектом исследований* служит каноническое уравнение с одномерным и многомерным управлением с неизвестными ограниченными возмущениями.

*Предметом исследований* является построение ограниченного управления, решающего задачу попадания из произвольной начальной точки некоторой окрестности начала координат в начало координат за конечное время при наличии возмущений. При этом управление, решающее задачу синтеза для системы без возмущений, должно решать также и задачу синтеза для системы при наличии возмущений. Также предметом исследований является нахождение границ изменения возмущений для различных типов линейных систем с одномерным и многомерным управлением.

*Методы исследования.* При работе над диссертацией использовался метод функции управляемости В. И. Коробова [13], второй метод Ляпунова исследования устойчивости систем. При нахождении границ изменения возмущений использовалась теория устойчивости интервальных матриц [72, 102, 108, 115].

**Научная новизна полученных результатов.** В работе впервые:

1. построено ограниченное управление, решающее задачу попадания из произвольной начальной точки некоторой окрестности начала координат в начало координат за конечное время для линейных робастных систем при наличии возмущений;
2. получены границы изменения возмущений в случае вынесения общей функции и одномерного управления для задачи глобального позиционного синтеза и локального позиционного синтеза для линейных робастных систем;

3. получены границы изменения возмущений в случае нескольких независимых возмущений и одномерного управления для задачи глобального позиционного синтеза и локального позиционного синтеза для линейных робастных систем;
4. получена общая граница изменения возмущений в случае нескольких независимых возмущений и многомерного управления для задачи глобального позиционного синтеза и локального позиционного синтеза для линейных робастных систем;
5. приведены механические примеры применения полученных результатов.

**Практическое значение полученных результатов.** Работа носит теоретический и практический характер. Её результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении решения задачи позиционного синтеза для линейных робастных систем. В работе предложен метод построения управления конкретным объектом, описываемым данным уравнением. Результаты диссертации могут быть использованы в задачах управляемости и устойчивости механических объектов с неизвестными неопределенностями.

**Личный вклад соискателя.** В совместных с В. И. Коробовым статьях соавтору принадлежат постановки задач, подходы к их решению и обсуждения результатов. Остальные результаты получены автором самостоятельно.

**Апробация результатов диссертации.** Результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

1. Международной научной конференции «First Karazin scientific readings», Харьков, 2004 г.;
2. 7 Крымской Международной математической школе «Метод функций Ляпунова и его приложения» Алушта, 11-18 сент. 2004 г.;

3. 8 Крымской Международной математической школе «Метод функций Ляпунова и его приложения» Алушта, 10-17 сент. 2006 г.;
4. Научной конференции, посвященной памяти Ляпунова А. М., Харьков, 2007 г.;
5. 9 Крымской Международной математической школе «Метод функций Ляпунова и его приложения» Алушта, 15-20 сент. 2008 г.;
6. Международной научной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения», Харьков, 17-22 апреля 2011 г.;
7. Международной научной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, май 2012 г.;
8. Международной школе-конференции «Тараповские чтения-2013, Современные проблемы математики, механики и информатики», Харьков, 29 сент. - 4 окт. 2013 г.;
9. II Международной научной конференции «Анализ и математическая физика», Харьков, 2014 г.;
10. III Международной научной конференции «Анализ и математическая физика», Харьков, 2015 г.;
11. Международной научной конференции «Динамические системы и их приложения», Киев, 2015 г.;
12. Международной школе-конференции «Тараповские чтения-2016, Современные проблемы естественных наук», Харьков, 1-15 марта 2016 г.;
13. IV Международной научной конференции «Анализ и математическая физика», Харьков, 2016 г.;
14. Международной научной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения В. И. Коробова «Дифференциальные уравнения и теория

управления», Харьков, 2016 г.;

15. На научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений и управления механико-математического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (руководитель В. И. Коробов), Харьков, 2014, 2015 г.;
16. На научном семинаре кафедры прикладной математики факультета математики и информатики Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (руководитель В. И. Коробов), Харьков, 2015, 2016 г.

**Публикации.** Результаты диссертации нашли отражение в 22 научных публикациях, в том числе в 7 статьях [15, 19, 20, 21, 40, 44, 83] в специализированных изданиях и тезисах выступлений на 14 конференциях [16, 38, 39, 41, 42, 43, 45, 80, 84, 93, 94, 95, 96, 97], а также в одном препринте [85].

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех разделов, выводов, списка использованных источников и 43 рисунков. Список использованных источников содержит 116 наименований и занимает 14 страниц. Общий объем диссертации составляет 157 страниц. Основной текст диссертации занимает 138 страниц. Основные результаты, вынесенные на защиту, изложены в разделах 2, 3, 4.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Коробову Валерию Ивановичу за постановку и обсуждение задач, интересные идеи, постоянное внимание и поддержку. Автор также признателен кандидату физико-математических наук, доценту Игнатович Светлане Юрьевне за ценные советы на этапе оформления работы.

## РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ, ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ,  
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

## 1.1. Метод функции управляемости

В этом разделе мы напомним главные понятия и результаты метода функции управляемости [9, 10, 13]. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1.1)$$

где  $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$ , причем  $\Omega$  таково, что  $0 \in \text{int } \Omega$ ,  $f(0, 0) = 0$ .

**Определение 1.1.** Под локальным позиционным синтезом ограниченного управления будем понимать нахождение такого управления  $u = u(x)$ ,  $x \in Q$ , что: 1)  $u(x) \in \Omega$ ;  
2) траектория  $x(t)$  замкнутой системы

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad (1.2)$$

выходящая из произвольной начальной точки  $x_0 \in Q$ , оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T(x_0)$ .

**Замечание 1.1.** Отметим трудности решения этой задачи.

1. Поскольку через конечную точку проходит бесконечное число траекторий и время движения по каждой траектории в эту точку конечно, то в силу теоремы о единственности решения правая часть уравнения (1.2) не может удовлетворять условию Липшица в рассматриваемой окрестности.

2. Управление удовлетворяет заранее заданным ограничениям.

Для решения задачи позиционного синтеза в 1979 году Коробовым В. И. был предложен метод функции управляемости [9, 10].

Достаточные условия разрешимости задачи синтеза для системы (1.1) сформулированы в [13, Теорема 1.2].

**Теорема 1.1.** (Коробов [9, 10],[13, Теорема 1.2]) Рассмотрим управляемый процесс (1.1). Предположим, что вектор-функция  $f(x, u)$  непрерывна по совокупности переменных и в области

$$\{(x, u) : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2, u \in \Omega\}$$

удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x', u') - f(x'', u'')\| \leq L_1(\rho_1, \rho_2)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|).$$

Пусть в замкнутой области  $G = \{x : \|x\| \leq R\}$  ( $0 < R \leq \infty$ ) существует функция  $\Theta(x)$ , удовлетворяющая условиям:

1)  $\Theta(x) > 0$  при  $x \neq 0$  и  $\Theta(0) = 0$ ;

2)  $\Theta(x)$  непрерывна всюду и непрерывно-дифференцируемая всюду, за исключением, быть может, точки  $x = 0$ ;

3) существует  $c > 0$  такое, что  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$  ограничено и  $Q \subset \{x : \|x\| < R\}$

4) существует функция  $u(x) \in \Omega$  при  $x \in Q$ , такая, что справедливы неравенства

$$-\beta_1 \Theta^{1-\frac{1}{\alpha_1}}(x) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta_2 \Theta^{1-\frac{1}{\alpha_2}}(x) \quad (1.3)$$

при некоторых положительных  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ , причем  $u(x)$  в области  $K(\rho_1, \rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$  удовлетворяет условию Липшица

$$\|u(x'') - u(x')\| \leq L_2(\rho_1, \rho_2)\|x'' - x'\|.$$

Тогда траектория системы (1.2), начинающаяся в произвольной начальной точке  $x(0) = x_0 \in Q$ , оканчивается в точке  $x_1 = 0$  в некоторый конечный момент времени  $T(x_0)$ , причем

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \Theta(x_0)^{\frac{1}{\alpha_1}} \leq T(x_0) \leq \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Theta^{\frac{1}{\alpha_2}}(x_0). \quad (1.4)$$

**Замечание 1.2.** При  $\rho_1 \rightarrow 0$  константы Липшица  $L_i(\rho_1, \rho_2) \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, 2$ .

**Замечание 1.3.** [13, Теорема 1.1] Предыдущая теорема может быть расширена на случай  $f(t, x, u)$ , где  $f$  непрерывна в  $[0, +\infty) \times G \times \Omega$  и удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t, x', u') - f(t, x'', u'')\| \leq L_1(t_1, \rho_1, \rho_2)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|)$$

в любой замкнутой области

$$\{(t, x, u) : 0 \leq t \leq t_1, 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2, u \in \Omega\},$$

$$0 < \rho_1 < \rho_2, t_1 > 0.$$

**Замечание 1.4.** [13, стр. 18] Представляет интерес случай, когда при построении синтезирующих управлений удастся найти время движения  $T(t_0, x_0)$  из произвольной точки  $x(t_0) = x_0$  в точку  $x_1 = 0$ . Случай, когда функция управляемости является временем движения, реализуется, например, когда вместо неравенства (1.3) используется равенство

$$\frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u(t, x)) = -1.$$

Если, кроме того, управление  $u(t, x)$ , таково, что

$$\begin{aligned} \min_{u \in \Omega} \left( \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) \right) = \\ = \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u(t, x)) = -1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

то получаем основное уравнение метода динамического программирования – уравнение Беллмана и функция  $\Theta(t, x)$  будет временем быстродействия. Выбор управления с помощью уравнения (1.5) можно трактовать с позиции минимизации функции  $\Theta(t, x)$  следующим образом: управление  $u(t, x)$  выбирается таким образом, чтобы угол между направлением быстрого убывания этой функции и направлением движения был минимальным. В методе функции управляемости указанный угол не обязательно минимальный.



В случае, когда неравенство (1.3) имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) \leq -\beta \Theta(t, x),$$

функция  $\Theta(t, x)$  является функцией Ляпунова. Это неравенство означает, что при достаточно малых  $\Theta$  угол между направлением движения и направлением убывания функции  $\Theta(t, x)$  не меньше, чем в методе функции управляемости, так как  $\Theta(t, x) \leq \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(t, x)$  при  $\alpha \geq 1$ .

Таким образом, угол между направлением движения и направлением убывания функции  $\Theta(t, x)$  в методе функции управляемости не меньше, чем угол в методе динамического программирования, и не больше, чем в методе функции Ляпунова.

## 1.2. Метод функции управляемости для линейной системы

В работе [17] (Коробов В. И, Скляр Г. М, 1990) показано, что каждая монотонно невозрастающая на положительной полуоси функция порождает позиционное управление, решающее задачу локального синтеза для произвольной линейной системы. Пусть система (1.1) линейна

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.6}$$

и является полностью управляемой, а также  $\{u : \|u\| \leq 1\} \subset \Omega \in \mathbb{R}^r$ . Конечность времени движения приводит к тому, что данная задача не может быть решена с помощью линейной обратной связи  $u = Lx$ , поскольку решение замкнутой системы  $\dot{x} = (A + BL)x$  не обращается в ноль при любой матрице  $L$  и при  $t \geq 0$ ;  $x(0) \neq 0$ .

Пусть  $f(s)$  – произвольная невозрастающая неотрицательная на полуоси  $[0; +\infty)$  функция, имеющая по крайней мере  $m$  точек убывания, такая, что при  $0 \leq \Theta \leq \bar{\Theta}$  выполнено  $\int_0^{\infty} s^{2m+1} e^{-2\lambda_0 s \Theta} f(s) ds < \infty$  ( $m$  – степень минимального полинома матрицы  $A$ ,  $\lambda_0$  – минимальная вещественная часть собственных значений матрицы  $A$ ). Обозначим через

$N_f(\Theta)$  матрицу

$$N_f(\Theta) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{\Theta}\right) e^{-At} B B^* e^{-A^*t} dt. \quad (1.7)$$

Эта матрица положительно определена в силу условия  $rg(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$  [17], [13, Глава 3].

**Теорема 1.2.** (Коробов, Скляр [17],[13, Теорема 3.2]) Пусть все собственные значения матрицы  $A$  имеют неположительную вещественную часть. Пусть функция управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  – единственное положительное решение уравнения

$$2a_0\Theta = (N_f^{-1}(\Theta)x, x), \quad x \neq 0, \quad \Theta(0) = 0, \quad (1.8)$$

Тогда при достаточно малых значениях коэффициента  $a_0$ ,  $0 < a_0 \leq \bar{a}$ , управление вида

$$u(x) = -\frac{1}{2} f(0) B^* N_f^{-1}(\Theta(x))x \quad (1.9)$$

решает для системы (1.6) задачу глобального позиционного синтеза непрерывного управления, удовлетворяющего ограничению  $\|u\| \leq 1$ .

**Замечание 1.5.** При одномерном управлении ( $r = 1$ ) введем обозначения  $b = B$ . В случае, если  $f(s) = e^{-s}$ , матрица  $N_f(\Theta) = N(\Theta)$  задается выражением

$$N(\Theta) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\Theta}} e^{-At} b b^* e^{-A^*t} dt. \quad (1.10)$$

Постоянная  $a_0$  выбирается согласно неравенству

$$0 < a_0 \leq \inf_{0 < \Theta < \infty} \left( \frac{2}{\Theta(N^{-1}(\Theta)b, b)} \right). \quad (1.11)$$

Управление, задаваемое формулой (1.9), имеет вид

$$u(x) = -\frac{1}{2} b^* N^{-1}(\Theta(x))x. \quad (1.12)$$

Обозначим полную систему (1.6) с управлением (1.12)

$$\dot{x} = Ax - \frac{1}{2} b b^* N^{-1}(\Theta(x))x \quad (1.13)$$

Полная производная функции  $\Theta(x)$  в силу системы (1.13) удовлетворяет условию

$$\left. \frac{d\Theta}{dt} \right|_{(1.13)} = - \frac{\Theta(N^{-1}(\Theta)x, x)}{\Theta(N^{-1}(\Theta)x, x) + (N_1(\Theta)N^{-1}(\Theta)x, N^{-1}(\Theta)x)}, \quad (1.14)$$

где

$$N_1(\Theta) = \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t}{\Theta}} e^{-At} b b^* e^{-A^*t} dt. \quad (1.15)$$

**Замечание 1.6.** В случае, если

$$f(s) = \begin{cases} 1 - s, & \text{при } 0 \leq s \leq 1, \\ 0, & \text{при } s > 1, \end{cases}$$

матрица  $N_f(\Theta) = N_2(\Theta)$ , где

$$N_2(\Theta) = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{\Theta}\right) e^{-At} B B^* e^{-A^*t} dt. \quad (1.16)$$

В этом случае в неравенстве (1.4) выполняется равенство вида  $\dot{\Theta}(x) = -1$ , т. е. функция управляемости является временем движения из произвольной точки  $x$  в начало координат.

### 1.3. Метод функции управляемости для канонической системы с одномерным управлением

Опишем один из возможных подходов к решению задачи глобального позиционного синтеза для канонической системы [17],[13, стр. 98]

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = u, \quad (1.17)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u$  — скалярное управление, удовлетворяющее ограничению  $|u| \leq 1$ . Система (1.17) в матричном виде представляет собой

$$\dot{x} = A_0 x + b_0 u \quad (1.18)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u$  — скалярное управление, удовлетворяющее ограничению  $|u| \leq 1$ , матрицы  $A_0$  и  $b_0$  задаются формулой

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Эта система интересна во многих отношениях. Она естественным образом возникает в задаче вариационного исчисления об определении минимума функционала  $\int_0^T R(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t))dt$  в классе функций,  $n$ -я производная которых удовлетворяет условию Липшица с константой  $L$  [13, стр. 22]. Задача построения программного управления  $u = u(t)$ , переводящего произвольную заданную точку в нуль по траектории системы (1.18) при наличии фазовых ограничений вида  $|x_1| \leq \mu_1$ , является вариантом проблемы Адамара-Колмогорова построения функции  $x(t) = x_1(t)$  на отрезке  $[0, T]$ , удовлетворяющей вместе со своими производными  $x^{(k)}(t) = x_{k+1}(t)$  вплоть до  $(n-1)$ -го порядка заданным ограничениям [13, стр. 22]. В рассматриваемом нами подходе система (1.18) занимает центральное место так как решение задачи синтеза для произвольной линейной системы с одномерным управлением может быть сведено к решению задачи синтеза для канонической системы [13, стр. 42].

В этом случае  $N_2(\Theta) = (D(\Theta)FD(\Theta))^{-1}$ , где

$$F^{-1} = \int_0^1 (1-t)e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt = \left( \frac{(-1)^{2n-i-j}}{(n-i)!(n-j)!(2n-i-j+1)(2n-i-j+2)} \right)_{i,j=1}^n, \quad (1.20)$$

$$D(\Theta) = \text{diag} \left( \Theta^{-\frac{2n-2i+1}{2}} \right)_{i=1}^n. \quad (1.21)$$

В работе [47] указан аналитический метод нахождения элементов  $f_{ij}$  матрицы  $F$ .

**Теорема 1.3.** (Коробов, Скляр [17],[13, Теорема 2.2]). Определим функцию управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  как единственное положительное решение уравнения

$$2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x), \quad x \neq 0, \quad (1.22)$$

где постоянная  $a_0$  выбирается согласно неравенству

$$0 < a_0 \leq \frac{2}{f_{nn}}. \quad (1.23)$$

Доопределим функцию управляемости в точке ноль равенством  $\Theta(0) = 0$ . Тогда управление вида

$$u(x) = -\frac{1}{2} b_0^* D(\Theta(x)) F D(\Theta(x)) x \quad (1.24)$$

решает для системы (1.17) задачу глобального позиционного синтеза непрерывного управления, удовлетворяющего ограничению  $|u(x)| \leq 1$ . Более того, выполняется равенство вида  $\dot{\Theta}(x) = -1$ , то есть функция управляемости является временем движения из произвольной начальной точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  в начало координат.

**Замечание 1.7.** В отличие от функции Ляпунова, которая определяется явно, функция управляемости определяется неявно как решение уравнения (1.22). Напомним, что время быстрогодействия в задаче линейного быстрогодействия также определяется неявно [18].

В работах [11, 12] Коробовым В. И. для системы

$$\dot{x} = Ax + b(u + v), \quad |u| \leq d, \quad |v| \leq \gamma < d$$

на основе метода функции управляемости было построено не зависящее от возмущения  $v$  ограниченное управление  $u = u(x)$ , решающее задачу синтеза с использованием техники дифференциальных включений.

Для двумерной системы в работе [14] (Коробов В. И. и др. 2005) была рассмотрена следующая задача: для систем вида

$$\dot{x} = (A + pD)x + bu, \quad d_1 \leq p \leq d_2, \quad (d_1 < 0, \quad d_2 > 0)$$

требуется построить такое управление  $u = u(x)$ ,  $|u| \leq 1$ , что траектория  $x(t, x_0)$  системы  $\dot{x} = (A + pD)x + bu(x)$ , выходящая из произвольной точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  в момент времени  $t_0 = 0$ , попадает в точку  $x_1 = 0$  за конечное время  $T(x_0)$  при любом  $p \in [d_1; d_2]$ . Эту задачу мы будем называть задачей позиционного синтеза для робастных систем. В общем случае задача не исследовалась.

**Определение 1.2.** Под робастной системой будем понимать систему вида

$$\dot{x} = (A_0 + p(t, x)R)x + b_0u, \quad (1.25)$$

где матрицы  $A_0$  и  $b_0$  задаются формулой (1.19),  $t \geq 0$ ,  $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q$  – это некоторая окрестность начала координат,  $u$  – скалярное управление, удовлетворяющее ограничению  $|u| \leq 1$ , также считается, что функция  $p(t, x)$  удовлетворяет заданному ограничению  $d_1 \leq p(t, x) \leq d_2$  и является *неизвестной*.

В диссертационной работе в разделах 2 и 3 предлагается решение задачи синтеза для системы (1.25). В работе построено *ограниченное управление*, переводящее произвольную начальную точку  $x_0 \in Q$  в начало координат за *конечное время* при любом возмущении  $p(t, x)$ , удовлетворяющем ограничению  $d_1 \leq p(t, x) \leq d_2$ . Также предложены разные подходы для нахождения границ изменения возмущения  $d_1$  и  $d_2$ . В разделе 2 исследуется случай, при котором матрица  $R$  имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Также в разделе 2 рассматривается случай  $-d_1 = d_2 = d$ , а матрица  $R$

имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

где  $r_2, \dots, r_{n-1}$  – некоторые заданные числа. В разделе 3 этот результат обобщается на случай  $d_1 \leq p(t, x) \leq d_2$ ,

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & & \\ r_{(n-2)1} & r_{(n-2)2} & r_{(n-2)3} & r_{(n-2)4} & \dots & r_{(n-2)(n-1)} & 0 \\ r_{(n-1)1} & r_{(n-1)2} & r_{(n-1)3} & r_{(n-1)4} & \dots & r_{(n-1)(n-1)} & r_{(n-1)n} \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & r_{n4} & \dots & r_{n(n-1)} & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

$r_{ij}$  – некоторые заданные числа,  $1 \leq j \leq i+1$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Хотя формулы для нахождения границ  $d_1$  и  $d_2$  в случае  $R$  вида (1.28) и (1.26) одинаковы, рассмотренные задачи существенно отличаются методом решения.

В разделе 4 исследуется система

$$\dot{x} = (A_0 + R(t, x))x + b_0 u, \quad (1.29)$$

где  $t \geq 0$ ,  $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q$  – это некоторая окрестность начала координат,  $u$  – скалярное управление, удовлетворяющее ограничению  $|u| \leq 1$ ,

$$R(t, x) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & & \\ r_{(n-2)1} & r_{(n-2)2} & r_{(n-2)3} & r_{(n-2)4} & \dots & r_{(n-2)(n-1)} & 0 \\ r_{(n-1)1} & r_{(n-1)2} & r_{(n-1)3} & r_{(n-1)4} & \dots & r_{(n-1)(n-1)} & r_{(n-1)n} \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & r_{n4} & \dots & r_{n(n-1)} & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

функции  $r_{ij} = r_{ij}(t, x)$  неизвестны и удовлетворяют ограничению

$$r_{ij}^{(-)} \leq r_{ij}(t, x) \leq r_{ij}^{(+)}, \quad 1 \leq j \leq i + 1 \leq n.$$

В работе построено *ограниченное управление*, переводящее произвольную начальную точку  $x_0 \in Q$  в начало координат за *конечное время* при неизвестной матрице  $R(t, x)$  а также найдены границы  $r_{ij}^{(-)}$  и  $r_{ij}^{(+)}$ . Подробно исследован случай  $\max_{1 \leq j \leq i+1 \leq n} |r_{ij}(t, x)| \leq \Delta$ .

#### 1.4. Метод функции управляемости для канонической системы с многомерным управлением

В работе [86] (Коробов В. И. и др. 2002) предложена идея решения задачи синтеза для произвольной линейной управляемой системы с многомерным управлением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega = \{u : \|u\| \leq d, d > 0\} \subset \mathbb{R}^r, \quad r > 1, \quad (1.31)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные матрицы размерности  $(n \times n)$  и  $(n \times r)$ , соответственно, причем функция управляемости  $\Theta(x_0)$  является временем движения из произвольной начальной точки  $x_0 \in Q$  в начало координат, т. е.  $T(x_0) = \Theta(x_0)$ . Эта система предполагается полностью управляемой, т. е.

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

Решение задачи синтеза для системы (1.31) основано на приведении ее с помощью замены переменных и введения нового управления к  $r$  системам канонического вида (1.17) с одномерным управлением. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем предполагать, что ранг матрицы  $B$  равен  $r$ . Проведем эту замену переменных и управления [13, Глава 1.6]. Рассмотрим векторы

$$b_1, b_2, \dots, b_r, Ab_1, \dots, Ab_r, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_r, \quad (1.32)$$



где  $b_i$  –  $i$ -й столбец матрицы  $B$ . В результате путем перестановки и, возможно, перенумерации векторов  $b_1, \dots, b_r$  получим последовательность линейно независимых векторов

$$b_1, \dots, A^{n_1-1}b_1, \dots, b_r, \dots, A^{n_r-1}b_r, \quad (1.33)$$

где  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ ,  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$ . Выберем вектор  $c_k$  ( $k = 1, \dots, r$ ) так, чтобы он удовлетворял равенству  $(c_k, A^{n_k-1}b_k) = 1$  и был ортогонален всем остальным векторам последовательности (1.33). Обозначим через

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_r \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad L_k = \begin{pmatrix} c_k^* \\ \dots \\ c_k^* A^{n_k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, r.$$

Сделаем следующее преобразование координат

$$z = Lx. \quad (1.34)$$

В [13, Глава 1.6] показано, что матрица  $L$  является невырожденной. Получаем каноническую форму системы (1.31)

$$\dot{z} = \tilde{A}z + B_0Mu, \quad (1.35)$$

где  $\tilde{A} = LAL^{-1}$  – матрица размера  $n \times n$ , в которой строка с номером  $s_i$ , имеет вид  $(\tilde{a}_{s_i,1}, \dots, \tilde{a}_{s_i,n})$ ,  $i = 1, \dots, r$ , элементы матрицы  $\tilde{a}_{s_{i-1}+j, s_{i-1}+j+1} = 1$ ,  $j = 1, \dots, n_i - 1$ ,  $i = 1, \dots, r$ , а все остальные элементы матрицы равны нулю,  $B_0$  –  $(n \times r)$ -матрица, элементы которой

$$(B_0)_{s_i i} = 1, \quad s_i = n_1 + \dots + n_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad (1.36)$$

а все остальные равны нулю,  $M$  – верхнетреугольная матрица размера  $r \times r$  вида

$$M = \begin{pmatrix} 1 & c_1^* A^{n_1-1} b_2 & c_1^* A^{n_1-1} b_3 & \dots & c_1^* A^{n_1-1} b_r \\ 0 & 1 & c_2^* A^{n_2-1} b_3 & \dots & c_2^* A^{n_2-1} b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем новое управление  $v = B_0^* \tilde{A}z + Mu$ , тогда система (1.35) принимает вид

$$\dot{z} = A_0 z + B_0 v, \quad (1.37)$$

где  $A_0$  –  $(n \times n)$ -матрица вида

$$A_0 = \text{diag}(A_{01}, \dots, A_{0r}), \quad (1.38)$$

где  $A_{0i}$  –  $(n_i \times n_i)$ -матрица вида

$$A_{0i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, r;$$

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq 1, \quad n_1 + \dots + n_r = n.$$

Обозначим

$$F^{-1} = \int_0^1 (1-t)e^{-A_0 t} B_0 B_0^* e^{-A_0^* t} dt. \quad (1.39)$$

Пусть  $D(\Theta)$  – диагональная матрица вида

$$D(\Theta) = \text{diag}(D_1(\Theta), \dots, D_r(\Theta)), \quad \text{где } D_i(\Theta) = \text{diag} \left( \Theta^{-\frac{2n_i-2j+1}{2}} \right)_{j=1}^{n_i}. \quad (1.40)$$

Обозначим  $P_0$  –  $(r \times n)$ -матрицу вида

$$P_0 = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_{n_1}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1^r & \dots & a_{n_r}^r \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

в которой  $a_1^i, \dots, a_{n_i}^i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) – элементы  $n_i$ -мерного вектора специального вида [13, формула (2.63)].

**Теорема 1.4.** (Коробов, Скорик [86],[13, Теорема 2.3]) При  $x \neq 0$  определим функцию управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  как единственное положи-

тельное решение уравнения

$$2a_0\Theta = (L^*D(\Theta)FD(\Theta)Lx, x), \quad (1.42)$$

где постоянная  $a_0$  выбирается согласно неравенству

$$0 < a_0 \leq \frac{d^2}{2\|F^{-1}\|\|M^{-1}\|^2(\|P_0\| + \|B_0^*LAL^{-1}\| \max\{c, c^{n_1}\})^2}. \quad (1.43)$$

причем область решения задачи является эллипсоидом вида  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$ . Доопределим функцию управляемости в точке ноль равенством  $\Theta(0) = 0$ .

Тогда в области  $Q$  управление вида

$$u(x) = M^{-1} \left( \Theta^{-\frac{1}{2}}(x)P_0D(\Theta(x))L - B_0^*LA \right) x \quad (1.44)$$

в области  $Q \setminus \{0\}$  решает для системы (1.31) задачу допустимого синтеза и удовлетворяет ограничениям  $\|u\| \leq d$ , причем время движения  $T(x_0)$  из произвольной точки  $x_0 \in Q$  в начало координат по траектории полной системы с управлением  $u(x)$  равно  $\Theta(x_0)$ .

В частности, если система (1.31) имеет вид

$$\dot{x} = (A_0 + K)x + B_0u, \quad (1.45)$$

где  $u \in \mathbb{R}^r$  — управление, удовлетворяющее ограничению  $\|u\| \leq 1$ , у матрицы  $K$  элементы, стоящие в строке с номером  $s_i$  (то есть в строке, содержащей управление) равны  $k_{s_i j}$ , а остальные элементы нулевые, то справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.5.** (Коробов, Скорик [86],[13, Теорема 2.3]). При  $x \neq 0$  определим функцию управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  как единственное положительное решение уравнения

$$2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x), \quad (1.46)$$

где постоянная  $a_0$  выбирается согласно неравенству

$$0 < a_0 \leq \frac{1}{\|F^{-1}\| \cdot (\|B_0^*F\| + 2 \max\{c^{n_1}, c\} \|B_0^*K\|)^2}, \quad (1.47)$$

причем область решения задачи является эллипсоидом вида  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$ . Доопределим функцию управляемости в точке ноль равенством  $\Theta(0) = 0$ .

Тогда в области  $Q$  управление вида

$$u(x) = - \left( \frac{1}{2} B_0^* D(\Theta(x)) F D(\Theta(x)) + B_0^* K \right) x \quad (1.48)$$

решает для системы (1.45) задачу локального позиционного синтеза непрерывного управления, удовлетворяющего ограничению  $\|u(x)\| \leq 1$ . Более того, выполняется равенство  $\dot{\Theta}(x) = -1$ , то есть функция управляемости  $\Theta(x)$  является временем движения из произвольной начальной точки  $x \in Q$  в начало координат.

В случае, если  $K \equiv 0$ , синтез глобальный.

В разделе 4 настоящей работы приведен процесс построения функции управляемости  $\Theta(x)$  и управления  $u(x)$ , решающего задачу локального позиционного синтеза ограниченного управления для полностью управляемой системы (1.31). Первая часть посвящена решению поставленной задачи для системы канонического вида с многомерным управлением. Затем решение задачи синтеза для произвольной линейной автономной полностью управляемой системы заменой переменных и введением нового управления сводится к решению задачи для системы канонического вида с многомерным управлением. Предложенный подход позволяет дать более широкий класс управлений, чем в работах [86],[13, Теорема 2.3].

В случае многомерного управления определение 1.2 имеет вид

**Определение 1.3.** Под робастной системой в случае многомерного управления будем понимать систему вида

$$\dot{x} = (A_0 + K + R(t, x))x + B_0 u, \quad (1.49)$$

где  $t \geq 0$ ,  $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q$  – это некоторая окрестность начала координат,  $u \in \mathbb{R}^r$  – многомерное управление, удовлетворяющее ограничению

$\|u\| \leq 1$ , матрица  $A_0$  задается формулой (1.38), матрица  $B_0$  задается формулой (1.36), матрица

$$R(t, x) = \text{diag}(R_1(t, x), \dots, R_r(t, x)) + \hat{R}(t, x), \quad (1.50)$$

$$R_i(t, x) = \begin{pmatrix} r_{(s_{i-1}+1)1} & r_{(s_{i-1}+1)2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{(s_{i-1}+2)1} & r_{(s_{i-1}+2)2} & r_{(s_{i-1}+2)3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{(s_i-2)1} & r_{(s_i-2)2} & r_{(s_i-2)3} & r_{(s_i-2)4} & \dots & r_{(s_i-2)(s_i-1)} & 0 \\ r_{(s_i-1)1} & r_{(s_i-1)2} & r_{(s_i-1)3} & r_{(s_i-1)4} & \dots & r_{(s_i-1)(s_i-1)} & r_{(s_i-1)s_i} \\ r_{s_i1} & r_{s_i2} & r_{s_i3} & r_{s_i4} & \dots & r_{s_i(s_i-1)} & r_{s_i s_i} \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

у матрицы  $\hat{R}(t, x)$  элементы, стоящие в строке с номером  $s_i$  (то есть в строке, содержащей управление) равны  $r_{s_i j}$ , а остальные элементы нулевые,  $r_{m j} = r_{m j}(t, x)$  – неизвестные функции, удовлетворяющие ограничению

$$\max_{1 \leq j \leq m+1 \leq n_i, i=1, \dots, r} |r_{m j}(t, x)| \leq \Delta.$$

В диссертационной работе в разделе 4 предлагается решение задачи синтеза для системы (1.49). В диссертационной работе построено *ограниченное управление*, переводящее произвольную начальную точку  $x_0 \in Q$  в начало координат за *конечное время* при неизвестной матрице  $R(t, x)$ , а также найдено  $\Delta$ .

### 1.5. Обзор литературы по теме решение задачи синтеза за конечное время и по теме робастности

Приведем теорему Красовского об асимптотической устойчивости.

**Теорема 1.6.** (Красовский [30, п. 2.3]) Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения  $\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, \dots, x_n)$  можно найти определенно-положительную в области  $\sum x_j^2 \leq \mu$  функцию  $V$  такую, что ее производная  $\dot{V}$  удовлетворяет в этой области двум условиям:

1)  $\dot{V} < 0$  вне  $\mathcal{K}$ , 2)  $\dot{V} = 0$  на  $\mathcal{K}$ , где  $\mathcal{K}$  – многообразие точек, не содержащее целых траекторий системы при  $0 \leq t < \infty$ , то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

В настоящее время развитие идеи попадания в точку покоя за конечное время рассматривается в разных формулировках [7, 13, 52, 59, 60, 62, 63, 65, 68, 76, 77, 86, 87, 88, 90, 91, 98, 103, 112, 113, 114].

Решение задачи синтеза в работе [52] (2006) повторяет результаты работы Коробова В. И. [9] (1979).

В работах Bhat [59, 60] (1998) рассмотрены системы без управления, а также не предложен алгоритм построения функции Ляпунова. В работе Cai [63] (2015) предложено управление для некоторого класса нелинейных систем с неизвестными нелинейностями. Управление переводит состояние замкнутой системы в некоторую окрестность начала координат за конечное время. В работе Ding [65] (2011) рассматривается задача стабилизации за конечное время для системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}_i = d_i(x)x_{i+1} + f_i(x_{i+1}, \dots, x_n, u), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = d_n(x)u + f_n(u), \end{cases}$$

в предположении, что  $0 < \underline{d}_i \leq d_i(x) \leq \bar{d}_i$  – непрерывные функции, которые не известны заранее. В отличие от работы [65] мы указываем границы изменения неизвестных возмущений  $d_i(x)$ , при этом мы допускаем, что возмущения могут зависеть от времени. В этой работе строится управление без наличия ограничений, что резко упрощает задачу.

В работе Du [68] (2011) рассматриваются треугольные системы, являющиеся частным случаем исследованных ранее систем из [8] (1973). В работе [8] Коробовым В. И. впервые был введен термин треугольные системы. В работе [68] для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u + f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

авторы приводят ограниченное управление, стабилизирующее систему за конечное время. Отметим, что преимущество данной работы по сравнению с [68] – это то, что применение метода функции управляемости позволяет построить управление, удовлетворяющее заранее заданным ограничениям, и получить оценку на время попадания из произвольной начальной точки в начало координат.

Методы решения задачи управляемости для треугольных систем получили широкое развитие в работах многих авторов, см. напр. [46, 66, 81, 82, 92, 109]. В работе [92] (2003) повторены результаты по треугольным системам, полученные ранее в [46] (1999).

В работе Hong [77] (2006) рассматривается задача негладкой стабилизации за конечное время некоторых нелинейных систем с параметрическими и динамическими определенностями, при этом управление, построенное в этой работе, является неограниченной функцией. Работа [77] опирается на технику дифференциальных включений. В работе Polyakov [91] (2015) применяется метод Ляпунова для стабилизации за конечное время системы  $\dot{x}(t) = A_0x + B_0u(t) + d(t, x(t))$ , где  $u(t)$  – скалярная неограниченная функция,  $d(t, x)$  – измеримая и равномерно ограниченная по времени функция. Решение основано на применении линейных матричных неравенств. В работе Su [112] (2015) решается задача стабилизации за конечное время системы второго порядка общего вида со скалярным управлением.

Перейдем к обзору литературы по теме робастности. В настоящее время опубликовано большое количество научных работ, посвященных этой теме. Исследование устойчивости семейств полиномов с интервальной неопределенностью впервые рассмотрел S. Faedo [69] (1953). Несмотря на наличие значительного числа предшествующих результатов, основополагающим утверждением теории робастности является теорема Харитоновна (1978), впервые сформулированная в работе [49]. В настоящее время выделилось три направления в развитии теории робастности. Ис-

торически первый из них базируется на понятии многомерной границы устойчивости [106]. Второй подход основан на концепции структурированного сингулярного числа [67], соответствующие алгоритмы включены в пакет  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox системы MATLAB. И, наконец, третий подход связан с применением линейных матричных неравенств. Термин “линейные матричные неравенства” введен в теорию управления В. А. Якубовичем [53] (хотя первым линейным матричным неравенством может считаться неравенство Ляпунова, сформулированное в 1892 г. в связи с анализом устойчивости [25]). В настоящее время этот аппарат получил широкое развитие; в [61] показано, что многие задачи теории управления могут формулироваться на языке линейных матричных неравенств. Среди работ последних лет можно отметить в [2, 7, 27, 28, 29, 34, 88, 90, 91, 103]. Решения этих неравенств формируют общую функцию Ляпунова для семейства систем, причем для их нахождения разработаны достаточно эффективные средства LMI Toolbox системы MATLAB. Среди наиболее известных результатов можно отметить так называемую реберную теорему, полученную Bartlett в 1988 [55] и графический критерий робастной устойчивости интервальных полиномов, полученный Поляком в 1990 [33].

#### 1.6. Устойчивость интервальных полиномов и интервальных матриц

Приведем некоторые факты из теории устойчивости интервальных полиномов. Рассмотрим полином с постоянными коэффициентами

$$\tilde{h}(\lambda) = h_n \lambda^n + h_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + h_1 \lambda + h_0. \quad (1.52)$$

**Определение 1.4.** [36] Полином (1.52) называется устойчивым, если все его корни лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Для суждения об устойчивости нет необходимости вычислять корни полинома. Достаточно лишь установить их расположение на комплексной



плоскости. Правила, позволяющие это сделать без вычисления корней, называются критериями устойчивости. Обзор критериев можно найти, например в [31, 36]. Приведем лишь некоторые утверждения о устойчивости.

**Лемма 1.1.** (Стодола [36, стр. 14]) Для устойчивости многочлена (1.52) с вещественными коэффициентами при  $h_n > 0$  необходимо, чтобы все его коэффициенты  $h_i$  были положительны.

**Лемма 1.2.** (Следствие из критерия Раусса [31, стр. 159]). Если все коэффициенты полинома положительны, то все вещественные корни, если она существуют, отрицательны (так называемые "левые" корни). Комплексные корни могут быть "правыми."

Отметим, что теория устойчивости полиномов активно развивается в последнее время (см., напр. [79]).

В случае, если коэффициенты полинома не являются постоянными, основополагающей работой в теории устойчивости интервальных полиномов является теорема Харитонова [49] (1978).

**Определение 1.5.** [49] Полином (1.52) называется интервальным, если  $\underline{h}_i \leq h_i \leq \bar{h}_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

**Теорема 1.7.** (Харитонов [49]) Для робастной устойчивости интервального полинома (1.52) необходима и достаточна устойчивость четырех полиномов (ниже выписаны лишь их коэффициенты):

$$\begin{aligned}
 P_1 &: \underline{h}_0 \underline{h}_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3 \underline{h}_4 \underline{h}_5 \dots \\
 P_2 &: \underline{h}_0 \bar{h}_1 \bar{h}_2 \underline{h}_3 \underline{h}_4 \bar{h}_5 \dots \\
 P_3 &: \bar{h}_0 \bar{h}_1 \underline{h}_2 \underline{h}_3 \bar{h}_4 \bar{h}_5 \dots \\
 P_4 &: \bar{h}_0 \underline{h}_1 \underline{h}_2 \bar{h}_3 \bar{h}_4 \underline{h}_5 \dots
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

Эти полиномы называются полиномами Харитонова.

**Определение 1.6.** [110] Интервальный полином (1.52) называется аperiодичным, если все его корни вещественные и лежат в левой полуплоскости.

**Теорема 1.8.** (Soh [110]) Для робастной апериодичности интервального полинома (1.52) необходимо и достаточно, чтобы два полинома с коэффициентами

$$\begin{aligned} P_1 &: \underline{h}_0 \bar{h}_1 \underline{h}_2 \bar{h}_3 \dots \\ P_2 &: \bar{h}_0 \underline{h}_1 \bar{h}_2 \underline{h}_3 \dots \end{aligned} \quad (1.54)$$

были апериодическими.

Обзор литературы по интервальному анализу полиномов и алгоритмах исследования полиномов на устойчивость можно найти в [6].

Перейдем к обзору литературы по устойчивости матриц.

**Теорема 1.9.** (Хорн и др [50, глава 6.3]) Пусть  $K$  – нормальная матрица (т. е.  $KK^* = K^*K$ ) с собственными значениями  $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$  и  $\mathcal{E}$  – произвольная матрица. Если  $\lambda$  – собственное значение матрицы  $K + \mathcal{E}$ , то найдется  $\hat{\lambda}_i$ , для которого

$$|\lambda - \hat{\lambda}_i| \leq \|\mathcal{E}\|_2. \quad (1.55)$$

В работе [26] даются формулы для вычисления производных собственного значения матрицы, зависящей от параметров. Предположим, что матрица  $A$  гладко зависит от вектора вещественных параметров  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . Функция  $A(p)$  называется многопараметрическим семейством матриц. Собственные значения семейства матриц являются непрерывными функциями вектора параметров. Пусть  $\lambda(p)$  – простое собственное значение матрицы  $A(p)$ .

**Теорема 1.10.** (Майлыбаев и др. [26, Теорема 7]). Рассмотрим точку  $p_0$  в пространстве параметров и предположим, что  $\lambda_0$  – простое собственное значение матрицы  $A_0 = A(p_0)$ . Обозначим через  $u_0$  правый собственный вектор, отвечающий  $\lambda_0$ , а через  $v_0$  левый собственный вектор, отвечающих  $\lambda_0$ , причем выполнено условие нормировки  $v_0^* u_0 = 1$ . Простое собственное значение  $\lambda$  матрицы  $A$ , гладко зависящей от вектора параметров  $p$ , является гладкой функцией  $p$ , и ее производные по параметрам

в точке  $p = p_0$  определяются формулами

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = v_0^* \frac{\partial A}{\partial p_i} u_0, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_i \partial p_j} = v_0^* \left( \frac{\partial^2 A}{\partial p_i \partial p_j} u_0 + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial u}{\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial u}{\partial p_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} \frac{\partial u}{\partial p_j} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_j} \frac{\partial u}{\partial p_i} \right), \quad (1.56)$$

где производная собственного вектора  $u(p)$  в точке  $p_0$  имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial p_i} = (A_0 - \lambda_0 I + u_0 v_0^*)^{-1} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} I - \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) u_0.$$

Заметим, что формула для нахождения первой производной была известна и ранее (Хорн и др [50, глава 3.6.12], 1989)

**Теорема 1.11.** (Майлыбаев и др. [26, Теорема 11]). Пусть  $\lambda_0$  - простое двукратное собственное значение матрицы  $A_0 = A(p_0)$ . Обозначим через  $u_1, u_2$  два линейно независимых правых собственных вектора, отвечающих  $\lambda_0$ , а через  $v_1, v_2$  два левых собственных вектора, отвечающих  $\lambda_0$ , причем выполнены условия нормировки  $v_1^* u_1 = v_2^* u_2 = 1$ ,  $v_1^* u_2 = v_2^* u_1 = 0$ . Тогда бифуркация  $\lambda_0$  при возмущении параметра вдоль кривой  $p = p_0 + \varepsilon e$  с направлением  $e$  описывается асимптотической формулой  $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \bar{o}(\varepsilon)$  (ряд Ньютона-Пьюизо), где два значения  $\lambda_1$  являются собственными значениями матрицы

$$\begin{pmatrix} v_1^* \frac{\partial A(p)}{\partial p} u_1 e & v_1^* \frac{\partial A(p)}{\partial p} u_2 e \\ v_2^* \frac{\partial A(p)}{\partial p} u_1 e & v_2^* \frac{\partial A(p)}{\partial p} u_2 e \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

**Определение 1.7.** [115] Пусть  $A^m$  – матрица с элементами  $a_{ij}^m$ ,  $A^M$  – матрица с элементами  $a_{ij}^M$ . Интервальной матрицей  $\mathbf{A} = [A^m, A^M]$  называется семейство матриц вида  $[A^m, A^M] = \{A : a_{ij}^m \leq a_{ij} \leq a_{ij}^M, 1 \leq i, j \leq n\}$ . Обозначим  $A_c = (A^m + A^M)/2$ .

**Определение 1.8.** Интервальная матрица называется устойчивой, если устойчива каждая матрица из этого семейства.

Обозначим элементы интервальной матрицы  $A$  размера  $n \times n$  через  $a_{ij}$ . Высказывалось утверждение, что если перебрать все  $2^{n^2}$  матриц, в которых каждое  $a_{ij}$  принимает одно из граничных значений (эти матрицы названы вершинными), то устойчивость этих матриц влечет устойчивость семейства  $A$  (Bialas [58], 1983). Позже оказалось, что этот результат ошибочен (Barmish [57], 1984). В работе [57] приведено семейство матриц, вершинные матрицы которого устойчивы, но при этом указана матрица семейства, являющаяся неустойчивой. Однако в некоторых частных случаях устойчивость вершинных матриц влечет за собой устойчивость интервальной матрицы, например, для матрицы с вещественными собственными значениями (Hollot [75], 1987), для симметрической матрицы (Soh [111], 1990), для матриц размера  $2 \times 2$  (Barmish [56], 1994). В 1992 Rohn [99] доказал, что для матриц с вещественными собственными значениями число вершинных матриц, которые нужно проверять на устойчивость, можно уменьшить до  $2^{n-1}$ . Обзор результатов об устойчивости интервальных матриц можно найти в [108].

**Теорема 1.12.** (Wang и др. [115]) Пусть для интервальной матрицы  $[A^m, A^M]$  выполнено:

- 1) матрицы  $A^m$  и  $A^M$  являются симметричными;
- 2) матрица  $A_c$  устойчива;
- 3)  $\|A^M - A^m\|_\infty < 1/\|Q\|_\infty$ , где  $Q$  – решение матричного уравнения Ляпунова  $QA_c + A_cQ = -I$ .

Тогда интервальная матрица  $[A^m, A^M]$  устойчива.

В работе [72] рассматривается интервальная матрица вида  $A_I = A_c + \delta A$ , причем элементы матрицы  $\delta A$  удовлетворяют условию  $|\delta a_{ij}| \leq \Delta a_{ij}$ . Обозначим через  $\Delta A$  матрицу с элементами  $\Delta a_{ij}$ .

**Теорема 1.13.** (Juang и др. [73], Franze и др. [72]) Пусть  $A_c$  диагонализуема,  $\sigma(A_c) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ,  $U$  – матрица, столбцами которой явля-

ются собственные векторы матрицы  $A_c$ . Обозначим  $Z = |U^{-1}| \cdot \Delta A \cdot |U|$ . Тогда собственные значения интервальной матрицы  $A_c + \delta A$  принадлежат объединению шаров с центрами  $\lambda_i$  и радиусами  $\rho_i^r = \sum_{j=1}^n z_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$  (сумма элементов строки матрицы  $Z$ ), а также объединению шаров с центрами  $\lambda_i$  и радиусами  $\rho_i^c = \sum_{j=1}^n z_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, n$  (сумма элементов столбца матрицы  $Z$ ).

В работе [100] рассматривается симметричная интервальная матрица, т. е.  $A^m = A_c - \Delta A$ ,  $A^M = A_c + \Delta A$ .

**Теорема 1.14.** (Rohn [100]) Пусть  $\Delta A$  – матрица, каждый элемент которой неотрицателен. Пусть  $A_c$  и  $\Delta A$  являются симметричными матрицами и  $A_c$  устойчива, причем выполнено неравенство

$$\rho(|A_c^{-1}| \Delta A) < 1. \quad (1.58)$$

Тогда интервальная матрица  $[A_c - \Delta A; A_c + \Delta A]$  устойчива.

В работе [102] вводится понятие радиуса регулярности.

**Определение 1.9.** [102] Интервальная матрица

$$\mathbf{A} = [A_c - \Delta A; A_c + \Delta A]$$

называется регулярной, если каждая матрица семейства невырождена, и называется сингулярной в противном случае (т. е. если содержит хотя бы одну вырожденную матрицу).

**Лемма 1.3.** (Rohn [100]) Симметричная интервальная матрица устойчива тогда и только тогда, когда она регулярна и содержит по крайней мере одну устойчивую симметричную матрицу.

**Определение 1.10.** [102] Для квадратной интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  число

$$d(\mathbf{A}) = \inf\{\varepsilon \geq 0; [A_c - \varepsilon \Delta, A_c + \varepsilon \Delta] \text{ сингулярна}\}.$$

называется радиусом регулярности. Это понятие было независимо введено Safonov [106] (1981) и Doyle [67] (1982).

**Теорема 1.15.** (Rohn [102]) Если матрица  $A_c$  невырождена, то

$$\frac{1}{\rho(|A_c^{-1}|\Delta)} \leq d(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{\max_j (|A_c^{-1}|\Delta)_{jj}} \quad (1.59)$$

**Теорема 1.16.** (Rohn [101]) Пусть

$$A_c = \frac{1}{2}(\underline{M} + \overline{M}), \quad \Delta = \frac{1}{2}(\overline{M} - \underline{M}),$$

матрицы  $M_c$  и  $M_\Delta$  задаются формулой

$$M_c = \frac{1}{2}(A_c + A_c^*), \quad M_\Delta = \frac{1}{2}(\Delta + \Delta^*). \quad (1.60)$$

Тогда спектр интервальной матрицы  $[\underline{M}; \overline{M}]$  лежит на отрезке  $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ , где

$$\underline{\lambda} = \lambda_{\min}(M_c) - \rho(M_\Delta), \quad \overline{\lambda} = \lambda_{\max}(M_c) + \rho(M_\Delta). \quad (1.61)$$

**Теорема 1.17.** (Fu и др. [71]) Пусть даны устойчивая матрица  $M_0$  и произвольная матрица  $M_1$ . Тогда границы наибольшего интервала  $p \in (p_{\min}; p_{\max})$ , при которых будет устойчива каждая матрица вида  $M_0 + pM_1$ , задаются формулами

$$p_{\min} = \frac{1}{\lambda_{\min}(-M_0^{-1}M_1)}, \quad p_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\max}(-M_0^{-1}M_1)}.$$

Заметим, что этот результат был впервые открыт Гантмахером [5, глава 10, п. 7].

Пусть интервальная матрица  $\mathbf{A}$  состоит из элементов  $a_{ij}$ , причем  $a_{ij}^{(-)} \leq a_{ij} \leq a_{ij}^{(+)}$ . Пусть  $\mathcal{H}$  совокупность всех векторов  $h = \{h_1, \dots, h_n\}$ , компоненты  $h_i$  которых равны  $\pm 1$ . Для каждого  $h \in \mathcal{H}$  определим матрицу  $B(h) = (b_{ij}(h))_{i,j=1}^n$ , где

$$b_{ij}(h) = \begin{cases} a_{ij}^{(-)} & \text{если } h_i h_j = 1, \\ a_{ij}^{(+)} & \text{если } h_i h_j = -1. \end{cases} \quad (1.62)$$

Матрицы  $B(h)$  называются ключевыми матрицами семейства  $\mathbf{A}$  [4]. Количество этих матриц равно  $2^{n-1}$ , где  $n$  – размерность квадратной матрицы  $\mathbf{A}$ .

**Теорема 1.18.** (Бобылев и др. [4]) Пусть все ключевые матрицы  $B(h)$  семейства  $A$  положительно определены. Тогда все матрицы семейства  $A$  положительно определены.

В [34, Глава 7.2] решается задача устойчивости аффинных семейств. А именно: пусть  $A_0$  и  $A_i$  – заданные матрицы. Аффинное семейство – это семейство матриц вида

$$A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^l q_i A_i, \quad |q_i| \leq \gamma, \quad i = 1, \dots, l.$$

Предлагается несколько подходов к нахождению  $\gamma$ . Доказано, что проблема робастной устойчивости имеет полиномиальную сложность (NP сложность) [89].

### 1.7. Работы автора по теме диссертации

Результаты диссертации нашли отражение в 22 научных публикациях, в том числе в 7 статьях [15, 19, 20, 21, 40, 44, 83] в специализированных изданиях и тезисах выступлений на 14 конференциях [16, 38, 39, 41, 42, 43, 45, 80, 84, 93, 94, 95, 96, 97], а также в одном препринте [85].

### 1.8. Выводы к разделу

В данном разделе представлен обзор литературы по теме диссертации, приведены основные для работы понятия и определения, обоснован выбор направлений исследований, сформулирована постановка задач.

В виду того, что решение задачи синтеза для произвольной линейной системы как с одномерным, так и с многомерным управлением может быть сведено к решению задачи синтеза для канонической системы, именно такая система представляет интерес для дальнейшего исследования, поэтому в диссертационной работе рассматриваются возмущения именно канонических систем с одномерным и многомерным управлением.

## РАЗДЕЛ 2

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГЛОБАЛЬНОГО СИНТЕЗА ДЛЯ РОБАСТНЫХ СИСТЕМ

## 2.1. Решение задачи глобального синтеза для робастной системы с одним возмущением

Перейдем к изложению основных результатов диссертации.

В работе [83] рассмотрена задача глобального позиционного синтеза ограниченного управления для робастной системы

$$\dot{x}_1 = (1 + p(t, x_1, x_2, \dots, x_n))x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = u. \quad (2.1)$$

где  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u$  – скалярное управление, удовлетворяющее ограничению  $|u| \leq 1$ ,  $p(t, x)$  – возмущение, удовлетворяющее ограничению  $d_1 \leq p(t, x) \leq d_2$ . Будем считать, что функция  $p(t, x)$  неизвестна. Требуется построить *ограниченное управление*, переводящее произвольную начальную точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  в начало координат за *конечное время* при любом возмущении  $p(t, x)$ , удовлетворяющем ограничению  $d_1 \leq p(t, x) \leq d_2$ , а также найти  $d_1$  и  $d_2$ . В отличие от [34, глава 6.1], где параметр  $p$  постоянен, мы предполагаем, что параметр  $p$  может меняться в заданных пределах непрерывным образом.

Вначале опишем условия, которым должно удовлетворять возмущение  $p(t, x)$ .

**Определение 2.1.** Для пары чисел  $d_1 < d_2$  через  $\mathcal{P}_{d_1, d_2}$  обозначим класс функций  $p(t, x) : [0; +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1)  $p(t, x)$  непрерывна по  $t$  и  $x$ ;



2) в каждой области

$$K_1(t_1, \rho_2) = \{(t, x) : 0 \leq t \leq t_1, \|x\| \leq \rho_2\}, \rho_2 > 0, t_1 > 0$$

функция  $p(t, x)$  удовлетворяет условию Липшица

$$|p(t, x'') - p(t, x')| \leq \ell_1(t_1, \rho_2) \|x'' - x'\|$$

(где  $\ell_1(t_1, \rho_2)$  зависит от функции  $p$ );

3) для всех  $(t, x) \in [0; +\infty) \times \mathbb{R}^n$  функция  $p(t, x)$  удовлетворяет ограничению  $d_1 \leq p(t, x) \leq d_2$ .

При  $p(t, x) \equiv 0$  система (2.1) совпадает с канонической системой (1.17). Она является полностью управляемой. В теореме 1.3 дано управление  $u(x)$ , решающее задачу синтеза для канонической системы с одномерным управлением.

**Определение 2.2.** Под  $(d_1, d_2)$  – глобальным позиционным синтезом ограниченного управления для робастных систем будем понимать нахождение таких  $d_1 < 0$  и  $d_2 > 0$ , что для всех возмущений  $p(t, x) \in \mathcal{P}_{d_1, d_2}$  траектория  $x(t)$  замкнутой системы с управлением  $u = u(x)$

$$\dot{x} = (A_0 + p(t, x)R)x + b_0u(x), \quad (2.2)$$

выходящая из произвольной начальной точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , оканчивалась в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T(x_0, p(t, x))$ , то есть  $\lim_{t \rightarrow T(x_0, p(t, x))} x(t) = 0$ . Заметим, что в системе (2.1) первая координата не управляема (при  $p(t, x) \equiv -1$ ), то есть не при всех  $d_1$  и  $d_2$  задача разрешима. В случае, если начальная точка  $x_0 \in Q \subset \mathbb{R}^n$ , где  $Q$  – это некоторая окрестность начала координат, синтез называется *локальным*.

**Замечание 2.1.** Эту задачу можно трактовать с позиции теории дифференциальных игр. Первый игрок выбирает стратегию (управление)  $u(x)$ , а второй игрок выбирает стратегию (возмущение)  $p(t, x)$  [1, 22]. Работы [11, 12] посвящены решению задачи синтеза в дифференциальных играх с помощью функции управляемости.

Система (2.1) в матричном виде представляет собой (1.25), где матрицы  $A_0$  и  $b_0$  задаются формулой (1.19), а матрица  $R$  имеет вид (1.26).

Обозначим  $y(\Theta, x) = D(\Theta)x$ . Тогда уравнение (1.22) принимает вид

$$2a_0\Theta = (Fy(\Theta, x), y(\Theta, x)). \quad (2.3)$$

Обозначим  $H = \text{diag} \left( -\frac{2n-2i+1}{2} \right)_{i=1}^n$ ,

$$\begin{aligned} F^1 &= F - FH - HF = ((2n - i - j + 2)f_{ij})_{i,j=1}^n = \\ &= \begin{pmatrix} 2nf_{11} & (2n-1)f_{12} & \dots & (n+1)f_{1n} \\ (2n-1)f_{21} & (2n-2)f_{22} & \dots & nf_{2n} \\ & & \dots & \\ (n+1)f_{1n} & nf_{2n} & \dots & 2f_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В случае, если матрица  $F^1$  положительно определена, то уравнение (2.3) имеет единственное положительное решение  $\Theta = \Theta(y)$  [13, стр. 24]. Более того, функция  $\Theta(y)$  непрерывна всюду и непрерывно дифференцируема за исключением, быть может, точки  $y = 0$ . Поскольку функция управляемости является временем движения, то матрица  $F^1$  положительно определена [13, стр. 88].

Выберем постоянную  $a_0$ , удовлетворяющую неравенству (1.23). Рассмотрим замкнутую систему (2.2), где  $u(x)$  задается формулой (1.24),  $\Theta(x(t))$  – единственное положительное решение уравнения (1.22). Обозначим через  $x(t)$  траекторию системы (2.2) и найдем производную в силу системы  $\dot{\Theta} = \frac{d}{dt}\Theta(x(t))$ . Из уравнения (2.3) имеем

$$2a_0\dot{\Theta} = (F\dot{y}(\Theta, x), y(\Theta, x)) + (Fy(\Theta, x), \dot{y}(\Theta, x)). \quad (2.5)$$

Найдем  $\dot{y}(\Theta, x)$ . Имеем:  $\frac{d}{d\Theta}D(\Theta) = \frac{1}{\Theta}HD(\Theta)$ , откуда

$$\begin{aligned} \dot{y}(\Theta, x) &= \dot{D}(\Theta)x + D(\Theta)\dot{x} = \frac{\dot{\Theta}}{\Theta}Hy(\Theta, x) + D(\Theta)A_0D^{-1}(\Theta)y(\Theta, x) + \\ &+ p(t, x)D(\Theta)RD^{-1}(\Theta)y(\Theta, x) - \frac{1}{2}D(\Theta)b_0b_0^*D(\Theta)Fy(\Theta, x). \end{aligned}$$

Обозначим

$$S(\Theta) = \Theta(FD(\Theta)RD^{-1}(\Theta) + D^{-1}(\Theta)R^*D(\Theta)F). \quad (2.6)$$

Используя [13, стр. 109], можно установить тождество

$$D(\Theta)RD^{-1}(\Theta) = \Theta^{-1}R$$

(это связано с тем, что матрица  $R$  в этом случае имеет такую же структуру, как и  $A_0$ ), откуда

$$S(\Theta) = S_0 = FR + R^*F. \quad (2.7)$$

В дальнейшем мы существенно пользуемся тем, что матрица  $S$  не зависит от  $\Theta$ . Укажем явный вид матрицы  $S_0$ :

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & f_{11} & 0 & \dots & 0 \\ f_{11} & 2f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1n} \\ 0 & f_{13} & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & f_{1n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя равенства [13, стр. 109]

$$D(\Theta)A_0D^{-1}(\Theta) = \frac{1}{\Theta}A_0, \quad D(\Theta)b_0 = \Theta^{-1/2}b_0, \quad FA_0 + A_0^*F - Fb_0b_0^*F = -F^1,$$

из равенства (2.5) получаем

$$\dot{\Theta}(2a_0 - \frac{1}{\Theta}((FH + HF)y(\Theta, x), y(\Theta, x))) = \frac{1}{\Theta}((-F^1 + p(t, x)S_0)y(\Theta, x), y(\Theta, x)).$$

Принимая во внимание уравнение (2.3), получаем, что производная функции управляемости в силу системы (2.2) имеет вид

$$\dot{\Theta} = \frac{(-F^1 + p(t, x)S_0)y(\Theta, x), y(\Theta, x)}{(F^1y(\Theta, x), y(\Theta, x))}. \quad (2.8)$$

**Теорема 2.1.** Пусть  $\tilde{d}_1^0$  и  $\tilde{d}_2^0$  – наименьший и наибольший (соответственно) корни уравнения  $\det(F^1 - \tilde{p}S_0) = 0$  относительно  $\tilde{p}$ . Пусть  $0 < \gamma_1 < 1$ ,  $\gamma_2 > 1$ . Пусть

$$d_1^0 = \max\{(1 - \gamma_1)\tilde{d}_1^0; (1 - \gamma_2)\tilde{d}_2^0\}, \quad d_2^0 = \min\{(1 - \gamma_1)\tilde{d}_2^0; (1 - \gamma_2)\tilde{d}_1^0\}. \quad (2.9)$$

Пусть при  $x \neq 0$  функция управляемости  $\Theta(x)$  есть единственное положительное решение уравнения (1.22) при  $a_0$ , удовлетворяющем неравенству (1.23).

Тогда для всех  $d_1$  и  $d_2$  таких, что  $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$  управление, задаваемое формулой (1.24), решает задачу  $(d_1, d_2)$  – глобального позиционного синтеза для робастной системы (2.1). При этом траектория замкнутой системы (2.2), выходящая из произвольной начальной точки  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , оканчивается в точке  $x_1(T) = 0$  в некоторый конечный момент времени  $T = T(x_0, d_1, d_2)$ , для которого выполнена оценка

$$\frac{\Theta(x_0)}{\gamma_2} \leq T(x_0, d_1, d_2) \leq \frac{\Theta(x_0)}{\gamma_1}. \quad (2.10)$$

**Замечание 2.2.** Заметим, что уравнение  $\det(F^1 - \tilde{p}S_0) = 0$  квадратное относительно  $\tilde{p}$ .

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 2.1.** Пусть матрица  $\tilde{\Delta}_n$  задается формулой

$$\tilde{\Delta}_n = \begin{pmatrix} 2nf_{11} & -f_{11} & (2n-2)f_{13} & \dots & (n+1)f_{1n} \\ -f_{11} & 0 & -f_{13} & \dots & -f_{1n} \\ (2n-2)f_{13} & -f_{13} & (2n-4)f_{33} & \dots & (n-1)f_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n+1)f_{1n} & -f_{1n} & (n-1)f_{3n} & \dots & 2f_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Тогда  $\det \tilde{\Delta}_n < 0$ .

**Доказательство леммы.** Зафиксируем  $n \geq 2$  (размерность системы). Переставим первую и вторую строку, а также первый и второй столбец в

матрице  $\tilde{\Delta}_n$ , тогда  $\det \tilde{\Delta}_n =$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & -f_{11} & -f_{13} & -f_{14} & \dots & -f_{1n} \\ -f_{11} & 2nf_{11} & (2n-2)f_{13} & (2n-3)f_{14} & \dots & (n+1)f_{1n} \\ -f_{13} & (2n-2)f_{13} & (2n-4)f_{33} & (2n-5)f_{34} & \dots & (n-1)f_{3n} \\ -f_{14} & (2n-3)f_{14} & (2n-5)f_{34} & (2n-6)f_{44} & \dots & (n-2)f_{4n} \\ & & \dots & & & \\ -f_{1n} & (n+1)f_{1n} & (n-1)f_{3n} & (n-2)f_{4n} & \dots & 2f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для  $k = 2, \dots, n$  введем следующие матрицы

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & -f_{11} \\ -f_{11} & 2nf_{11} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} 0 & -f_{11} & -f_{13} & \dots & -f_{1k} \\ -f_{11} & 2nf_{11} & (2n-2)f_{13} & \dots & (k+1)f_{1k} \\ -f_{13} & (2n-2)f_{13} & (2n-4)f_{33} & \dots & (k-1)f_{3k} \\ & & \dots & & \\ -f_{1k} & (k+1)f_{1k} & (k-1)f_{3k} & \dots & (n-k+2)f_{kk} \end{pmatrix}, \quad k \geq 3,$$

то есть  $\Delta_k$  – это первая главная подматрица матрицы  $\Delta_n$ . Также рассмотрим матрицу  $F^1$ , задаваемую формулой (2.4). Переставим первую и вторую строку, а также первый и второй столбец в этой матрице. В результате получим матрицу

$$\Phi = \begin{pmatrix} (2n-2)f_{22} & (2n-1)f_{21} & (2n-3)f_{23} & \dots & nf_{2n} \\ (2n-1)f_{12} & 2nf_{11} & (2n-2)f_{13} & \dots & (n+1)f_{1n} \\ (2n-3)f_{23} & (2n-2)f_{13} & (2n-4)f_{33} & \dots & (n-1)f_{3n} \\ & & \dots & & \\ nf_{2n} & (n+1)f_{1n} & (n-1)f_{3n} & \dots & 2f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как  $F^1 > 0$  [13, стр. 88], то  $\Phi > 0$ . Следуя [5, Глава 2. п. 3], для

матрицы  $Z$  с элементами  $z_{ij}$  введем обозначения

$$Z \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_q \\ j_1, \dots, j_q \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z_{i_1 j_1} & z_{i_2 j_2} & \dots & z_{i_1 j_q} \\ & & \dots & \\ & & & \\ z_{i_q j_1} & z_{i_q j_2} & \dots & z_{i_q j_q} \end{pmatrix}.$$

Докажем, что  $\det \Delta_k < 0$  для всех  $k = 2, \dots, n$ . Доказательство проведем индукцией по  $k$ . Для  $k = 2$  имеем

$$\det \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -f_{11} \\ -f_{11} & 2nf_{11} \end{pmatrix} = -f_{11}^2.$$

Так как  $F^1 > 0$ , то  $f_{11} > 0$ , тогда  $\det \Delta_2 < 0$ .

Пусть  $k \geq 3$  и  $\det \Delta_i < 0$  для  $i = 2, \dots, k-1$ . Введем следующие обозначения для главных миноров матрицы  $\Delta_n$  и примем во внимание, что элементы матрицы  $\Phi$  совпадают с соответствующими элементами матрицы  $\Delta_n$ , исключая первую строку и первый столбец:

$$\Delta_{1,k} = \Delta_k \begin{pmatrix} 2, 3, \dots, k \\ 1, 2, \dots, k-1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{k,1} = \Delta_k \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k-1 \\ 2, 3, \dots, k \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{k,k} = \Delta_k \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k-1 \\ 1, 2, \dots, k-1 \end{pmatrix} = \det \Delta_{k-1},$$

$$\Delta = \Delta_k \begin{pmatrix} 2, \dots, k-1 \\ 2, \dots, k-1 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} 2, \dots, k-1 \\ 2, \dots, k-1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{1,1} = \Delta_k \begin{pmatrix} 2, \dots, k \\ 2, \dots, k \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} 2, \dots, k \\ 2, \dots, k \end{pmatrix}.$$

Так как  $\Phi > 0$ , то  $\Delta > 0$  и  $\Delta_{1,1} > 0$ . Так как матрица  $\Delta_n$  симметрична, то  $\Delta_{1,k} = \Delta_{k,1}$ .

Применим детерминатное тождество Сильвестра [5, Глава 2. п. 3] к матрице  $\Delta_k$ , которое в нашем случае представляет собой

$$\det \begin{pmatrix} \Delta_{k,k} & \Delta_{1,k} \\ \Delta_{k,1} & \Delta_{1,1} \end{pmatrix} = \det \Delta_k \Delta,$$

то есть

$$\Delta_{k,k}\Delta_{1,1} - \Delta_{1,k}^2 = \det \Delta_k \Delta.$$

Так как  $\Delta > 0$ ,  $\Delta_{1,1} > 0$  и  $\Delta_{k,k} < 0$  по предположению индукции, то  $\det \Delta_k < 0$ .

Поэтому  $\det \Delta_k < 0$  для всех  $k = 2, \dots, n$ . Так как  $\det \Delta_n = \det \tilde{\Delta}_n$ , то  $\det \tilde{\Delta}_n < 0$ . Лемма доказана.  $\square$

**Доказательство теоремы.** Предположим, что  $p(t, x) \in \mathcal{P}_{d_1, d_2}$ , где  $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$ . Обозначим  $y = y(\Theta, x)$ . Установим, что  $\dot{\Theta}$ , определяемое (2.8), удовлетворяет неравенству

$$-\gamma_2 < \dot{\Theta} < -\gamma_1. \quad (2.12)$$

Так как  $F^1 > 0$  [13, стр. 88], то умножим (2.8) на  $(F^1 y, y)$  и перепишем требуемое неравенство в виде

$$(-\gamma_2 F^1 y, y) < ((-F^1 + p(t, x)S_0)y, y) < (-\gamma_1 F^1 y, y),$$

или, что тоже самое,

$$(((\gamma_1 - 1)F^1 + p(t, x)S_0)y, y) < 0, \quad (((1 - \gamma_2)F^1 - p(t, x)S_0)y, y) < 0. \quad (2.13)$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$((1 - \gamma_1)F^1 - pS_0) > 0, \quad ((1 - \gamma_2)F^1 - pS_0) < 0 \text{ для всех } d_1^0 < p = p(t, x) < d_2^0,$$

или, что то же самое,

$$(F^1 - \tilde{p}_1 S_0) > 0 \quad \text{для всех } \frac{d_1^0}{(1 - \gamma_1)} < \tilde{p}_1 < \frac{d_2^0}{(1 - \gamma_1)}$$

и

$$(F^1 - \tilde{p}_2 S_0) > 0 \quad \text{для всех } \frac{d_2^0}{(1 - \gamma_2)} < \tilde{p}_2 < \frac{d_1^0}{(1 - \gamma_2)}.$$

Принимая во внимание (2.9), вместо этого докажем, что

$$(F^1 - \tilde{p} S_0) > 0 \quad \text{для всех } \tilde{d}_1^0 < \tilde{p} < \tilde{d}_2^0, \quad (2.14)$$

или, что то же самое, что  $(F^1 - \tilde{p} S_0) > 0$  для всех  $\tilde{p}$  таких, что

$$\min \left\{ \frac{d_1^0}{(1 - \gamma_1)}, \frac{d_2^0}{(1 - \gamma_2)} \right\} < \tilde{p} < \max \left\{ \frac{d_2^0}{(1 - \gamma_1)}, \frac{d_1^0}{(1 - \gamma_2)} \right\}.$$

Матрица  $(F^1 - \tilde{p}S_0)$  имеет вид  $F^1 - \tilde{p}S_0 =$

$$= \begin{pmatrix} 2nf_{11} & (2n-1)f_{12} - \tilde{p}f_{11} & \dots & (n+1)f_{1n} \\ (2n-1)f_{12} - \tilde{p}f_{11} & (2n-2)f_{22} - 2\tilde{p}f_{12} & \dots & nf_{2n} - \tilde{p}f_{1n} \\ (2n-2)f_{13} & (2n-3)f_{23} - \tilde{p}f_{13} & \dots & (n-1)f_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n+1)f_{1n} & nf_{2n} - \tilde{p}f_{1n} & \dots & 2f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Положим  $g(\tilde{p}) = \det(F^1 - \tilde{p}S_0)$ ; очевидно, что  $g(\tilde{p})$  – это квадратичная функция. Найдем ее старший коэффициент. Для этого мы разделим вторую строку и второй столбец матрицы  $(F^1 - \tilde{p}S_0)$  на  $\tilde{p}$  и потом устремим  $\tilde{p}$  к  $\infty$ . Получим, что коэффициент при  $\tilde{p}^2$  в полиноме  $g(\tilde{p})$  равен  $\det \tilde{\Delta}_n$ , где матрица  $\tilde{\Delta}_n$  задается формулой (2.11). В силу леммы 2.1 имеем  $\det \tilde{\Delta}_n < 0$ .

Поэтому функция  $g(\tilde{p})$  квадратичная по переменной  $\tilde{p}$  с отрицательным старшим коэффициентом. Напомним, что по определению  $\tilde{d}_1^0$  и  $\tilde{d}_2^0$  – это наименьший и наибольший корни уравнения  $\det(F^1 - \tilde{p}S_0) = g(\tilde{p}) = 0$ . Более того,  $g(0) = \det F^1 > 0$  так как  $F^1 > 0$ . Поэтому,  $\tilde{d}_1^0 < 0$ ,  $\tilde{d}_2^0 > 0$  и  $\det(F^1 - \tilde{p}S_0) > 0$  для всех  $\tilde{d}_1^0 < \tilde{p} < \tilde{d}_2^0$ .

Докажем формулу (2.14). Для  $\tilde{p} = 0$  матрица  $F^1 - \tilde{p}S_0$  равна матрице  $F^1$  и является положительно определенной, поэтому все ее собственные значения положительны. Так как собственные значения непрерывно зависят от параметра  $\tilde{p}$  и для всех  $\tilde{p} \in (\tilde{d}_1^0, \tilde{d}_2^0)$  матрица  $F^1 - \tilde{p}S_0$  невырождена, ее собственные значения остаются положительными. Поэтому,  $F^1 - \tilde{p}S_0 > 0$  для всех  $\tilde{p} \in (\tilde{d}_1^0, \tilde{d}_2^0)$ .

Поэтому для всех чисел  $d_1, d_2$  таких, что  $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$  и для всех  $p(t, x) \in \mathcal{P}_{d_1, d_2}$  выполняется неравенство (2.11). Это значит, что неравенство (1.3) выполняется при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = \gamma_2$ ,  $\beta_2 = \gamma_1$ .

Дальнейший ход доказательства аналогичен доказательству для канонической системы [13, Теорема 1.2].  $\square$

**Следствие 2.1.** Значения  $\tilde{d}_1^0$  и  $\tilde{d}_2^0$  могут быть найдены в следующем



виде

$$\tilde{d}_1^0 = 1/\lambda_{\min}((F^1)^{-1}S_0), \quad \tilde{d}_2^0 = 1/\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S_0). \quad (2.15)$$

**Доказательство.** Так как  $F^1 > 0$ , то  $\det(F^1 - \tilde{p}S_0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\det(I - \tilde{p}(F^1)^{-1}S_0) = 0$ . С другой стороны,  $\tilde{p} \neq 0$  это корень последнего уравнения тогда и только тогда, когда  $1/\tilde{p}$  – это собственное значение матрицы  $(F^1)^{-1}S_0$ .  $\square$

**Замечание 2.3.** Результат следствия 2.1 может быть доказан с помощью работ [71, 100]. А именно, применим лемму 1.17 к  $M_0 = -F^1$  (устойчивая матрица так как  $F^1 > 0$ ),  $M_1 = S_0$ , откуда получаем, что  $\tilde{d}_1^0 = 1/\lambda_{\min}((F^1)^{-1}S_0)$ ,  $\tilde{d}_2^0 = 1/\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S_0)$ , что эквивалентно формуле (2.15).

**Замечание 2.4.** В теореме 2.1 выполнены условия  $d_1^0 < 0$  и  $d_2^0 > 0$ . Поэтому  $0 \in (d_1^0, d_2^0)$ .

**Замечание 2.5.** Пусть  $p(t, x)$  – некоторая функция, принадлежащая классу  $\mathcal{P}_{d_1, d_2}$ . Для нахождения траектории, начинающейся в заданной точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , поступаем следующим образом. Решаем уравнение (1.22) при  $x = x_0$  и находим единственный положительный корень  $\Theta(x_0) = \theta_0$ . Положим  $\theta(t) = \Theta(x(t))$ . Траектория удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + p(t, x)R)x - \frac{1}{2} b_0 b_0^* D(\theta) F D(\theta)x, \\ \dot{\theta} = \frac{(-F^1 + p(t, x)S_0)D(\theta)x, D(\theta)x}{(F^1 D(\theta)x, D(\theta)x)} \\ x(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Заметим, что при этом уравнение (1.22) достаточно решить только один раз – для нахождения  $\theta_0$ .

## 2.2. Несколько подходов к определению границ изменения возмущения в задаче глобального синтеза для робастных систем

В работе [44] рассмотрена задача глобального позиционного синтеза ограниченного управления для робастной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + p(t, x))x_2, \\ \dot{x}_i = (1 + r_i p(t, x))x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u, \end{cases} \quad (2.17)$$

где  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u$  – скалярное управление, удовлетворяющее ограничению  $|u| \leq 1$ ,  $r_2, \dots, r_{n-1}$  – некоторые заданные числа,  $p(t, x)$  – *неизвестное* ограниченное возмущение, удовлетворяющее ограничению  $|p(t, x)| \leq d$ . Требуется построить *ограниченное управление*, переводящее произвольную начальную точку  $x_0 \in \mathbb{R}$  в начало координат за *конечное время* при любом возмущении  $p(t, x)$ , удовлетворяющем ограничению  $|p(t, x)| \leq d$  а также найти  $d$ .

Перепишем систему (2.17) в матричном виде (1.25), где матрицы  $A_0$  и  $b_0$  задаются формулой (1.19), а матрица  $R$  имеет вид (1.27). Пусть матрица  $S(\Theta) = S_0$  задается формулой (2.7). В дальнейшем мы существенно пользуемся тем, что матрица  $S_0$  не зависит от  $\Theta$ . Укажем явный вид матрицы  $S_0 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & f_{11} & f_{12}r_2 & \dots & f_{1n-1}r_{n-1} \\ f_{11} & 2f_{12} & f_{13} + f_{22}r_2 & \dots & f_{1n} + f_{2n-1}r_{n-1} \\ f_{12}r_2 & f_{13} + f_{22}r_2 & 2f_{23}r_2 & \dots & f_{2n}r_2 + f_{3n-1}r_{n-1} \\ & & \dots & & \\ f_{1n-1}r_{n-1} & f_{1n} + f_{2n-1}r_{n-1} & f_{2n}r_2 + f_{3n-1}r_{n-1} & \dots & 2f_{n-1n}r_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Пусть постоянная  $a_0$  удовлетворяет неравенству (1.23). Рассмотрим замкнутую систему (2.2), где  $u(x)$  задается формулой (1.24). Обозначим через  $x(t)$  траекторию системы (2.2) и найдем производную в силу системы  $\dot{\Theta} = \frac{d}{dt}\Theta(x(t))$ . Рассуждая аналогично предидущему параграфу, получаем,

что производная функции управляемости в силу системы (2.2) имеет вид (2.8).

**Теорема 2.2.** Пусть  $0 < \gamma_1 < 1$ ,  $Q = \int_0^{\infty} e^{2(\gamma_1-1)F^1 t} dt$ ;  $Z(\gamma_1) = |U^*| \cdot |S_0| \cdot |U|$ , где  $U$  – ортогональная матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы  $((\gamma_1 - 1)F^1)$ . Пусть выполнено одно из следующих условий:

$$1. d_0 = \frac{(1 - \gamma_1)\lambda_{\min}(F^1)}{\rho(S_0)}, \quad (2.19)$$

$$2. d_0 = \frac{1}{2\|Q\|_{\infty}\|S_0\|_{\infty}}, \quad (2.20)$$

$$3. d_0 = (1 - \gamma_1) \min_{1 \leq i \leq n} \frac{\lambda_i(F^1)}{\sum_{j=1}^n z_{ij}(\gamma_1)}, \quad (2.21)$$

$$4. d_0 = \frac{1 - \gamma_1}{\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S_0|)}. \quad (2.22)$$

Пусть при  $x \neq 0$  функция управляемости  $\Theta(x)$  есть единственное положительное решение уравнения (1.22) при  $a_0$ , удовлетворяющем неравенству (1.23).

Тогда для всех  $d$  таких, что  $0 \leq d < d_0$ , управление, задаваемое формулой (1.24), решает задачу  $(-d, d)$ -глобального позиционного синтеза для робастной системы (2.17). При этом траектория системы (2.2), выходящая из произвольной начальной точки  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , оканчивается в точке  $x_1(T) = 0$  в некоторый конечный момент времени  $T = T(x_0, d)$ , такой, что

$$T \leq \frac{\Theta(x_0)}{\gamma_1}. \quad (2.23)$$

**Доказательство.** Пусть  $d_0$  задается одной из формул (2.19)-(2.22). Рассмотрим семейство симметричных матриц  $K(p) = (-1 + \gamma_1)F^1 + pS_0$ . Докажем, что из устойчивости этого семейства при всех  $|p| \leq d < d_0$  вытекает, что  $\dot{\Theta} < -\gamma_1$ . Пусть семейство  $K(p)$  устойчиво при всех  $|p| \leq d < d_0$ , то есть  $K(p) < 0$ . Тогда  $-F^1 + pS_0 < -\gamma_1 F^1$ . Тогда для

всех  $y(\Theta, x)$  и для всех  $|p(t, x)| \leq d < d_0$  выполнено

$$((-F^1 + p(t, x)S_0)y(\Theta, x), y(\Theta, x)) < -\gamma_1(F^1y(\Theta, x), y(\Theta, x)). \quad (2.24)$$

Поэтому, подставляя (2.24) в (2.8), в силу положительной определенности матрицы  $F^1$  [13, стр. 88] получаем  $\dot{\Theta} < -\gamma_1$ . Дальнейший ход доказательства аналогичен доказательству для канонической системы [13, Теорема 1.2].

Теперь в каждом из случаев (2.19)-(2.22) докажем устойчивость семейства  $K(p)$  при всех  $|p| \leq d < d_0$ .

1. УСЛОВИЕ (2.19). Обозначим  $K = (-1 + \gamma_1)F^1$  (это симметрическая матрица, следовательно, она является нормальной) и  $\mathcal{E} = p \cdot S_0$ . Для этих матриц мы можем воспользоваться теоремой 1.9. Пусть  $\lambda(p) \in \sigma(K(p))$ . Условие (1.55) означает, что существует такое собственное значение  $\hat{\lambda}_i$  матрицы  $K$ , что

$$|\lambda(p) - \hat{\lambda}_i| \leq d \cdot \|S_0\|_2 < d_0 \cdot \|S_0\|_2. \quad (2.25)$$

При этом  $\hat{\lambda}_i$  могут совпадать при разных  $\lambda(p)$ .

Пусть  $\lambda_i(F^1) \in \sigma(F^1)$ . Заметим, что  $\hat{\lambda}_i = (-1 + \gamma_1)\lambda_i(F^1)$ . Поскольку  $S_0 = S_0^*$ , то  $\|S_0\|_2 = \rho(S_0)$ . Из условия (2.25) вытекает, что

$$\lambda(p) < (-1 + \gamma_1)\lambda_i(F^1) + d_0\rho(S_0).$$

Подставим  $d_0$  из условия (2.19). Тогда

$\lambda(p) < (-1 + \gamma_1)\lambda_i(F^1) + (1 - \gamma_1)\lambda_{\min}(F^1) = (1 - \gamma_1)(-\lambda_i(F^1) + \lambda_{\min}(F^1)) \leq 0$ , следовательно при выполнении условия (2.19) при  $0 < \gamma_1 < 1$  семейство матриц  $K(p)$  устойчиво при всех  $|p| \leq d < d_0$ .

2. УСЛОВИЕ (2.20). Воспользуемся теоремой 1.12. Примем

$$A^m = (-1 + \gamma_1)F^1 - d|S_0|, \quad A^M = (-1 + \gamma_1)F^1 + d|S_0|,$$

тогда  $K(p) \subset [A^m, A^M]$ . Заметим, что матрица

$$A_c = (-1 + \gamma_1)F^1 \quad (2.26)$$

при  $0 < \gamma_1 < 1$  является устойчивой (напомним, что матрица  $F^1$  является положительно определенной [13, стр. 88]). Тогда матричное уравнение Ляпунова  $\mathcal{Q}A_c + A_c\mathcal{Q} = -I$  имеет единственное решение, которое задается равенством  $\mathcal{Q} = \int_0^{\infty} e^{2A_c t} dt$ . Вычислим

$$\|A^M - A^m\|_{\infty} = \|2d \cdot |S_0|\|_{\infty} < 2d_0 \cdot \|S_0\|_{\infty}.$$

Подставим  $d_0$  из условия (2.20). Тогда для всех  $|p| \leq d < d_0$  выполнено

$$\|A^M - A^m\|_{\infty} < 2d_0 \cdot \|S_0\|_{\infty} = 1/\|\mathcal{Q}\|_{\infty}.$$

Следовательно, при выполнении условия (2.20) выполнены условия теоремы 1.12, то есть семейство матриц  $[A^m, A^M]$  устойчиво, а значит и  $K(p)$  устойчиво при всех  $|p| \leq d < d_0$ .

3. УСЛОВИЕ (2.21). Воспользуемся теоремой 1.13. Пусть матрица  $A_c$  задается формулой (2.26),  $\delta A = p \cdot S_0$ , тогда  $\Delta A = d \cdot |S_0|$ . Заметим, что собственные значения матрицы  $A_c$  имеют вид  $\lambda_i = (-1 + \gamma_1)\lambda_i(F^1)$ . Напомним, что  $Z(\gamma_1) = |U^*| \cdot |S_0| \cdot |U|$ , где  $U$  – ортогональная матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы  $((\gamma_1 - 1)F^1)$ . Для построения  $U$  выберем ортогональные собственные векторы, тогда  $U = (U^{-1})^*$ . Кроме того, заметим, что для произвольной матрицы  $|M^*| = |M|^*$ . Тогда  $Z(\gamma_1)$  – симметричная матрица, откуда  $\rho_k^r = \rho_k^c$ .

Теорема 1.13 означает, что для каждого  $\lambda(p) \in \sigma(K(p))$  существует  $k = 1, \dots, n$ , такое, что

$$|\lambda(p) - (-1 + \gamma_1)\lambda_k(F^1)| \leq d \sum_{j=1}^n z_{kj}(\gamma_1) < d_0 \sum_{j=1}^n z_{kj}(\gamma_1), \quad (2.27)$$

следовательно,

$$\lambda(p) < (-1 + \gamma_1)\lambda_k(F^1) + d_0 \sum_{j=1}^n z_{kj}(\gamma_1).$$

Подставим  $d_0$  из условия (2.21). Тогда

$$\lambda(p) < (1 - \gamma_1) \sum_{j=1}^n z_{kj}(\gamma_1) \left( -\frac{\lambda_k(F^1)}{\sum_{j=1}^n z_{kj}} + \min_{1 \leq i \leq n} \frac{\lambda_i(F^1)}{\sum_{s=1}^n z_{is}(\gamma_1)} \right) \leq 0.$$

Следовательно, при выполнении условия (2.21) семейство матриц  $K(p)$  устойчиво при всех  $|p| \leq d < d_0$ .

4. УСЛОВИЕ (2.22). Воспользуемся теоремой 1.14. Пусть матрица  $A_c$  задается формулой (2.26). Положим  $\Delta A = d \cdot |S_0|$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho(|A_c^{-1}| \Delta A) &= \rho(|((-1 + \gamma_1)F^1)^{-1}| \cdot d \cdot |S_0|) = \\ &= \frac{d\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S_0|)}{1 - \gamma_1} < \frac{d_0\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S_0|)}{1 - \gamma_1}. \end{aligned}$$

Подставим  $d_0$  из условия (2.22). Тогда для всех  $|p| \leq d < d_0$

$$\rho(|A_c^{-1}| \Delta A) < 1.$$

Итак, при выполнении условия (2.22) выполнены условия теоремы 1.14, то есть семейство матриц  $K(p)$  устойчиво при всех  $|p| \leq d < d_0$ .  $\square$

**Замечание 2.6.** Применим результат теоремы 1.15 к интервальному семейству  $[(F^1)^{-1} - p|S_0|; (F^1)^{-1} + p|S_0|]$ . Тогда нижняя оценка в формуле (1.59) совпадает с оценкой (2.22).

Рассмотрим характеристический полином семейства  $K(p)$  :

$$\det(\lambda E - K(p)) = h(p, \lambda) = \lambda^n + h_{n-1}(p)\lambda^{n-1} + \dots + h_1(p)\lambda + h_0(p).$$

В нашем случае семейство  $K(p)$  симметрично, значит его собственные значения вещественны, то есть у характеристического полинома семейства  $K(p)$  есть только вещественные корни. Поэтому, в силу леммы 1.2 верна следующая лемма:

**Лемма 2.2.** Если при всех значениях  $p$  таких, что  $d_1^0 < p < d_2^0$  все коэффициенты характеристического полинома  $h_i(p) > 0$ , то семейство  $K(p)$  устойчиво при  $d_1^0 < p < d_2^0$ .

### 2.3. Решение задачи глобального синтеза для трехмерной робастной системы

Рассмотрим задачу глобального позиционного синтеза для робастной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + p(t, x_1, x_2, x_3))x_2, \\ \dot{x}_2 = (1 + r_2 p(t, x_1, x_2, x_3))x_3, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \quad (2.28)$$

Пусть ограничения на управление имеют вид  $|u| \leq 1$ . Обозначим  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . При  $p(t, x) \equiv 0$  система (2.28) является канонической системой (1.17). Она полностью управляема. Пусть  $u(x)$  – управление, задаваемое формулой (1.24). Наша цель – для заданного числа  $r_2$  найти такие  $d_1 < 0$  и  $d_2 > 0$ , при которых для всех возмущений  $p(t, x) \in \mathcal{P}_{d_1, d_2}$  траектория  $x(t)$  замкнутой системы (2.2) с управлением  $u = u(x)$ , выходящая из произвольной начальной точки  $x_0$ , оканчивалась в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T(x_0, p(t, x))$ .

Запишем эту систему в матричном виде  $\dot{x} = (A_0 + pR)x + b_0u$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Имеем

$$F = \begin{pmatrix} 2400 & 960 & 120 \\ 960 & 420 & 60 \\ 120 & 60 & 12 \end{pmatrix}, \quad D(\Theta) = \begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{5}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

$$F^1 = \begin{pmatrix} 14400 & 4800 & 480 \\ 4800 & 1680 & 180 \\ 480 & 180 & 24 \end{pmatrix}.$$

Определим при  $x \neq 0$  функцию управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  как решение

уравнения (1.22), которое в нашем случае приобретает вид

$$2a_0\Theta^6 = 2400x_1^2 + 1920\Theta x_1x_2 + 240\Theta^2x_1x_3 + 420\Theta^2x_2^2 + 120\Theta^3x_2x_3 + 12\Theta^4x_3^2, \quad (2.31)$$

где постоянная  $a_0$  удовлетворяет неравенству (1.23), которое в нашем случае приобретает вид  $0 < a_0 \leq 2/f_{33} = 1/6$ . Положим  $a_0 = 1/6$ . При  $x = 0$  пусть  $\Theta(0) = 0$ . Управление (1.24), решающее задачу позиционного синтеза, имеет вид

$$u(\Theta, x) = -\frac{60x_1}{\Theta^3(x)} - \frac{30x_2}{\Theta^2(x)} - \frac{6x_3}{\Theta(x)}. \quad (2.32)$$

где  $\Theta(x)$  – единственное положительное решение (2.31). Это управление удовлетворяет ограничению  $|u(x)| \leq 1$ .

**Случай одного возмущения.** Вначале рассмотрим случай  $r_2 = 0$ . Матрица  $S_0$ , задаваемая формулой (2.7), имеет вид:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2400 & 0 \\ 2400 & 1920 & 120 \\ 0 & 120 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F^1 - \tilde{p}S_0 = \begin{pmatrix} 14400 & 2400(2 - \tilde{p}) & 480 \\ 2400(2 - \tilde{p}) & 240(7 - 8\tilde{p}) & 60(3 - 2\tilde{p}) \\ 480 & 60(3 - 2\tilde{p}) & 24 \end{pmatrix}.$$

Тогда  $\det(F^1 - \tilde{p}S_0) = -3456000(20\tilde{p}^2 + 4\tilde{p} - 1) = 0$  при  $\tilde{p} = (-1 \pm \sqrt{6})/10$ .

Эквивалентно, матрица  $(F^1)^{-1}S_0$  имеет вид

$$(F^1)^{-1}S_0 = \begin{pmatrix} -20 & -17/2 & -1 \\ 80 & 34 & 4 \\ -200 & -80 & -10 \end{pmatrix}$$

и ее собственные значения равны  $\{2(1 \pm \sqrt{6}); 0\}$  (следствие 2.1), причем

$$\frac{1}{2(1 + \sqrt{6})} = \frac{\sqrt{6} - 1}{10} \approx 0.14, \quad \frac{1}{2(1 - \sqrt{6})} = -\frac{\sqrt{6} + 1}{10} \approx -0.34.$$

Тогда в формуле (2.9) имеем

$$d_1^0 = \max\{(\gamma_1 - 1)(1 + \sqrt{6})/10; (1 - \gamma_2)(\sqrt{6} - 1)/10\},$$



$$d_2^0 = \min\{(1 - \gamma_1)(\sqrt{6} - 1)/10; (\gamma_2 - 1)(\sqrt{6} + 1)/10\}.$$

Положим  $\gamma_1 = 0.01$ ;  $\gamma_2 = 4$ . Тогда  $(-1 + \gamma_1)F^1 + pS_0 =$

$$= -0.99F^1 + pS_0 \approx \begin{pmatrix} -14256 & -4752 + 2400p & -475.2 \\ -4752 + 2400p & -1663.2 + 1920p & -178.2 + 120p \\ -475.2 & -178.2 + 120p & -23.76 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы имеет вид

$$h(p, \lambda) = \lambda^3 + h_2(p)\lambda^2 + h_1(p)\lambda^1 + h_0(p), \quad \text{где}$$

$$h_2(p) \approx 15942.96 - 1920p, \quad h_1(p) \approx 1249745.11 - 4594771.2p - 5774400p^2,$$

$$h_0(p) \approx 3353353.34 - 13548902.4p - 68428800p^2.$$

Достаточные условия устойчивости (лемма 2.2)  $h_i(p) > 0$  выполнены при  $-\frac{\sqrt{6}+1}{10} < p < \frac{\sqrt{6}-1}{10}$ . Выберем  $d_1 = -0.34$ ,  $d_2 = 0.14$ .

Для проверки теорем 1.7 и 1.8 найдем

$$\bar{h}_0 = \max_{p \in [d_1, d_2]} h_0(p) \approx 4024024.01, \quad \underline{h}_0 = \min_{p \in [d_1, d_2]} h_0(p) \approx 49610.88,$$

$$\bar{h}_1 = \max_{p \in [d_1, d_2]} h_1(p) \approx 2134246.68, \quad \underline{h}_1 = \min_{p \in [d_1, d_2]} h_1(p) \approx 497498.9,$$

$$\bar{h}_2 = \max_{p \in [d_1, d_2]} h_2(p) \approx 16595.8, \quad \underline{h}_2 = \min_{p \in [d_1, d_2]} h_2(p) \approx 15674.2,$$

Имеем, что 3 полинома Харитоновы (1.53) устойчивы, а  $P_4$  нет, полином  $\tilde{P}_1$  (1.54) аперiodичен, а  $\tilde{P}_2$  нет. Это связано с тем, что минимум или максимум полиномов может достигаться при разных значениях параметров.

В качестве конкретной реализации возмущения рассмотрим функцию  $p(t, x_1, x_2, x_3) = 0.13 \cos\left(\frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)t}{70}\right)$ . Пусть начальная точка имеет вид  $x_0 = (4; -4; 1)$ . Тогда единственное положительное решение уравнения (2.31) имеет вид  $\Theta(x_0) = \theta_0 \approx 18.55$ . Положим  $\theta(t) = \Theta(x(t))$ . Для нахождения траектории воспользуемся замечанием 2.5. Траектория удовле-

творяет следующей задаче Коши

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \left( 1 + 0.13 \cos \left( \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)t}{70} \right) \right) x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -\frac{60x_1}{\theta^3} - \frac{30x_2}{\theta^2} - \frac{6x_3}{\theta}, \\ \dot{\theta} = \phi, \\ x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = -4, \quad x_3(0) = 1, \quad \theta(0) = 18.55, \end{array} \right. \quad (2.33)$$

где  $\phi = -(600x_1^2 + 200(2-p)x_1 x_2 \theta + 10(7-8p)x_2^2 \theta^2 + 40x_1 x_3 \theta^2 +$   
 $+5(3-2p)x_2 x_3 \theta^3 + x_3^2 \theta^4) /$   
 $/(600x_1^2 + 400x_1 x_2 \theta + 70x_2^2 \theta^2 + 40x_1 x_3 \theta^2 + 15x_2 x_3 \theta^3 + x_3^2 \theta^4).$

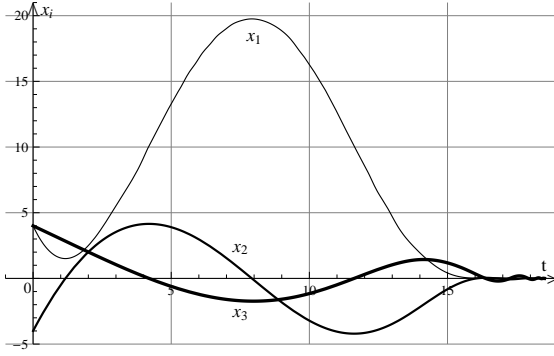


Рис. 2.1: Компоненты траектории системы (2.33)

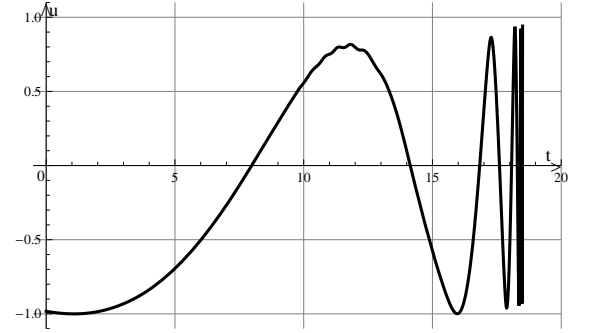


Рис. 2.2: Управление на траектории системы (2.33)

Компоненты траектории и управление на траектории представлены на рисунках 2.1 и 2.2, причем управление  $u(x)$  удовлетворяет ограничениям  $|u(x)| \leq 1$ . Функция управляемости  $\Theta(x)$  и полная производная функции  $\Theta(x)$  в силу системы (2.28) представлены на рисунках 2.3 и 2.4. Обратим внимание на то, что  $\Theta(x(t))$  почти линейна, то есть значение  $\frac{d}{dt}\Theta(x(t))$  "близко" к  $-1$ . Напомним, что при  $p(t, x) = 0$  выполнено равенство  $\frac{d}{dt}\Theta(x(t)) = -1$ . Оценка (2.10) на время движения имеет вид:  $4.63 \leq T(x_0) \leq 206.1$ . Можно показать численно, что время движения  $T \approx 18.51$ . Заметим, что время движения меньше, чем  $\Theta_0$ .

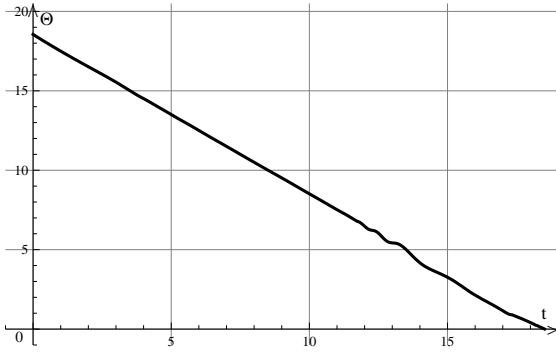


Рис. 2.3: Функция управляемости  $\Theta(x)$  на траектории системы (2.33)

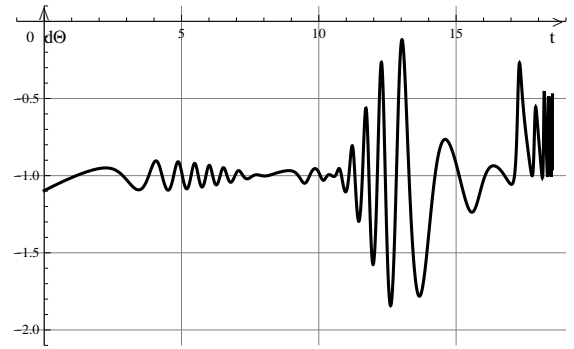


Рис. 2.4: Производная от функции управляемости  $\Theta(x)$  на траектории системы (2.33)

Для вычисления производной собственного значения по параметру воспользуемся теоремой 1.10. Возьмем интервальное семейство  $K(p) = -0.99F^1 + pS_0$ , выберем точку  $p_0 = 0$ . Найдем аппроксимацию собственного значения  $\lambda(p)$  семейства  $K(p)$  при  $p = p_0$ . Имеем

$$\lambda(p) \approx -2.78 + 0.745 p + 48.051 p^2 + \bar{o}(p^2).$$

Если в этом ряде взять только 3 слагаемых ряда (отбросить о малое) и решить неравенство  $-2.78 + 0.745 p + 48.051 p^2 < 0$ , получится аппроксимация области устойчивости  $-0.249 \dots < p < 0.233 \dots$ . Если выбрать точку  $p_1 = -0.34 \dots$ , то

$$\lambda(p) \approx -15.543 (p + 0.34) + 25.65 (p + 0.34)^2 + \bar{o}((p + 0.34)^2).$$

Если выбрать точку  $p_2 = 0.14 \dots$ , то

$$\lambda(p) \approx 69.752 (p - 0.14) + 895.765 (p - 0.14)^2 + \bar{o}((p - 0.14)^2).$$

Графики аппроксимации наибольшего собственного значения интервального семейства  $K(p)$  изображены на рис. 2.5. Толстая прямая линия соответствует значениям  $p$ , найденным в силу формулы (2.9). Заметим, что в отличие от случая размерности 2 аналитическое нахождение зависимости собственных значений от параметра представляет трудности.

**Симметричный отрезок изменения возмущений.** Пусть  $r_2 \neq 0$ .

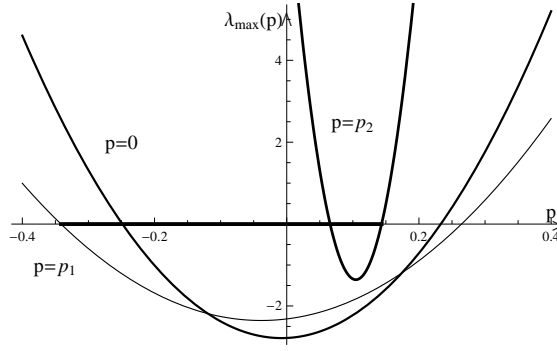


Рис. 2.5: Аппроксимация наибольшего собственного значения при  $n = 3$ .

Пусть  $p$  удовлетворяет ограничению:  $|p(t, x_1, x_2, x_3)| \leq d$ . Имеем

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2400 & 960r_2 \\ 2400 & 1920 & 60(2 + 7r_2) \\ 960r_2 & 60(2 + 7r_2) & 120r_2 \end{pmatrix}.$$

На рисунке 2.6 изображены линии уровня характеристического уравнения матрицы  $F^{-1}S_0$  в зависимости от  $r_2$ . Из рисунка видно, что  $\lambda_{\min}(F^{-1}S_0) < 0$ ,  $\lambda_{\max}(F^{-1}S_0) > 0$ .

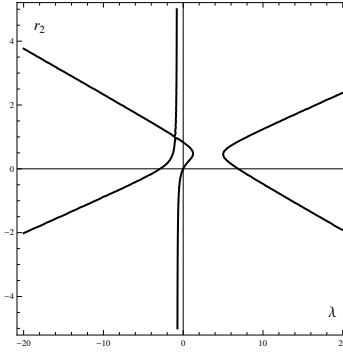


Рис. 2.6: Линии уровня характеристического уравнения

Пусть  $r_2 = 1$ . В этом случае  $|S_0| = S_0$ ,  $\rho(S_0) \approx 3811.14$ ,  $\|S_0\|_\infty = 2400 + 1920 + 540 = 4860$ . Имеем

$$-F^1 + pS_0 = \begin{pmatrix} -14400 & 2400(-2 + p) & 480(-1 + 2p) \\ 2400(-2 + p) & 240(-7 + 8p) & 180(-1 + 3p) \\ 480(-1 + 2p) & 180(-1 + 3p) & 24(-1 + 5p) \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы имеет вид

$$\lambda^3 + (16104 - 2040p)\lambda^2 + (1275120 - 5467680p - 6742800p^2)\lambda + \\ + 3456000 - 20736000p - 51840000p^2 - 27648000p^3 = 0.$$

Достаточные условия устойчивости (лемма 2.2)  $h_i(p) > 0$  выполнены при  $-1 < p < 1/8$ .

Найдем собственные значения матрицы  $F^1$  :

$$\lambda_{min}(F^1) \approx 16024.4, \lambda_2(F^1) \approx 76.75, \lambda_{max}(F^1) \approx 2.81.$$

Положим  $\gamma_1 = 0.01$ . В силу формулы (2.19)

$$d_0 = \frac{(1 - \gamma_1)\lambda_{min}(F^1)}{\rho(S_0)} \approx \frac{0.99 \cdot 2.81}{3811.14} \approx 0.0007.$$

В выражении (2.20)

$$Q = \int_0^{\infty} e^{2(\gamma_1 - 1)F^1 t} dt \approx \begin{pmatrix} 0.001 & -0.004 & 0.008 \\ -0.004 & 0.017 & -0.042 \\ 0.008 & -0.042 & 0.168 \end{pmatrix},$$

$\|Q\|_{\infty} \approx 0.008 + 0.042 + 0.168 \approx 0.219$ . В силу формулы (2.20)

$$d_0 = \frac{1}{2\|Q\|_{\infty}\|S_0\|_{\infty}} \approx \frac{1}{2 \cdot 0.219 \cdot 4860} \approx 0.0005.$$

В выражении (2.21) матрица, составленная из собственных векторов матрицы  $((\gamma_1 - 1)F^1)$ , имеет вид

$$U \approx \begin{pmatrix} -0.948 & 0.315 & 0.051 \\ -0.317 & -0.914 & -0.251 \\ -0.032 & -0.254 & 0.966 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$Z(0.01) \approx \begin{pmatrix} 1707.35 & 3178.72 & 1818.14 \\ 3178.72 & 3400.44 & 1589.64 \\ 1818.14 & 1589.64 & 652.831 \end{pmatrix},$$

$$\sum_{j=1}^n z_{1j}(\gamma_1) \approx 1707.35 + 3178.72 + 1818.14 \approx 6704.21,$$

$$\sum_{j=1}^n z_{2j}(\gamma_1) \approx 3178.72 + 3400.44 + 1589.64 \approx 8168.8,$$

$$\sum_{j=1}^n z_{3j}(\gamma_1) \approx 1818.14 + 1589.64 + 652.831 \approx 4060.62.$$

В силу формулы (2.21)

$$d_0 = (1 - \gamma_1) \min_{1 \leq i \leq n} \frac{\lambda_i(F^1)}{\sum_{j=1}^n z_{ij}(\gamma_1)} \approx 0.99 \min \left\{ \frac{16024.4}{6704.21}, \frac{76.75}{8168.8}, \frac{2.81}{4060.62} \right\} \approx$$

$$\approx 0.99 \min\{2.39, 0.009, 0.0007\} \approx 0.0007.$$

В выражении (2.22)

$$|(F^1)^{-1}| \approx \begin{pmatrix} 0.002 & 0.008 & 0.016 \\ 0.008 & 0.033 & 0.083 \\ 0.016 & 0.083 & 0.333 \end{pmatrix}, \quad |(F^1)^{-1}| \cdot |S_0| \approx \begin{pmatrix} 36 & 30.5 & 8.7 \\ 160 & 129 & 36 \\ 520 & 380 & 101 \end{pmatrix},$$

$\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S_0|) \approx 272.51$ . В силу формулы (2.22)

$$d_0 = \frac{1 - \gamma_1}{\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S_0|)} \approx \frac{0.99}{272.51} \approx 0.004.$$

Таким образом, из формул (2.19)-(2.22), формула (2.22) дает самую лучшую оценку (как и в случае размерности 2).

Для вычисления производной собственного значения по параметру воспользуемся теоремой 1.10. Для этого выберем точку  $p = 0$ . Имеем

$$\lambda(p) \approx -2.81 + 4.55 p + 48.43 p^2 + \bar{o}(p^2).$$

Если в этом ряде взять только 3 слагаемых ряда (отбросить о малое) и решить неравенство это меньше 0, получится аппроксимация области устойчивости  $-0.3 < p < 0.2$ .

Если выбрать точку  $p = 1/8$ , то

$$\lambda(p) \approx 71.95 (p - 0.25) + 1017.62 (p - 0.25)^2 + \bar{o}((p - 0.25)^2).$$

Если в этом ряде взять только 3 слагаемых ряда (отбросить о малое) и решить неравенство это меньше 0, получится аппроксимация области устойчивости  $0.05 < p < 0.25$ .

Если выбрать точку  $p_0 = -1$ , то собственное значение матрицы  $-F^1 + pS_0$   $\lambda_0 = 0$  является полупростым (алгебраическая кратность равна геометрической и равна 2). Применим теорему 1.11, матрица (1.57) приобретает вид  $\begin{pmatrix} -\frac{7930}{21}e & -\frac{4950}{7}e \\ -\frac{670}{21}e & -\frac{450}{7}e \end{pmatrix}$ , собственные значения которой суть  $\lambda_1 = 20(-232 \pm \sqrt{51934})e/21 \approx -438e; -3.9e$ .

Для отрицательности  $p$  необходимо, чтобы  $\varepsilon e > 0$ , т. е. область устойчивости при  $p = p_0 = -1$  будет правее точки  $-1$ .

#### 2.4. Выводы к разделу

В разделе 2 было введено понятие глобального и локального позиционного синтеза ограниченного управления для робастных систем. Получена теорема о нахождении границ изменения возмущения для системы с одним возмущением. Идея нахождения границ состоит в том, что полная производная от функции управляемости в силу возмущенной системы должна быть отрицательной. Далее предложены разные подходы к определению симметричной границы изменения возмущений. Для их получения использованы некоторые результаты теории устойчивости интервальных матриц. Получены оценки сверху и снизу на время движения из произвольной начальной точки в начало координат. В конце раздела приведено решение задачи синтеза для трехмерной робастной системы.

## РАЗДЕЛ 3

НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО ОТРЕЗКА ГРАНИЦ ИЗМЕНЕНИЯ  
ВОЗМУЩЕНИЯ

В работе [20] рассмотрена задача позиционного синтеза ограниченного управления для робастной системы (1.25), где  $t \geq 0$ ,  $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q$  – это некоторая окрестность начала координат,  $u$  – скалярное управление, удовлетворяющее ограничению  $|u| \leq 1$ , матрицы  $A_0$  и  $b_0$  задаются формулой (1.19), а матрица  $R$  имеет вид (1.28),  $r_{ij}$  – некоторые заданные числа,  $1 \leq j \leq i + 1$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Будем считать, что функция  $p(t, x)$  – *неизвестное возмущение*, удовлетворяющее заданному ограничению  $d_1 \leq p(t, x) \leq d_2$ . Требуется построить *ограниченное управление*, переводящее произвольную начальную точку  $x_0 \in Q$  в начало координат за *конечное время* при любом возмущении  $p(t, x)$ , удовлетворяющем ограничению  $d_1 \leq p(t, x) \leq d_2$ , а также найти  $d_1$  и  $d_2$ .

Классическим примером такой постановки задачи может служить управление движением материальной точки с учетом неизвестного трения. Движение этой системы описывается уравнением

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = p(t, x_1, x_2)x_2 + u.$$

Слагаемое  $p(t, x_1, x_2)x_2$  – сила трения, причем коэффициент нелинейного вязкого трения  $p(t, x_1, x_2)$  – неизвестная функция, удовлетворяющая ограничению  $d_1 \leq p(t, x) \leq d_2$ . Рассматриваемые ограничения на  $p(t, x_1, x_2)$  не исключают "отрицательного" трения (Решение задачи синтеза для этой системы дает теорема 3.4).

Рассмотрим систему (1.25). Пусть постоянная  $a_0$  удовлетворяет неравенству (1.23). Рассмотрим замкнутую систему (2.2), где  $u(x)$  задается формулой (1.24). Пусть матрица  $S(\Theta)$  задается формулой (2.6). Обозначим через  $x(t)$  траекторию системы (2.2) и найдем производную в силу системы  $\dot{\Theta} = \frac{d}{dt}\Theta(x(t))$ . Рассуждая аналогично параграфу 2.1, получа-



ем, что производная функции управляемости в силу системы (2.2) имеет вид (2.8).

### 3.1. Наддиагональные возмущения

Не ограничивая общности, будем считать, что  $r_{12} = 1$ . Пусть у матрицы  $R$  ненулевые только элементы главной наддиагонали. В этом случае система (1.25) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + p(t, x))x_2, \\ \dot{x}_i = (1 + r_{ii+1}p(t, x))x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u. \end{cases} \quad (3.1)$$

В этом случае матрица  $S(\Theta)$ , задаваемая формулой (2.6), совпадает с матрицей  $S_0$ , задаваемой формулой (2.18) при  $r_{ii+1} = r_{i+1}$ .

**Теорема 3.1.** Пусть  $0 < \gamma_1 < 1$ ,  $\gamma_2 > 1$ , числа  $\tilde{d}_1^0$  и  $\tilde{d}_2^0$  задаются формулой (2.15), числа  $d_1^0$  и  $d_2^0$  задаются формулой (2.9). Пусть при  $x \neq 0$  функция управляемости  $\Theta(x)$  есть единственное положительное решение уравнения (1.22) при  $a_0$ , удовлетворяющем неравенству (1.23).

Тогда для всех  $d_1$  и  $d_2$  таких, что  $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$  управление, задаваемое формулой (1.24), решает задачу  $(d_1, d_2)$  – глобального позиционного синтеза для робастной системы (3.1). При этом траектория замкнутой системы (2.2), выходящая из произвольной начальной точки  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , оканчивается в точке  $x_1(T) = 0$  в некоторый конечный момент времени  $T = T(x_0, d_1, d_2)$ , для которого выполнена оценка (2.10).

**Доказательство.** Предположим, что  $p(t, x) \in \mathcal{P}_{d_1, d_2}$ , где  $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$ . Обозначим  $y = y(\Theta, x)$ . Аналогично доказательству теоремы 2.1 установим, что  $\dot{\Theta}$ , определяемое (2.8), удовлетворяет неравенству (2.12), т. е. что выполнено неравенство (2.13). Разделим первое неравенство из (2.13) на  $1 - \gamma_1 > 0$ , а второе на  $\gamma_2 - 1 > 0$ , тогда

докажем, что для всех  $d_1^0 < p = p(t, x) < d_2^0$ .

$$\left(-F^1 + \frac{p}{1-\gamma_1}S_0\right) < 0, \quad \left(-F^1 + \frac{p}{1-\gamma_2}S_0\right) < 0. \quad (3.2)$$

Рассмотрим первое неравенство из (3.2). Пусть оно верно при

$b_1 < \frac{p}{1-\gamma_1} < b_2$ , тогда

$$b_1(1-\gamma_1) < p < b_2(1-\gamma_1). \quad (3.3)$$

Аналогично из второго неравенства из (3.2) получаем, что

$$b_2(1-\gamma_2) < p < b_1(1-\gamma_2). \quad (3.4)$$

Таким образом, из (3.3) и (3.4) имеем

$$\max\{b_1(1-\gamma_1); b_2(1-\gamma_2)\} < p < \min\{b_2(1-\gamma_1); b_1(1-\gamma_2)\},$$

следовательно,

$$d_1^0 = \max\{b_1(1-\gamma_1); b_2(1-\gamma_2)\}, \quad d_2^0 = \min\{b_2(1-\gamma_1); b_1(1-\gamma_2)\}. \quad (3.5)$$

Найдем числа  $b_1$  и  $b_2$ , такие, что  $(F^1 - \tilde{p}S_0) > 0$  при  $b_1 < \tilde{p} < b_2$ . Сначала докажем, что  $\lambda_{\min}((F^1)^{-1}S_0) < 0$ ,  $\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S_0) > 0$ . Действительно, произведение положительно определенной  $(F^1)^{-1}$  и эрмитовой матрицы  $S_0$  является диагонализируемой матрицей, собственные значения которой вещественны. При этом  $(F^1)^{-1}S_0$  имеет столько же положительных, отрицательных и нулевых собственных значений, как и матрица  $S_0$  ([50, стр. 550]). Поэтому установим, что  $\lambda_{\min}(S_0) < 0$  и  $\lambda_{\max}(S_0) > 0$ . Рассмотрим главный определитель второго порядка матрицы  $S_0$ . Он равен  $\begin{vmatrix} 0 & f_{11} \\ f_{11} & 2f_{12} \end{vmatrix} = -f_{11}^2 < 0$  так как в силу положительной определенности матрицы  $F$  элемент  $f_{11} > 0$ . В силу критерия Сильвестра если матрица неотрицательно определена, то ее главные миноры неотрицательны. Это значит, что спектр матрицы  $\sigma(S_0) \not\subseteq \{x : x \geq 0\}$ . В силу критерия Сильвестра если матрица неположительно определена, то ее второй главный минор неотрицателен. Это значит, что спектр матрицы  $\sigma(S_0) \not\subseteq \{x : x \leq 0\}$ .

Также  $\sigma(S_0) \neq \{0\}$  так как матрица  $S_0$  симметрична и не является тождественно нулевой.

В силу того, что матрица  $(F^1 - \tilde{p}S_0)$  симметрична, ее собственные значения вещественны. При  $\tilde{p} = 0$  эта матрица равна матрице  $F^1 > 0$ . Рассмотрим случай  $\tilde{p} > 0$ . Найдем наименьшее значение параметра  $\tilde{p} = b_2$ , такое, что матрица  $(F^1 - b_2S_0)$  имеет нулевое собственное значение, то есть  $\det(F^1 - b_2S_0) = 0$ , а при  $0 \leq \tilde{p} < b_2$  выполнено  $\det(F^1 - \tilde{p}S_0) > 0$ . Это значит, что  $1/b_2$  – это собственное значение матрицы  $(F^1)^{-1}S_0$ . Тогда  $b_2 = 1/\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S_0) > 0$  так как в силу доказанного выше  $\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S_0) > 0$ . Рассуждая аналогично при  $\tilde{p} < 0$ , получаем, что существует наибольшее  $b_1 < 0$ , такое, что  $\det(F^1 - b_1S_0) = 0$ , а при  $b_1 < \tilde{p} \leq 0$  выполнено  $\det(F^1 - \tilde{p}S_0) > 0$ . При этом  $b_1 = 1/\lambda_{\min}((F^1)^{-1}S_0) < 0$ . Тогда  $b_1 = \tilde{d}_1^0$ ,  $b_2 = \tilde{d}_2^0$ , то есть  $(F^1 - \tilde{p}S_0) > 0$  при  $\tilde{d}_1^0 < \tilde{p} < \tilde{d}_2^0$ . Тогда формула (2.9) совпадает с (3.5).

Из  $-\gamma_2 < \dot{\Theta} < -\gamma_1$  в силу теоремы 1.1 вытекает оценка на время попадания (2.10).

Ограниченность управления доказывается аналогично рассуждениям для канонической системы [13, Теорема 1.2]. А именно, так как  $b_0^*D(\Theta) = \Theta^{-\frac{1}{2}}b_0^*$ , то перепишем управление (1.23) в виде  $u(x) = (a, y(\Theta, x))\Theta^{-\frac{1}{2}}$ , где  $a = -\frac{1}{2}Fb_0$ . Для доказательства ограниченности управления при фиксированном  $\Theta$  решим задачу нахождения экстремума функции  $(a, y(\Theta, x))\Theta^{-\frac{1}{2}}$  при ограничениях

$$(Fy(\Theta, x), y(\Theta, x)) - 2a_0\Theta = 0.$$

Решая задачу с помощью метода множителей Лагранжа, имеем, что экстремальное значение  $u = \pm\sqrt{2a_0(F^{-1}a, a)} = \pm\sqrt{a_0f_{nm}/2}$ , откуда, учитывая неравенство (1.23), получаем  $|u(x)| \leq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , то есть управление  $u(x)$  ограничено во всем пространстве.  $\square$

**Замечание 3.1.**  $d_2^0 - d_1^0$  монотонно убывает по  $\gamma_1$  и монотонно возрастает по  $\gamma_2$ .

**Замечание 3.2.** Формула (2.9) дает точную оценку для  $d_1^0$  и  $d_2^0$ .

### 3.2. Общий случай

**Локальный синтез.** Пусть матрица  $R$  имеет вид (1.28). Тогда элементы матрицы  $S(\Theta)$ , задаваемой формулой (2.6), это полиномы по  $\Theta$  степени не выше  $n$ . Предположим, что  $\lambda_{min}$  – наименьшее собственное значение матрицы  $(F^1)^{-1}S(0) = (F^1)^{-1}S_0$  – является алгебраически простым. Пусть  $x_{min}$  и  $y_{min}$  – правый и левый собственные векторы, соответствующие  $\lambda_{min}$  такие, что  $y_{min}^*x_{min} = 1$ . Предположим, что  $\lambda_{max}$  – наибольшее собственное значение матрицы  $(F^1)^{-1}S(0) = (F^1)^{-1}S_0$  – является алгебраически простым. Пусть  $x_{max}$  и  $y_{max}$  – соответствующие  $\lambda_{max}$  правый и левый собственные векторы, такие, что  $y_{max}^*x_{max} = 1$ . Обозначим

$$\lambda_1 = \begin{cases} \lambda_{min}, & \text{если } y_{min}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{min} \geq 0, \\ \lambda_{min} + y_{min}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{min}, & \text{если } y_{min}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{min} < 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \lambda_{max} + y_{max}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{max}, & \text{если } y_{max}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{max} \geq 0, \\ \lambda_{max}, & \text{если } y_{max}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{max} < 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

**Теорема 3.2.** Пусть  $\tilde{d}_1^0 = 1/\lambda_1$ ,  $\tilde{d}_2^0 = 1/\lambda_2$ ,  $0 < \gamma_1 < 1$ ,  $\gamma_2 > 1$  и числа  $d_1^0$  и  $d_2^0$  задаются формулой (2.9). Пусть при  $x \neq 0$  функция управляемости  $\Theta(x)$  есть единственное положительное решение уравнения (1.22) при  $a_0$ , удовлетворяющем неравенству (1.23).

Тогда существует  $c \leq 1$ , такое, что в области  $Q$ , задаваемой равенством  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$  для всех  $d_1$  и  $d_2$  таких, что  $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$  управление, задаваемое формулой (1.24), решает задачу  $(d_1, d_2)$  – локального позиционного синтеза для робастной системы (1.25). При этом траектория замкнутой системы (2.2), выходящая из произвольной начальной точки  $x(0) = x_0 \in Q$ , оканчивается в точке  $x_1(T) = 0$  в некоторый ко-

нечный момент времени  $T = T(x_0, d_1, d_2)$ , для которого выполнена оценка (2.10).

**Доказательство.** Пусть область  $Q$  задается равенством  $Q = \{x : \Theta(x) \leq 1\}$  и  $\lambda(\Theta)$  – собственное значение матрицы  $(F^1)^{-1}S(\Theta)$ . При достаточно малых  $\Theta$  выполнено  $\lambda(\Theta) = \lambda(0) + \lambda'(0)\Theta + \bar{o}(\Theta)$ . В силу формулы (1.56) при достаточно малых  $\Theta$  справедливо

$$\lambda(\Theta) = \lambda_{min} + y_{min}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{min}\Theta,$$

откуда  $\lambda(\Theta) \geq \lambda_1$ . Также при достаточно малых  $\Theta$  справедливо

$$\lambda(\Theta) = \lambda_{max} + y_{max}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{max}\Theta,$$

откуда  $\lambda(\Theta) \leq \lambda_2$ . В силу того, что  $\lambda_{min}(F^1)^{-1}S_0 > 0$  и  $\lambda_{max}(F^1)^{-1}S_0 < 0$ , имеем  $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_2 > 0$ . Дальнейший ход доказательства аналогичен доказательству теоремы 3.1 в случае наддиагональных возмущений.  $\square$

**Глобальный синтез.** Выберем произвольную начальную точку  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , пусть  $\Theta(x_0) = \theta_0$ . Оценим элементы матрицы  $(F^1)^{-1}S(\Theta)$  при  $0 \leq \Theta \leq \theta_0$ :  $\underline{m}_{ij} \leq ((F^1)^{-1}S(\Theta))_{ij} \leq \bar{m}_{ij}$ . Пусть матрицы  $\underline{M}$  и  $\bar{M}$  составлены из элементов  $\underline{m}_{ij}$  и  $\bar{m}_{ij}$  соответственно. Теорема 1.16 дает границы изменения  $\underline{\lambda}$  и  $\bar{\lambda}$  собственных значений матрицы  $[\underline{M}; \bar{M}]$ . Заметим, что так как матрица  $(F^1)^{-1}S_0$  входит в интервальную  $[\underline{M}; \bar{M}]$ , то  $\underline{\lambda} \leq \lambda_{min}((F^1)^{-1}S_0)$ ,  $\bar{\lambda} \geq \lambda_{max}((F^1)^{-1}S_0)$ , откуда следует, что  $\underline{\lambda} < 0$ ,  $\bar{\lambda} > 0$ . Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.3.** Пусть числа  $\underline{\lambda}$  и  $\bar{\lambda}$  задаются формулой (1.61),

$$\tilde{d}_1^0 = 1/\underline{\lambda}, \quad \tilde{d}_2^0 = 1/\bar{\lambda},$$

$0 < \gamma_1 < 1$ ,  $\gamma_2 > 1$  и числа  $d_1^0$  и  $d_2^0$  задаются формулой (2.9). Пусть при  $x \neq 0$  функция управляемости  $\Theta(x)$  есть единственное положительное решение уравнения (1.22) при  $a_0$ , удовлетворяющем неравенству (1.23).

Тогда для всех  $d_1$  и  $d_2$  таких, что  $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$  управление, задаваемое формулой (1.24), решает задачу  $(d_1, d_2)$  – глобального позиционного синтеза для робастной системы (1.25). При этом траектория замкнутой системы (2.2), выходящая из произвольной начальной точки  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , оканчивается в точке  $x_1(T) = 0$  в некоторый конечный момент времени  $T = T(x_0, d_1, d_2)$ , для которого выполнена оценка (2.10).

### 3.3. Решение задачи синтеза для двумерной робастной системы

На примере двумерной управляемой системы продемонстрируем основные результаты работы. Рассмотрим задачу позиционного синтеза для системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} + p(t, x_1, x_2) \begin{pmatrix} r_{11}x_1 + x_2 \\ r_{21}x_1 + r_{22}x_2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

при ограничениях на управление вида  $|u| \leq 1$ . В системе (3.8) числа  $r_{11}$ ,  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  заданы, функция  $p(t, x_1, x_2)$  – неизвестное возмущение, удовлетворяющее ограничению  $d_1 \leq p(t, x_1, x_2) \leq d_2$ . Решение задачи в случае, когда  $p$  – это фиксированный параметр, предложено в [34, глава 6.1].

При  $p(t, x_1, x_2) \equiv 0$  система (3.8) является канонической системой (1.17). Она полностью управляема. Пусть  $u(x)$  – управление, задаваемое формулой (1.24). Наша цель – для заданных чисел  $r_{11}$ ,  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  найти такие  $d_1 < 0$  и  $d_2 > 0$ , и при этом для всех возмущений  $p(t, x_1, x_2) \in \mathcal{P}_{d_1, d_2}$  траектория  $x(t)$  замкнутой системы (2.2) с управлением  $u = u(x)$ , выходящая из произвольной начальной точки  $x_0$ , оканчивалась в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T(x_0, p(t, x_1, x_2))$ .

Запишем эту систему в матричном виде  $\dot{x} = (A_0 + p(t, x_1, x_2)R)x + b_0u$ ,

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & 1 \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Для этой системы при любом  $p(t, x_1, x_2) \equiv p \neq -1$  выполнен критерий полной управляемости при всех значениях  $r_{11}, r_{21}, r_{22}$  так как

$$rg(b_0, (A_0 + pR)b_0) = rg \begin{pmatrix} 0 & 1+p \\ 1 & r_{22}p \end{pmatrix} = 2.$$

Матрица  $F$ , задаваемая формулой (1.20), и  $D(\Theta)$ , задаваемая формулой (1.21), имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad D(\Theta) = \begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \Theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Определим при  $(x_1, x_2) \neq 0$  функцию управляемости  $\Theta = \Theta(x_1, x_2)$  как решение уравнения (1.22), которое в нашем случае приобретает вид

$$2a_0\Theta^4 = 36x_1^2 + 24\Theta x_1 x_2 + 6\Theta^2 x_2^2, \quad (3.11)$$

где  $0 < a_0 \leq 2/f_{22} = 1/3$ , а при  $(x_1, x_2) = 0$  пусть  $\Theta(0) = 0$ . Положим  $a_0 = 1/3$ . Управление (1.24), решающее задачу позиционного синтеза, имеет вид

$$u(x_1, x_2) = -\frac{6x_1}{\Theta^2(x_1, x_2)} - \frac{3x_2}{\Theta(x_1, x_2)}, \quad (3.12)$$

где  $\Theta(x_1, x_2)$  – единственное положительное решение (3.11). Это управление удовлетворяет ограничению  $|u(x_1, x_2)| \leq 1$ .

Рассмотрим случай  $p(t, x_1, x_2) \equiv 0$ . Подчеркнем, что для нахождения траектории достаточно решить уравнение (3.11) только в начальной точке. Пусть  $\Theta(x_0) = \theta_0$  – единственный положительный корень уравнения (3.11) при  $x = x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Это  $\theta_0$  является временем движения из произвольной начальной точки  $x_0$  в начало координат. Положим  $\theta(t) = \Theta(x(t))$ . Так как в силу теоремы 1.3 выполнено  $\dot{\theta} = -1$ ,  $\theta(0) = \theta_0$ , то  $\theta(t) = \theta_0 - t$ . Траек-

тория при  $p(t, x_1, x_2) \equiv 0$  является решением следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{6x_1}{(\theta_0 - t)^2} - \frac{3x_2}{\theta_0 - t}, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Эта система сводится к дифференциальному уравнению вида

$$(\Theta_0 - t)^2 \ddot{x}_1 + 3(\Theta_0 - t) \dot{x}_1 + 6x_1 = 0,$$

с начальными условиями  $x_1(0) = x_1^0$ ,  $\dot{x}_1(0) = x_2^0$ . Заменой  $t = \Theta_0 - e^\tau$  это дифференциальное уравнение типа Эйлера сводится к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами относительно функции  $y(\tau) = x_1(\Theta_0 - e^\tau)$ , которое имеет вид  $y'' + 2y' + 6y = 0$ . Отсюда имеем

$$y(\tau) = e^{-\tau} \left( c_1 \cos \sqrt{5} \tau + c_2 \sin \sqrt{5} \tau \right),$$

где постоянные  $c_1$  и  $c_2$  находятся из начальных условий

$$y(\tau_0) = x_1^0, \quad y'(\tau_0) = -\Theta_0 x_2^0, \quad (\tau_0 = \ln \Theta_0),$$

Тогда  $x_1(t) = y(\ln(\Theta_0 - t))$ , а функция  $x_2(t)$  находится дифференцированием функции  $x_1(t)$ .

Пусть начальная точка  $x_0 = (4; -4)$ . Тогда единственное положительное решение уравнения (3.11) равно  $\Theta(x_0) = \theta_0 \approx 9,68$ . Средняя из траекторий, представленных на рис. 3.7, соответствует  $p(t, x_1, x_2) \equiv 0$ .

**Наддиагональные возмущения.** Вначале рассмотрим случай  $r_{11} = r_{21} = r_{22} = 0$ , т. е. возмущаются только элементы главной наддиагонали. Установим, что  $d_1^0 \approx -0,99$  и  $d_2^0 \approx 0,33$ . При  $r_{ij} = 0$  полная система (3.8) с управлением (3.12) приобретает вид

$$\dot{x}_1 = (1 + p(t, x_1, x_2))x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{6x_1}{\Theta^2(x_1, x_2)} - \frac{3x_2}{\Theta(x_1, x_2)}. \quad (3.13)$$

где  $\Theta(x_1, x_2)$  – единственное положительное решение (3.11). Матрица  $F^1$ ,



задаваемая формулой (2.4), и  $S_0$ , задаваемая формулой (2.7), имеют вид

$$F^1 = \begin{pmatrix} 144 & 36 \\ 36 & 12 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 36 \\ 36 & 24 \end{pmatrix}, \quad \text{поэтому} \quad (F^1)^{-1}S_0 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы  $(F^1)^{-1}S_0$  равны  $-1$  и  $3$ . Тогда из (2.9) следует, что

$$d_1^0 = \max\{\gamma_1 - 1, (1 - \gamma_2)/3\}, \quad d_2^0 = \min\{(1 - \gamma_1)/3, \gamma_2 - 1\}. \quad (3.15)$$

Заметим, что если  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  близки к 1, то значения  $d_1^0$  и  $d_2^0$  близки к нулю. Например, при  $\gamma_1 = 0.9$  и  $\gamma_2 = 1.1$  имеем  $d_1^0 \approx -0,03$  и  $d_2^0 \approx 0,03$ , и оценка (2.10) на время движения  $T(x_0)$  имеет вид  $10 \Theta(x_0)/11 \leq T(x_0) \leq 10 \Theta(x_0)/9$ . Значение  $d_2^0 - d_1^0$  увеличивается при уменьшении положительного параметра  $\gamma_1$  и увеличении параметра  $\gamma_2 > 1$  (замечание 3.1). При  $\gamma_1 = 0.01$  и  $\gamma_2 = 4$  имеем  $d_1^0 \approx -0,99$ ;  $d_2^0 \approx 0,33$ , при этом оценка (2.10) на время движения  $T(x_0)$  имеет вид  $\Theta(x_0)/4 \leq T(x_0) \leq 100 \Theta(x_0)$ . Хотя величина  $d_2^0 - d_1^0$  больше, оценка на время движения хуже.

Для получения наибольшего интервала для  $p$  в формуле (3.15) устремим  $\gamma_1 \rightarrow 0$ ,  $\gamma_2 \rightarrow +\infty$ . Тогда  $d_1^0 \rightarrow -1$ ,  $d_2^0 \rightarrow 1/3$ . Случай  $p = -1$  приводит к тому, что первая координата в системе (3.8) не управляема (так как первое уравнение имеет вид  $\dot{x}_1 = 0$ ). Исследуем случай  $p = 1/3$ . В этом случае в числителе полной производной функции управляемости в силу системы  $\dot{\Theta} = \frac{d}{dt}\Theta(x(t))$ , задаваемой формулой (2.8), стоит функция

$$-12x_1^2 - 4\Theta x_1 x_2 - \Theta^2 x_2^2/3 = -(6x_1 + \Theta x_2)^2/3. \quad (3.16)$$

Найдем уравнение кривой, на которой производная в силу системы  $\dot{\Theta} = \frac{d}{dt}\Theta(x(t)) = 0$  при  $p = 1/3$ . Для этого выразим  $x_1$  из (3.16):  $x_1 = -\Theta x_2/6$

и подставим в уравнение на функцию управляемости (3.11), которое преобразуется в  $2\Theta^4/3 = 3\Theta^2x_2^2$ , разрешая которое имеем  $\Theta = \pm 3x_2/\sqrt{2}$ . В силу того, что  $\Theta > 0$ , то знак  $+$  соответствует  $x_2 > 0$ , а знак  $-$  соответствует  $x_2 < 0$ . Окончательно имеем, что на кривой  $\mathcal{K} = \{(x_1, x_2) : x_1 = -\frac{x_2|x_2|}{2\sqrt{2}}\}$  при  $p = 1/3$  в системе (3.13) выполнено  $\dot{\Theta} = \frac{d}{dt}\Theta(x(t)) = 0$ . Уравнение кривой  $\mathcal{K}$  можно получить, вычисляя результат [24, п. 54] для (3.11) и (3.16) по переменной  $\Theta$ . Кривая  $\mathcal{K}$  не содержит целых траекторий системы, поэтому на ней при  $p(t, x_1, x_2) = 1/3$  в системе (3.13) выполняется теорема Красовского 1.6, если в качестве функции  $V$  брать функцию управляемости  $\Theta$ . То есть при  $p(t, x_1, x_2) = 1/3$  траектория замкнутой системы (3.13), выходящая из произвольной точки  $x_0$ , оканчивается в точке  $x_1 = 0$  в некоторый конечный момент времени.

Положим  $\gamma_1 = 0,01$ ;  $\gamma_2 = 4$ . Имеем

$$-0.99F^1 + pS \approx \begin{pmatrix} -142.56 & -35.64 + 36p \\ -35.64 + 36p & -11.88 + 24p \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы имеет вид

$$h(p, \lambda) = \lambda^2 + h_1(p)\lambda^1 + h_0(p), \quad \text{где}$$

$$h_1(p) = 154.44 - 24p, \quad h_0(p) = 423.4 - 855.36p - 1296p^2.$$

Достаточные условия устойчивости (лемма 2.2)  $h_i(p) > 0$  выполнены при  $-1 < p < 1/3$ . Примем  $d_1 = -0.99$ ,  $d_2 = 0.33$ .

Для проверки теоремы 1.7 найдем

$$\bar{h}_0 = \max_{p \in [d_1, d_2]} h_0(p) \approx 564.54, \quad \underline{h}_0 = \min_{p \in [d_1, d_2]} h_0(p) \approx 16.98,$$

$$\bar{h}_1 = \max_{p \in [d_1, d_2]} h_1(p) \approx 177.96, \quad \underline{h}_1 = \min_{p \in [d_1, d_2]} h_1(p) \approx 146.76.$$

Имеем, что все 4 полинома Харитонова (1.53) гурвицевы, а 2 полинома (1.54) аперидичны.

Пусть начальная точка  $x_0 = (4; -4)$ . Тогда единственное положительное решение уравнения (3.11) равно  $\Theta(x_0) = \theta_0 \approx 9,68$ . Три

траектории системы (3.13), соответствующие  $p(t, x_1, x_2) \equiv p = -0.9$ ;  $p(t, x_1, x_2) \equiv p = 0$ ;  $p(t, x_1, x_2) \equiv p = 0.3$  представлены на рис. 3.7. При возмущении, удовлетворяющем неравенству  $-0.9 \leq p(t, x_1, x_2) \leq 0.3$ , траектории заполняют область между траекториями, соответствующими  $p = -0.9$  и  $p = 0.3$ .

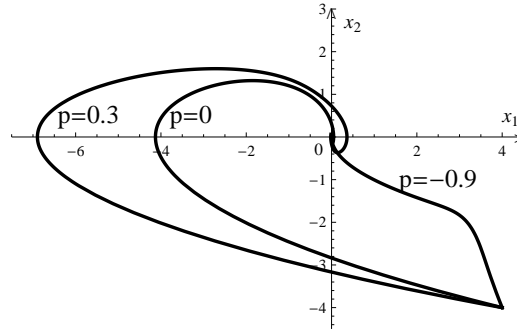


Рис. 3.7: Три траектории системы (3.13)

Для вычисления производной собственного значения по параметру воспользуемся теоремой 1.10. Возьмем интервальное семейство  $K(p) = -0.99F^1 + pS_0$ , выберем точку  $p_0 = 0$ . Найдем аппроксимацию собственного значения  $\lambda(p)$  семейства  $K(p)$  при  $p = p_0$ . Собственные значения семейства  $K(0)$  имеют вид  $\lambda_{min} \approx -151.65$ ,  $\lambda_{max} \approx -2.79$ . В силу формулы (1.56) имеем  $\frac{\partial \lambda_{max}(p)}{\partial p} \approx 5.3$ . Далее  $\frac{\partial^2 \lambda_{max}(p)}{\partial p^2} \approx 18.74$ . Это согласуется с найденной явно первой и второй производной в точке ноль у  $\lambda_{max}(p) \approx$

$$\approx -77.22 + 12p + 37.95\sqrt{3.85 - 0.7p + p^2} \approx -2.79 + 5.3p + 9.37p^2 + \bar{o}(p^2).$$

Если в этом ряде взять только 3 слагаемых ряда (отбросить о малое) и решить неравенство  $-2.79 + 5.3p + 9.37p^2 < 0$ , получится аппроксимация области устойчивости  $-0.89 \dots < p < 0.331 \dots$ . Аналогичная ситуация будет при  $p = p_1 \approx -0.9$  и  $p = p_2 \approx 0.3$ . Графики аппроксимации наибольшего собственного значения интервального семейства  $K(p)$  изображены на рис. 3.8. Наиболее толстая линия соответствует истинному собственному значению.

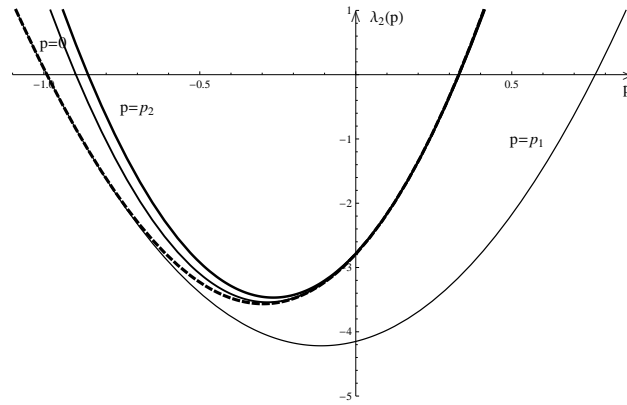


Рис. 3.8: Аппроксимация наибольшего собственного значения при  $n = 2$ .

Заметим, что достаточные условия о существовании общей матрицы Ляпунова ([34, стр. 198]) при  $-0.99 \dots \leq p \leq 0.33 \dots$  не выполнены, а выполнены при  $-0.17 \dots \leq p \leq 0.12 \dots$ .

**Общий случай.** Пусть хотя бы одно из чисел  $r_{11}$ ,  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  отлично от нуля. Найдем границы изменения возмущения  $d_1$  и  $d_2$ , такие, чтобы управление вида (3.12) решало задачу  $(d_1, d_2)$  – позиционного синтеза для робастной системы (3.8). Матрица  $S(\Theta)$ , задаваемая формулой (2.6), имеет вид

$$S(\Theta) = \begin{pmatrix} 72\Theta r_{11} + 24\Theta^2 r_{21} & 36 + 12\Theta(r_{11} + r_{22}) + 6\Theta^2 r_{21} \\ 36 + 12\Theta(r_{11} + r_{22}) + 6\Theta^2 r_{21} & 24 + 12\Theta r_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

поэтому

$$(F^1)^{-1}S(\Theta) = \begin{pmatrix} -3 + \Theta(r_{11} - r_{22}) + \Theta^2 \frac{r_{21}}{6} & -1 + \Theta \frac{r_{11} - 2r_{22}}{3} + \Theta^2 \frac{r_{21}}{6} \\ 12 + 2\Theta(2r_{22} - r_{11}) & 5 + \Theta(3r_{22} - r_{11}) - \Theta^2 \frac{r_{21}}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Вначале будем считать, что  $\Theta$  достаточно мало. Для нахождения границ изменения возмущения применим теорему 3.2. Для этого оценим собственное значение  $\lambda(\Theta)$  матрицы  $(F^1)^{-1}S(\Theta)$ . Как указывалось ранее,  $\sigma\{(F^1)^{-1}S_0\} = \{-1, 3\}$ . Рассмотрим случай минимального собственного значения  $\lambda_{min}$  матрицы  $(F^1)^{-1}S_0$ . Тогда правый собственный вектор

$x_{min}$  и левый собственный вектор  $y_{min}$ , соответствующие  $\lambda_{min}$ , такие, что  $y_{min}^* x_{min} = 1$  имеют вид

$$x_{min} = \left( x_1, -2x_1 \right)^*, \quad y_{min} = \left( \frac{3}{2x_1}, \frac{1}{4x_1} \right)^*, \quad \text{где } x_1 \neq 0,$$

$$\text{откуда } y_{min}^* (F^1)^{-1} S'(0) x_{min} = \frac{r_{11}}{2}.$$

Теперь рассмотрим случай максимального собственного значения матрицы, то есть  $\lambda_{max}((F^1)^{-1} S_0) = 3$ . Тогда правый собственный вектор  $x_{max}$  и левый собственный вектор  $y_{max}$ , соответствующие  $\lambda_{max}$ , такие, что  $y_{max}^* x_{max} = 1$  имеют вид

$$x_{max} = \left( x_1, -6x_1 \right)^*, \quad y_{max} = \left( -\frac{1}{2x_1}, -\frac{1}{4x_1} \right)^*, \quad \text{где } x_1 \neq 0,$$

$$\text{откуда } y_{max}^* (F^1)^{-1} S'(0) x_{max} = -\frac{r_{11}}{2} + 2r_{22}.$$

Рассмотрим случай с конкретными значениями чисел  $r_{ij}$ . Пусть  $r_{11} = -1$ ,  $r_{21} = 1$ ,  $r_{22} = -1$ . Покажем, что при  $0 \leq \Theta \leq 0.85$  можно выбрать  $d_1^0 \approx -0,66$  и  $d_2^0 \approx 0,33$ . Так как  $y_{min}^* (F^1)^{-1} S'(0) x_{min} = -1/2$ ,  $y_{max}^* (F^1)^{-1} S'(0) x_{max} = -3/2$ , то при достаточно малом  $\Theta$ , таком, что  $0 \leq \Theta \leq 1$ , выполнены неравенства

$$\lambda(\Theta) \geq -1 - \frac{1}{2}\Theta \geq -\frac{3}{2} = \lambda_1, \quad \lambda(\Theta) \leq 3 - \frac{3}{2}\Theta \leq 3 = \lambda_2.$$

Собственные значения  $\lambda(\Theta)$  матрицы  $(F^1)^{-1} S(\Theta)$  имеют вид

$$\lambda_{1,2}(\Theta) = \left\{ 1 - \Theta - \frac{\Theta^2}{6} \pm \frac{\sqrt{36 - 18\Theta - 3\Theta^2 + 3\Theta^3 + \Theta^4}}{3} \right\}. \quad (3.19)$$

На рис. 3.9 приведены графики собственных значений  $\lambda_{1,2}(\Theta)$ . Оценка  $\lambda_1 \leq \lambda_{1,2}(\Theta) \leq \lambda_2$  верна при  $0 \leq \Theta \leq 0.85$ , тогда теорема 3.2 справедлива при  $c = 0.85$ . Из формулы (2.9) при  $\tilde{d}_1^0 = 1/\lambda_1$ ,  $\tilde{d}_2^0 = 1/\lambda_2$ , получаем, что  $d_1^0 \approx -0,66$  и  $d_2^0 \approx 0,33$ .

При  $\Theta > 0.85$  теорема 3.2 не применима. В этом случае возможно применение методов интервального анализа, хотя при  $0 \leq \Theta \leq 0.85$  методы интервального анализа (теорема 3.3) дают более узкий интервал

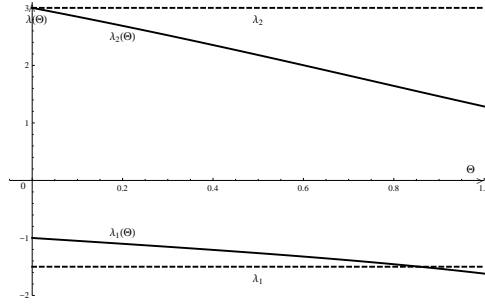


Рис. 3.9: Собственные значения матрицы  $(F^1)^{-1}S(\Theta)$  при  $r_{11} = -1$ ,  $r_{21} = 1$ ,  $r_{22} = -1$ .

для изменения границ возмущения, чем теорема 3.2. Требуется оценить элементы матрицы  $(F^1)^{-1}S(\Theta)$ , задаваемой формулой (3.18), которая при  $r_{11} = -1$ ,  $r_{21} = 1$ ,  $r_{22} = -1$  равна

$$(F^1)^{-1}S(\Theta) = \begin{pmatrix} -3 + \frac{\Theta^2}{6} & -1 + \frac{\Theta}{3} + \frac{\Theta^2}{6} \\ 12 - 2\Theta & 5 - 2\Theta - \frac{\Theta^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Так как при  $\Theta \geq 0$  функции  $-3 + \frac{\Theta^2}{6}$  и  $-1 + \frac{\Theta}{3} + \frac{\Theta^2}{6}$  монотонно возрастают, а  $12 - 2\Theta$  и  $5 - 2\Theta - \frac{\Theta^2}{2}$  монотонно убывают, то при  $0 \leq \Theta \leq 0.85$  матрицы  $\underline{M}$  и  $\overline{M}$  имеют вид

$$\underline{M} \approx \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 10.29 & 2.92 \end{pmatrix}, \quad \overline{M} \approx \begin{pmatrix} -2.88 & -0.59 \\ 12 & 5 \end{pmatrix},$$

и собственные значения (1.61) интервальной матрицы  $[\underline{M}; \overline{M}]$  лежат на отрезке  $[-6.98; 8]$ . Полученная оценка дает большую погрешность на истинные собственные значения матрицы  $(F^1)^{-1}S(\Theta)$ . Из формулы (3.19) следует более точная оценка:  $\{\lambda_1(\Theta), \lambda_2(\Theta)\} \in [-1.5; 3]$ . Из теоремы 3.3 получаем, что  $d_1^0 \approx -0.14$  и  $d_2^0 \approx 0.12$ . В этом случае  $d_2^0 - d_1^0 \approx 0.26$ . Теорема 3.2 дает более широкий интервал:  $d_2^0 - d_1^0 \approx 0.99$ .

Пусть  $0 \leq \Theta \leq 1.8$ . Установим, что выполнены соотношения  $d_1^0 \approx -0.11$  и  $d_2^0 \approx 0.11$ . Матрицы  $\underline{M}$  и  $\overline{M}$  имеют вид

$$\underline{M} \approx \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8.4 & -0.22 \end{pmatrix}, \quad \overline{M} \approx \begin{pmatrix} -2.46 & 0.14 \\ 12 & 5 \end{pmatrix},$$

и собственные значения (1.61) интервальной матрицы  $[\underline{M}; \overline{M}]$  лежат на отрезке  $[-8.79; 8.45]$ . Эта оценка дает большую погрешность на истинные собственные значения матрицы  $(F^1)^{-1}S(\Theta)$ . Из формулы (3.19) следует более точная оценка:  $\{\lambda_1(\Theta), \lambda_2(\Theta)\} \in [-2.9; 3]$ . Из теоремы 3.3 получаем, что  $d_1^0 \approx -0.11$  и  $d_2^0 \approx 0.11$ .

Пусть  $0 \leq \Theta \leq 3$ . Установим, что выполнены соотношения  $d_1^0 \approx -0.08$  и  $d_2^0 \approx 0.10$ . Матрицы  $\underline{M}$  и  $\overline{M}$  имеют вид

$$\underline{M} \approx \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 6 & -5.5 \end{pmatrix}, \quad \overline{M} \approx \begin{pmatrix} -1.5 & 1.5 \\ 12 & 5 \end{pmatrix},$$

и собственные значения (1.61) интервальной матрицы  $[\underline{M}; \overline{M}]$  лежат на отрезке  $[-12.08; 9.58]$ . Эта оценка дает большую погрешность на истинные собственные значения матрицы  $(F^1)^{-1}S(\Theta)$ . Из формулы (3.19) следует более точная оценка:  $\{\lambda_1(\Theta), \lambda_2(\Theta)\} \in [-7.1; 3]$ . Из теоремы 3.3 получаем, что  $d_1^0 \approx -0.08$  и  $d_2^0 \approx 0.10$ .

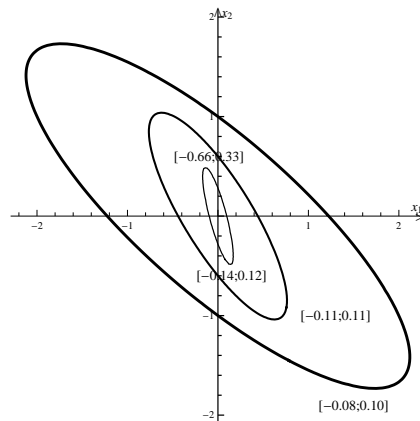


Рис. 3.10: Области управляемости

Границы областей управляемости – это линии уровня функции  $\Theta(x_1, x_2)$ , задаваемой уравнением (3.11). На рис. 3.10 представлены области управляемости, ограниченные линиями уровня функции  $\Theta(x_1, x_2)$  при  $\Theta = 0.85$ ,  $\Theta = 1.8$ ,  $\Theta = 3$ . Увеличение осей эллипсов соответствует уве-

личению значения  $\Theta$ . При  $0 \leq \Theta \leq 0.85$  теорема 3.2 дает  $d_2^0 - d_1^0 \approx 0.99$ , а теорема 3.3 дает  $d_2^0 - d_1^0 \approx 0.26$ . Для больших эллипсов получены оценки в силу теоремы 3.3. При  $0 \leq \Theta \leq 1.8$  выполнено  $d_2^0 - d_1^0 \approx 0.22$ , а при  $0 \leq \Theta \leq 3$  выполнено  $d_2^0 - d_1^0 \approx 0.18$ .

В качестве конкретной реализации возмущения рассмотрим функцию  $p = p(t, x_1, x_2) = 0.33 \sin(50(x_1^2 + x_2^2)t)$ . Выберем в качестве начальной точки  $x_0 = (0.12; -0.1)$ . Решая уравнение (3.11), получаем, что  $\Theta(x_0) = \theta_0 \approx 0.83$ . Тогда в силу теоремы 3.2  $d_1^0 \approx -0,66$  и  $d_2^0 \approx 0,33$ . Положим  $\theta(t) = \Theta(x(t))$ . Для нахождения траектории воспользуемся замечанием 2.5. Траектория удовлетворяет следующей задаче Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -p x_1 + (1 + p) x_2, \\ \dot{x}_2 = p x_1 - p x_2 - \frac{6 x_1}{\theta^2} - \frac{3x_2}{\theta}, \\ \dot{\theta} = \phi, \\ x_1(0) = 0.12, \quad x_2(0) = -0.1, \quad \theta(0) = 0.83. \end{cases} \quad (3.20)$$

где  $\phi = ((-12 + 6p \theta + 2p \theta^2) x_1^2 + (-6 + 6p + 4p \theta + 2p \theta^2) x_1 x_2 \theta + (-1 + 2p + p \theta) x_2^2 \theta^2) / (12x_1^2 + 6x_1 x_2 \theta + x_2^2 \theta^2)$ .

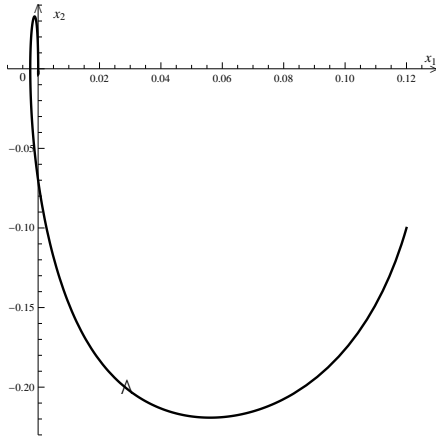


Рис. 3.11: Траектория системы (3.20)

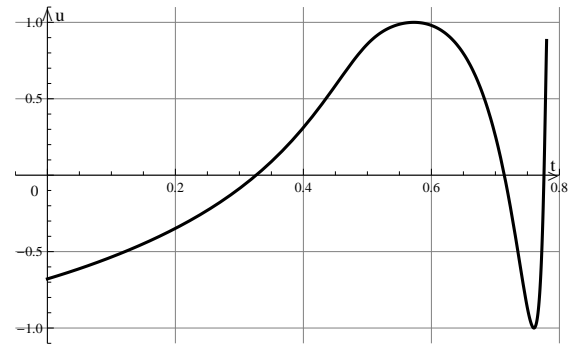


Рис. 3.12: Управление на траектории системы (3.20)

Пусть  $(x_1^0(t), x_2^0(t), \theta(t))$  – решение системы (3.20). На рис. 3.11 представлена кривая  $(x_1^0(t), x_2^0(t))$ . На рис. 3.12 приведен график управления

$$u(x_1^0(t), x_2^0(t)) = -\frac{6x_1^0(t)}{\theta^2(t)} - \frac{3x_2^0(t)}{\theta(t)},$$



причем  $|u(x_1^0(t), x_2^0(t))| \leq 1$ . Функция управляемости  $\theta(t)$  близка к линейной ( $y = 0.83 - t$ ) и представлена на рис. 3.13. Обратим внимание на то, что  $\Theta(x(t))$  почти линейна, то есть значение  $\frac{d}{dt}\Theta(x(t))$  "близко" к  $-1$ . Напомним, что при  $p(t, x) = 0$  выполнено равенство  $\frac{d}{dt}\Theta(x(t)) = -1$ . Можно показать численно, что время попадания в начало координат равно  $T \approx 0.78$ . При этом оценка (2.10) дает более грубый результат, а именно:  $0.21 \leq T \leq 83.25$ . График производной по времени от функции управляемости дан на рис. 3.14.

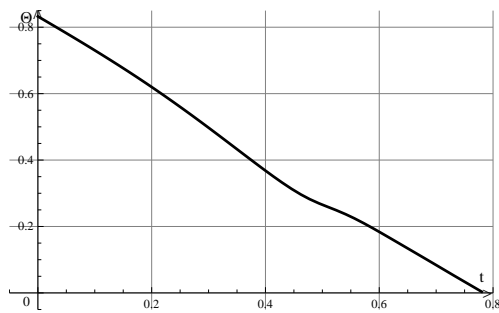


Рис. 3.13: Функция управляемости на траектории системы (3.20)

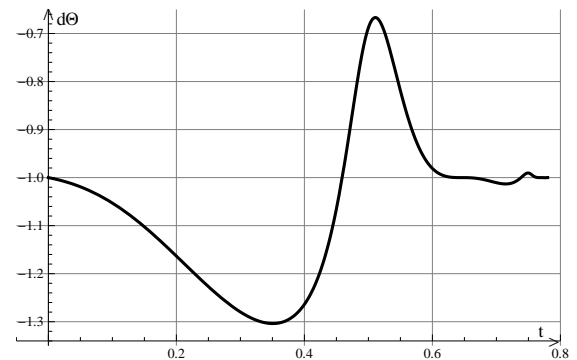


Рис. 3.14: Производная от функции управляемости на траектории системы (3.20)

### 3.4. Управление движением материальной точки с учетом неизвестного трения

В работе [21] рассмотрена задача управления движением материальной точки с учетом неизвестного трения. Движение этой системы описывается уравнением

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = p(t, x_1, x_2)x_2 + u, \quad (3.21)$$

при ограничениях на управление вида  $|u| \leq 1$ . Функция  $p(t, x_1, x_2)$  — *неизвестное* возмущение, удовлетворяющее ограничению  $d_1 \leq p(t, x_1, x_2) \leq d_2$ ,  $d_1 < 0$ ,  $d_2 > 0$ . Если  $p(t, x_1, x_2) = p$  неизвестная постоянная, тогда слагаемое  $p x_2$  отвечает вязкому трению, пропорци-

ональному первой степени скорости. Рассматриваемые ограничения на  $p(t, x_1, x_2)$  не исключают "отрицательного" трения.

При  $p(t, x_1, x_2) \equiv 0$  система (3.21) является канонической системой. Она полностью управляема. Пусть  $u(x)$  – управление, задаваемое формулой (3.12). Наша цель – найти такие  $d_1$  и  $d_2$ , при которых для всех возмущений  $p(t, x_1, x_2) \in \mathcal{P}_{d_1, d_2}$  траектория  $x(t)$  замкнутой системы (2.2) с управлением  $u = u(x)$ , выходящая из произвольной начальной точки  $x_0$ , оканчивалась в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T(x_0, p(t, x_1, x_2))$ .

В этом случае матрица  $S(\Theta, t, x)$ , задаваемая формулой (3.17) при  $r_{22} = p(t, x_1, x_2)$ ,  $r_{11} = r_{12} = r_{21} = 0$ , имеет вид

$$S(\Theta, t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 12\Theta p(t, x_1, x_2) \\ 12\Theta p(t, x_1, x_2) & 12\Theta p(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

а матрица  $(F^1)^{-1}S(\Theta)$ , задаваемая формулой (3.18) –

$$(F^1)^{-1}S(\Theta) = \begin{pmatrix} -\Theta p(t, x_1, x_2) & -2\Theta \frac{p(t, x_1, x_2)}{3} \\ 4\Theta p(t, x_1, x_2) & 3\Theta p(t, x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Тогда  $\lambda_{max}((F^1)^{-1}S(\Theta, t, x_1, x_2)) =$

$$= \max\{(3 - 2\sqrt{3})\Theta p(t, x_1, x_2)/3; (3 + 2\sqrt{3})\Theta p(t, x_1, x_2)/3\}.$$

Из условия

$$\dot{\Theta} \leq -1 + \lambda_{max}((F^1)^{-1}S(\Theta, t, x_1, x_2)) \leq -\gamma_1$$

следует, что

$$\frac{(1 - \gamma_1)3}{(3 - 2\sqrt{3})\Theta} \leq p(t, x_1, x_2) \leq \frac{(1 - \gamma_1)3}{(3 + 2\sqrt{3})\Theta} \quad (3.24)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема:

**Теорема 3.4.** Пусть  $\gamma_1$  – произвольное число, удовлетворяющее неравенству  $0 < \gamma_1 < 1$ . Пусть функция управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  – единствен-

ное положительное решение уравнения (3.11). Будем рассматривать решение задачи синтеза в эллипсоиде  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$ . Пусть величина коэффициента нелинейного вязкого трения удовлетворяет неравенству

$$\frac{(1 - \gamma_1)3}{(3 - 2\sqrt{3})c} = d_1(c) \leq p(t, x_1, x_2) \leq d_2(c) = \frac{(1 - \gamma_1)3}{(3 + 2\sqrt{3})c}. \quad (3.25)$$

Тогда управление, задаваемое формулой (3.12), решает задачу локального позиционного синтеза для робастной системы (3.21). При этом траектория замкнутой системы (2.2), выходящая из произвольной начальной точки  $x(0) = x_0 \in Q$ , оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T(x_0)$ , для которого выполнена оценка (2.23).

Выберем  $\gamma_1 = 0.01$ . Графики  $d_1(c)$  и  $d_2(c)$  представлены на рисунке 3.15.

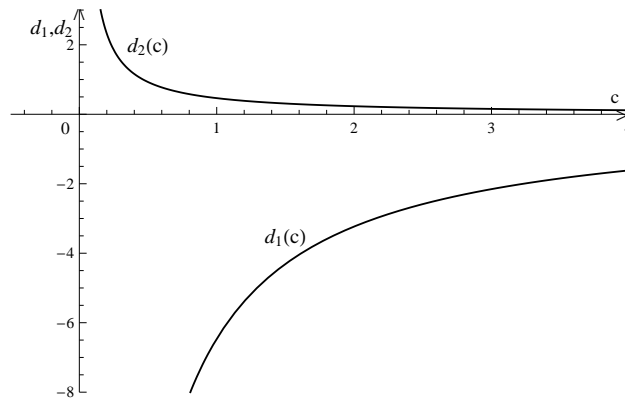


Рис. 3.15: Графики  $d_1(c)$  и  $d_2(c)$

Проиллюстрируем решение для конкретного вязкого трения  $p(t, x_1, x_2)$ . Если область решения задачи синтеза равна  $Q = \{x : \Theta(x) \leq 1\}$ , то  $-6.46 \leq p(t, x_1, x_2) \leq 0.46$ . Будем рассматривать решение задачи синтеза в эллипсоиде  $Q = \{x : \Theta(x) \leq 3\}$ . Тогда  $-2.15 \leq p(t, x_1, x_2) \leq 0.15$ . В качестве конкретной реализации коэффициента нелинейного вязкого трения рассмотрим функцию  $p(t, x_1, x_2) = 0.15 \sin(5x_1^2)$ . Выберем начальную точку  $x_0 = (-1.9, 1.7) \in Q$ . Для нахождения траектории, начинающейся в заданной точке  $x_0 \in Q$ , поступаем следующим образом. Находим единственное положительное решение уравнения (3.11)  $\Theta(x_0) = \theta_0 \approx 2.98$ .

Положим  $\theta(t) = \Theta(x(t))$ . Траектория удовлетворяет следующей системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 0.15 \sin(5x_1^2)x_2 - \frac{6x_1}{\Theta^2(x_1, x_2)} - \frac{3x_2}{\Theta(x_1, x_2)}, \\ \dot{\theta} = \phi, \\ x_1(0) = -1.9, \quad x_2(0) = 1.7, \quad \theta(0) = 2.98, \end{cases} \quad (3.26)$$

где

$$\phi = \frac{-144 x_1^2 + (-72 + 3.6 \theta \sin(5x_1^2)) x_1 x_2 \theta + (-12 + 1.8 \theta \sin(5x_1^2)) x_2^2 \theta^2}{144x_1^2 + 72x_1 x_2 \theta + 12x_2^2 \theta^2}$$

Пусть  $(x_1^0(t), x_2^0(t), \theta(t))$  – решение системы (3.26). На рис. 3.16 представлена кривая  $(x_1^0(t), x_2^0(t))$  а также область решения задачи синтеза  $Q = \{x : \Theta(x) \leq 3\}$ . На рис. 3.17 приведен график управления

$$u(x_1^0(t), x_2^0(t)) = -\frac{6x_1^0(t)}{\theta^2(t)} - \frac{3x_2^0(t)}{\theta(t)},$$

причем  $|u(x_1^0(t), x_2^0(t))| \leq 1$ . Функция управляемости  $\theta(t)$  близка к линейной ( $y = 2.98 - t$ ) и представлена на рис. 3.18. Можно показать численно, что время попадания в начало координат равно  $T \approx 3.16$ . При этом оценка (2.23) дает более грубый результат, а именно:  $T \leq 298$ . График производной по времени от функции управляемости дан на рис. 3.19.

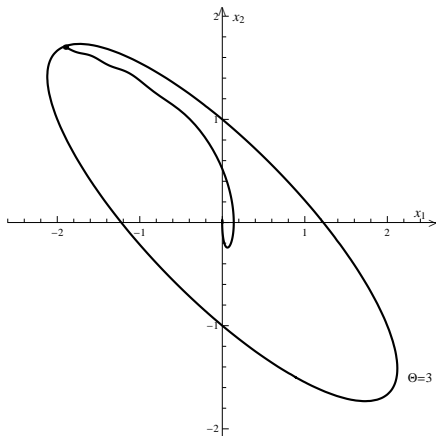


Рис. 3.16: Траектория системы (3.26)

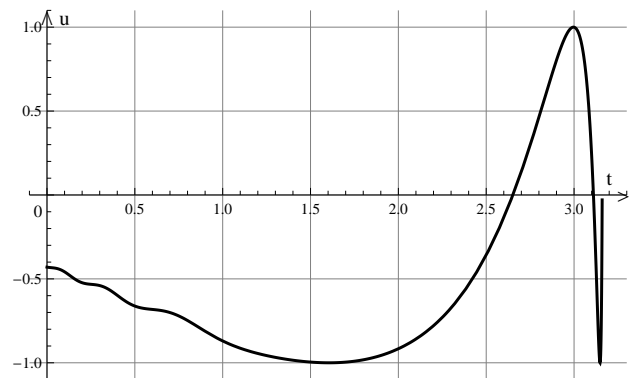


Рис. 3.17: Управление на траектории системы (3.26)

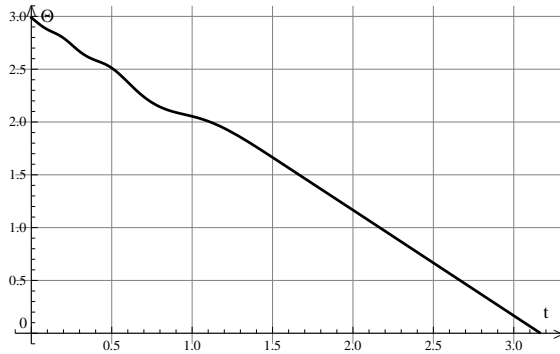


Рис. 3.18: Функция управляемости на траектории системы (3.26)

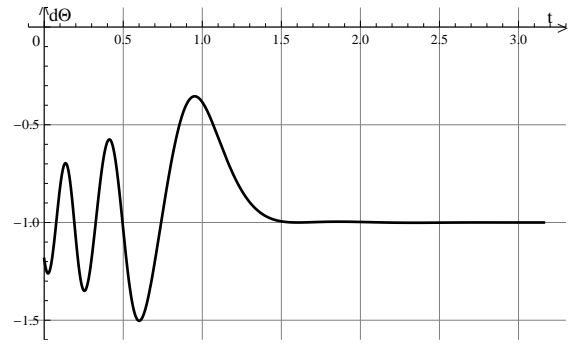


Рис. 3.19: Производная от функции управляемости на траектории системы (3.26)

### 3.5. Решение задачи синтеза для робастной колебательной системы

В работе [40] рассмотрена задача позиционного синтеза ограниченного управления для системы

$$\dot{x} = (A + pD)x + bu, \quad (3.27)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — фазовый вектор;  $u \in \mathbb{R}^1$  — скалярное управление, удовлетворяющее ограничению  $|u| \leq 1$ ;  $A$ ,  $D$ ,  $b$  — вещественные матрицы параметров объекта размерности  $(n \times n)$ ,  $(n \times n)$ ,  $(n \times 1)$  соответственно. В системе (3.27)  $p$  — неизвестное возмущение, удовлетворяющее ограничению  $d_1 \leq p \leq d_2$ ,  $d_1 < 0$ ,  $d_2 > 0$ , причем  $d_1$  и  $d_2$  выбраны так, что система (3.27) полностью управляема.

Пусть  $f(s) = e^{-s}$  и матрица  $N(\Theta)$  задается формулой (1.10). Выберем управление  $u = u(x)$  задаваемое формулой (1.12). Уравнение (1.13) примет вид

$$\dot{x} = (A + pD)x - \frac{1}{2} bb^* N^{-1}(\Theta(x))x, \quad (3.28)$$

Наша цель — найти такие  $d_1 < 0$  и  $d_2 > 0$ , при которых траектория  $x(t)$  замкнутой системы (3.28) с управлением  $u = u(x)$ , выходящая из произвольной начальной точки  $x_0$ , оканчивалась в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T(x_0, p)$ .

Формула (1.14) преобразуется в

$$\left. \frac{d\Theta}{dt} \right|_{(3.28)} = \frac{-\Theta(N^{-1}(\Theta)x, x) + p \Theta^2((N^{-1}(\Theta)D + D^*N^{-1}(\Theta))x, x)}{\Theta(N^{-1}(\Theta)x, x) + (N_1(\Theta)N^{-1}(\Theta)x, N^{-1}(\Theta)x)}. \quad (3.29)$$

Обозначим  $y = N^{-1}(\Theta)x$ ,

$$N_3(\Theta) = \int_0^{+\infty} (\Theta + t)e^{-\frac{t}{\Theta}} e^{-At} b b^* e^{-A^*t} dt, \quad (3.30)$$

тогда равенство (3.29) представляет собой

$$\left. \frac{d\Theta}{dt} \right|_{(3.28)} = -\frac{\Theta(N(\Theta)y, y)}{(N_3(\Theta)y, y)} + p \Theta^2 \frac{((DN(\Theta) + N(\Theta)D^*)y, y)}{(N_3(\Theta)y, y)}. \quad (3.31)$$

При решении задачи синтеза для робастных систем (3.27) будем требовать, чтобы выполнялось неравенство

$$\left. \frac{d\Theta}{dt} \right|_{(3.28)} \leq \eta < 0$$

при всех возможных значениях параметра  $p$ . Выполнение этого условия и условия (1.11) обеспечивают конечность времени попадания траекторий в начало координат и ограниченность управления (Теорема 1.1). Для оценки постоянной  $a_0$  воспользуемся неравенством (1.11). Для того, чтобы управление (1.12) удовлетворяло заданным ограничениям  $|u| \leq 1$  в робастной системе (3.27), достаточно, чтобы выполнялось неравенство (1.11) при всех допустимых  $p$ ,  $\Theta$ . То есть должно выполняться усиленное неравенство

$$0 < a_0 \leq \inf_{\Theta > 0; d_1 \leq p \leq d_2} \left( \frac{2}{\Theta(N^{-1}(\Theta, p)b, b)} \right), \quad (3.32)$$

где

$$N(\Theta, p) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\Theta}} e^{-(A+pD)t} b b^* e^{-(A+pD)^*t} dt. \quad (3.33)$$

В качестве примера рассмотрим колебательную систему 2 порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + px_1 + u, \end{cases} \quad d_1 \leq p \leq d_2, \quad (d_1 < 0, d_2 > 0). \quad (3.34)$$

или в матричном виде  $\dot{x} = (A + pD)x + bu$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эта система рассматривалась в [14], в качестве  $N_f(\Theta)$  бралась матрица  $N_2(\Theta)$ , задаваемая формулой (1.16). Такой выбор матрицы представляет некоторые трудности вычислительного характера. Диапазон для параметра  $p$  и время попадания в начало координат согласуется с результатами, полученными в [14].

Обозначим  $x = (x_1, x_2)$ . Пусть функция управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  определяется уравнением (1.8), причем матрица  $N(\Theta)$ , задаваемая формулой (1.10), имеет вид

$$N(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{2\Theta^3}{1+4\Theta^2} & -\frac{\Theta^2}{1+4\Theta^2} \\ -\frac{\Theta^2}{1+4\Theta^2} & \frac{\Theta(1+2\Theta^2)}{1+4\Theta^2} \end{pmatrix}.$$

Для оценки постоянной  $a_0$  воспользуемся неравенством (3.32). В нашем случае матрица  $N(\Theta, p)$ , задаваемая формулой (3.33), имеет вид

$$N(\Theta, p) = \begin{pmatrix} \frac{2\Theta^3}{1+4\Theta^2(1-p)} & -\frac{\Theta^2}{1+4\Theta^2(1-p)} \\ -\frac{\Theta^2}{1+4\Theta^2(1-p)} & \frac{\Theta(1+2\Theta^2(1-p))}{1+4\Theta^2(1-p)} \end{pmatrix}.$$

Тогда  $\Theta(N^{-1}(\Theta, p)b, b) = \Theta \times \frac{2}{\Theta} = 2$ . Поэтому в формуле (3.32) выполнено  $a_0 = 1$  и уравнение (1.8) для системы (3.34) представляет собой

$$2\Theta^4 = (1 + 2\Theta^2)x_1^2 + 2\Theta x_1 x_2 + 2\Theta^2 x_2^2. \quad (3.35)$$

Управление имеет вид

$$u(x) = -\frac{x_1}{2\Theta^2(x)} - \frac{x_2}{\Theta(x)}, \quad (3.36)$$

где  $\Theta(x)$  – единственное положительное решение (3.35).

**Теорема 3.5.** Пусть управление  $u(x)$  определяется равенством (3.36), где  $\Theta(x)$  положительное решение уравнения (3.35). Пусть  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$  и числа  $d_1$  и  $d_2$  выбраны так, что

$$-0.225/(0.53 c) \leq d_1 \leq 0, \quad 0 \leq d_2 \leq 0.225/(0.5 c).$$

Тогда при любом значении  $p$ , удовлетворяющем неравенству  $d_1 \leq p \leq d_2$ , управление  $u(x)$  решает задачу синтеза в области  $Q$  для системы (3.34), то есть траектория полной системы (3.28) при  $u = u(x)$ , начинающаяся в произвольной точке  $x_0 \in Q$ , оканчивается в точке  $x_1 = 0$  в некоторый конечный момент времени  $T(x_0)$ , причем  $x(t) \in Q$ ,  $|u(x)| \leq 1$ ;

$$T(x_0) \leq \max \left\{ \frac{\Theta(x_0)}{0.226 + 0.53 c d_1}, \frac{\Theta(x_0)}{0.226 - 0.5 c d_2} \right\}.$$

**Доказательство.** Вычислим производную в силу системы от функции  $\Theta$ . Из равенства (3.31) следует, что

$$\left. \frac{d\Theta}{dt} \right|_{(3.28)} = -\lambda_{\min}(\Theta N_3^{-1}(\Theta)N(\Theta)) + p \lambda_{\max}(\Theta^2 N_3^{-1}(\Theta)(DN(\Theta) + N(\Theta)D^*)), \quad (3.37)$$

В нашем случае матрица  $N_3(\Theta)$ , задаваемая формулой (3.30), имеет вид

$$N_3(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{8\Theta^4(1+2\Theta^2)}{(1+4\Theta^2)^2} & -\frac{\Theta^3(3+4\Theta^2)}{(1+4\Theta^2)^2} \\ -\frac{\Theta^3(3+4\Theta^2)}{(1+4\Theta^2)^2} & \frac{2\Theta^2(1+4\Theta^2+8\Theta^4)}{(1+4\Theta^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда  $\min_{\Theta>0} \lambda_{\min}(\Theta N_3^{-1}(\Theta)N(\Theta)) = 0.226$ ,

$$\sigma(\Theta^2 N_3^{-1}(\Theta)(DN(\Theta) + N(\Theta)D^*)) = \left\{ \frac{-2\Theta^2 \pm 4\sqrt{2\Theta^4(1+2\Theta^2)}}{7+16\Theta^2} \right\},$$

причем

$$-\frac{2\Theta^2 + 4\sqrt{2\Theta^4(1+2\Theta^2)}}{7+16\Theta^2} \geq -0.53 \Theta, \quad \frac{-2\Theta^2 + 4\sqrt{2\Theta^4(1+2\Theta^2)}}{7+16\Theta^2} \leq 0.5 \Theta.$$

Потребуем, чтобы производная от функции  $\Theta$  была отрицательной. Так как  $d_1 \geq -0.225/(0.53 c)$ ,  $d_2 \leq 0.225/(0.5 c)$ , то из (3.37) следует, что



$\frac{d\Theta}{dt}\Big|_{(3.28)} \leq -0.226 + 0.225 < 0$ . Это является достаточным условием попадания в начало координат за конечное время (теорема 1.1).  $\square$

Выберем как и в [14] начальные условия системы вида  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0.5$ . Тогда  $\Theta(x_1(0), x_2(0)) = 1.37$ ,  $d_1 = -0.30$ ,  $d_2 = 0.32$  и для  $\forall p : p \in [-0.30, 0.32]$  справедливо неравенство  $\frac{d\Theta}{dt}\Big|_{(3.28)} < 0$ . Можно показать численно, что при  $p = -0.30$  время попадания в начало координат  $T \approx 3.32$ , при  $p = 0$  время  $T \approx 3.05$ , при  $p = 0.32$  время  $T \approx 2.93$ . В [14] получены такие результаты:  $d_1 = -0.31$ ,  $d_2 = 0.40$ . При  $p = -0.31$  время попадания в начало координат  $T \approx 3.25$ , при  $p = 0$  время  $T \approx 3.14$ , при  $p = 0.40$  время  $T \approx 3.25$ .

**Замечание 3.3.** Выпишем характеристический полином матрицы  $A + pD$ . Он имеет вид  $\det(\lambda E - (A + pD)) = \lambda^2 + 1 - p$ . Для этой матрицы возможны 2 полинома Харитонова (1.53):

$$S_1(\lambda) = \lambda^2 + 1 - d_2, \quad S_2(\lambda) = \lambda^2 + 1 - d_1$$

(напомним, что  $d_1 \leq p \leq d_2$ ). Корни обоих полиномов имеют действительную часть равную нулю. То есть в данном примере мы не можем воспользоваться теоремой Харитонова.

### 3.6. Решение задачи синтеза для связанного осциллятора

Также в работе [40] рассмотрена материальная система, схема которой представлена на рисунке 3.20. Жесткость пружины обозначена  $k_1$ , а массы грузов  $m_1$  и  $m_2$ . Прямая, по которой движутся грузы  $m_1$  и  $m_2$ , абсолютно гладкая. Управляющее воздействие прилагается к концу второго груза. За обобщенные координаты  $y_1$  и  $y_2$  примем расстояния первого и второго грузов соответственно от положения, при котором пружина находится в ненапряженном состоянии. Уравнения Лагранжа для данной системы име-

ЮТ ВИД

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_1 y_2 = 0, \\ m_2 \ddot{y}_2 - k_1 y_1 + k_1 y_2 = u. \end{cases}$$

Сделав замену переменных  $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = y_2$ ,  $x_3 = \dot{y}_1$ ,  $x_4 = \dot{y}_2$  и положив  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k_1 = 1 + p$ , переходим к колебательной системе 4 порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - p x_1 + x_2 + p x_2, \\ \dot{x}_4 = x_1 + p x_1 - x_2 - p x_2 + u, \end{cases} \quad (3.38)$$

В системе (3.38)  $p$  – неизвестное возмущение, удовлетворяющее ограничению  $d_1 \leq p \leq d_2$ ,  $d_1 < 0$ ,  $d_2 > 0$ .

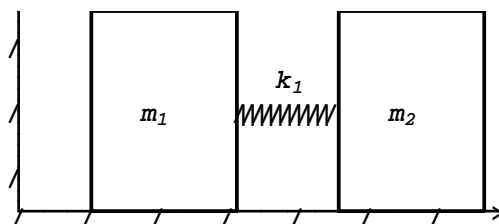


Рис. 3.20: Связанный осциллятор

Пусть  $f(s) = e^{-s}$  и матрица  $N(\Theta)$  задается формулой (1.10). Выберем управление  $u = u(x)$  задаваемое формулой (1.12). Наша цель – найти такие  $d_1 < 0$  и  $d_2 > 0$ , при которых траектория  $x(t)$  замкнутой системы (3.28) с управлением  $u = u(x)$ , выходящая из произвольной начальной точки  $x_0$ , оканчивалась в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T(x_0, p)$ .

Запишем систему (3.38) в матричном виде  $\dot{x} = (A + pD)x + bu$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как жесткость пружины  $k_1 = 1 + p$  должна быть положительной, то  $p > -1$ . Проверим управляемость полученной системы при всех  $p$ . Имеем  $\text{rank}(b, (A + pD)b, (A + pD)^2b, (A + pD)^3b) = 4$  при  $p \neq -1$ . То есть при  $p > -1$  выполнен критерий Калмана и система полностью управляема. Обозначим  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

Решение основано на методе функции управляемости (теорема 1.2). Пусть функция управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  определяется уравнением (1.8), где симметричная матрица  $N(\Theta) = (n_{ij}(\Theta))_{i,j=1}^n$ , задаваемая формулой (1.10), состоит из элементов

$$\begin{aligned} n_{11}(\Theta) &= \frac{4\Theta^7(5 + 4\Theta^2)}{(1 + 2\Theta^2)^2(1 + 8\Theta^2)}, & n_{12}(\Theta) &= \frac{4\Theta^5}{1 + 8\Theta^2}, \\ n_{13}(\Theta) &= -\frac{2\Theta^6(5 + 4\Theta^2)}{(1 + 2\Theta^2)^2(1 + 8\Theta^2)}, & n_{14}(\Theta) &= -\frac{\Theta^4(1 + 8\Theta^4)}{(1 + 2\Theta^2)^2(1 + 8\Theta^2)}, \\ n_{22}(\Theta) &= \frac{2\Theta^3(1 + 8\Theta^2 + 10\Theta^4 + 8\Theta^6)}{(1 + 2\Theta^2)^2(1 + 8\Theta^2)}, & n_{23}(\Theta) &= -\frac{\Theta^4(3 + 16\Theta^2 + 8\Theta^4)}{(1 + 2\Theta^2)^2(1 + 8\Theta^2)}, \\ n_{24}(\Theta) &= -\frac{\Theta^2(1 + 8\Theta^2 + 10\Theta^4 + 8\Theta^6)}{(1 + 2\Theta^2)^2(1 + 8\Theta^2)}, & n_{33}(\Theta) &= \frac{6\Theta^5}{(1 + 2\Theta^2)(1 + 8\Theta^2)}, \\ n_{34}(\Theta) &= \frac{\Theta^3}{1 + 8\Theta^2}, & n_{44}(\Theta) &= \frac{\Theta(1 + 8\Theta^2 + 6\Theta^4)}{(1 + 2\Theta^2)(1 + 8\Theta^2)}. \end{aligned}$$

Уравнение (1.8) для системы (3.38) представляет собой

$$\begin{aligned} 2a_0\Theta^8 &= x_1^2(1 - 2\Theta^2 + 6\Theta^4 + 4\Theta^6) + 2x_1x_2\Theta^2(-3 + 8\Theta^2 + 4\Theta^4) + \\ &+ 2x_1x_3\Theta(-3 + 4\Theta^2 + 2\Theta^4) + 2x_1x_4\Theta^3(-1 + 4\Theta^2) + 2x_2^2\Theta^4(7 + 2\Theta^2) + \\ &+ 2x_2x_3\Theta^3(11 + 4\Theta^2) + 12x_2x_4\Theta^5 + 2x_3^2\Theta^2(5 + 4\Theta^2 + 2\Theta^4) + 8x_3x_4\Theta^4 + 4x_4^2\Theta^6. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Управление, задаваемое формулой (1.9), имеет вид

$$u(x) = -\frac{x_1(1 - 4\Theta^2)}{2\Theta^4} - \frac{3x_2}{\Theta^2} - \frac{2x_3}{\Theta^3} - \frac{2x_4}{\Theta}, \quad (3.40)$$

где  $\Theta = \Theta(x)$  решение (3.39). Заметим, что хотя  $\Theta(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$  и  $\Theta(x)$  в формуле (3.40) стоит в знаменателе, управление, задаваемое формулой (3.40), удовлетворяет ограничению  $|u| \leq 1$ .

**Теорема 3.6.** Пусть управление  $u(x)$  определяется равенством (3.40), где  $\Theta(x)$  положительное решение уравнения (3.39) при  $a_0 = 1/2$ . Пусть  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$  и числа  $d_1$  и  $d_2$  выбраны так, что

$$\begin{aligned} -0.095/((c - 0.75)^2 + 0.65) &\leq d_1 \leq 0, \\ 0 &\leq d_2 \leq 0.095/((c - 0.85)^2 + 0.85). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Тогда при любом значении  $p$ , удовлетворяющем неравенству  $-d_1 \leq p \leq d_2$ , управление  $u(x)$  решает задачу синтеза в области  $Q$  для системы (3.38), то есть траектория, начинающаяся в произвольной точке  $x_0 \in Q$ , приходит в точку  $x_1 = 0$  в некоторый конечный момент времени  $T(x_0)$ , причем  $x(t) \in Q$ ,  $|u(x)| \leq 1$ ;  $T(x_0) \leq$

$$\leq \max \left\{ \frac{\Theta(x_0)}{0.096 - ((c - 0.75)^2 + 0.65)d_1}, \frac{\Theta(x_0)}{0.096 + ((c - 0.85)^2 + 0.85)d_2} \right\}.$$

**Доказательство.** Оценим величину постоянной  $a_0$ . Для того, чтобы управление (3.40) удовлетворяло заданным ограничениям  $|u| \leq 1$  в робастной системе (3.38), достаточно, чтобы выполнялось усиленное неравенство (3.32) при всех допустимых  $p$ ,  $\Theta$ . В нашем случае симметричная матрица  $N(\Theta, p) = (\tilde{n}_{i,j})_{i,j=1}^4$ , задаваемая формулой (3.33), состоит из элементов

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{11} &= \frac{4(1+p)^2\Theta^7(5 + 4(1+p)\Theta^2)}{(1 + 2(1+p)\Theta^2)^2(1 + 8(1+p)\Theta^2)}, & \tilde{n}_{12} &= \frac{4(1+p)\Theta^5}{(1 + 8(1+p)\Theta^2)}, \\ \tilde{n}_{13} &= -\frac{2(1+p)^2\Theta^6(5 + 4(1+p)\Theta^2)}{(1 + 2(1+p)\Theta^2)^2(1 + 8(1+p)\Theta^2)}, \\ \tilde{n}_{14} &= -\frac{(1+p)\Theta^4(1 + 8(1+p)^2\Theta^4)}{(1 + 2(1+p)\Theta^2)^2(1 + 8(1+p)\Theta^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{n}_{22} &= \frac{2\Theta^3(1+8(1+p)\Theta^2+10(1+p)^2\Theta^4+8(1+p)^3\Theta^6)}{(1+2(1+p)\Theta^2)^2(1+8(1+p)\Theta^2)}, \\
\tilde{n}_{23} &= -\frac{(1+p)\Theta^4(3+16(1+p)\Theta^2+8(1+p)^2\Theta^4)}{(1+2(1+p)\Theta^2)^2(1+8(1+p)\Theta^2)}, \\
\tilde{n}_{24} &= -\frac{\Theta^2(1+8(1+p)\Theta^2+10(1+p)^2\Theta^4+8(1+p)^3\Theta^6)}{(1+2(1+p)\Theta^2)^2(1+8(1+p)\Theta^2)}, \\
\tilde{n}_{33} &= \frac{6(1+p)^2\Theta^5}{(1+2(1+p)\Theta^2)(1+8(1+p)\Theta^2)}, \\
\tilde{n}_{34} &= \frac{(1+p)\Theta^3}{1+8(1+p)\Theta^2}, \quad \tilde{n}_{44} = \frac{\Theta(1+8(1+p)\Theta^2+6(1+p)^2\Theta^4)}{(1+2(1+p)\Theta^2)(1+8(1+p)\Theta^2)}.
\end{aligned}$$

Тогда  $\Theta(N^{-1}(\Theta, p)b, b) = \Theta \times \frac{4}{\Theta} = 4$ . Поэтому  $a_0 = 1/2$ .

Вычислим производную в силу системы от функции  $\Theta$ . Она удовлетворяет неравенству (3.37). Потребуем, чтобы производная от функции  $\Theta$  была отрицательной. В нашем случае симметричная матрица  $N_3(\Theta) = (\hat{n}_{ij})_{ij=1}^4$ , задаваемая формулой (3.30), состоит из элементов

$$\begin{aligned}
\hat{n}_{11} &= \frac{32\Theta^8(5+40\Theta^2+58\Theta^4+32\Theta^6)}{(1+2\Theta^2)^3(1+8\Theta^2)^2}, \quad \hat{n}_{12} = \frac{8\Theta^6(3+16\Theta^2)}{(1+8\Theta^2)^2}, \\
\hat{n}_{13} &= -\frac{2\Theta^7(35+266\Theta^2+344\Theta^4+192\Theta^6)}{(1+2\Theta^2)^3(1+8\Theta^2)^2}, \\
\hat{n}_{14} &= -\frac{\Theta^5(5+26\Theta^2+56\Theta^4+528\Theta^6+384\Theta^8)}{(1+2\Theta^2)^3(1+8\Theta^2)^2}, \\
\hat{n}_{22} &= \frac{8\Theta^4(1+16\Theta^2+84\Theta^4+160\Theta^6+232\Theta^8+128\Theta^{10})}{(1+2\Theta^2)^3(1+8\Theta^2)^2}, \\
\hat{n}_{23} &= -\frac{\Theta^5(15+190\Theta^2+760\Theta^4+784\Theta^6+384\Theta^8)}{(1+2\Theta^2)^3(1+8\Theta^2)^2}, \\
\hat{n}_{24} &= -\frac{\Theta^3(3+46\Theta^2+230\Theta^4+404\Theta^6+688\Theta^8+384\Theta^{10})}{(1+2\Theta^2)^3(1+8\Theta^2)^2}, \\
\hat{n}_{33} &= \frac{12\Theta^6(3+20\Theta^2+16\Theta^4)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)^2}, \quad \hat{n}_{34} = \frac{4\Theta^4(1+4\Theta^2)}{(1+8\Theta^2)^2}, \\
\hat{n}_{44} &= \frac{2\Theta^2(1+16\Theta^2+82\Theta^4+120\Theta^6+96\Theta^8)}{(1+2\Theta^2)^2(1+8\Theta^2)^2}.
\end{aligned}$$

Тогда  $\min_{\Theta>0} \lambda_{\min}(\Theta N_3^{-1}(\Theta)N(\Theta)) = 0.096$ ,

$$\sigma(\Theta^2 N_3^{-1}(\Theta)(DN(\Theta) + N(\Theta)D^*)) = \{0; 0; \beta_1; \beta_2\}.$$

Можно показать, что  $\beta_1 \geq -(\Theta - 0.75)^2 - 0.65$ ,  $\beta_2 \leq (\Theta - 0.85)^2 + 0.85$ . Выбирая  $d_1$  и  $d_2$  согласно (3.41), получаем, что  $\frac{d\Theta}{dt}\Big|_{(3.28)} \leq -0.096 + 0.095 < 0$ . Это является достаточным условием попадания из  $x^0 \in Q$  в начало координат за конечное время (теорема 1.2).  $\square$

Для нахождения конкретной траектории поступаем следующим образом. Берем произвольную начальную точку  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ . Решаем уравнение (3.39) при  $x = x^0$  и находим корень  $\Theta(x^0) = \Theta_0 = c$ . Выбираем числа  $d_1$  и  $d_2$  согласно оценке (3.41). При всех значениях  $p \in [d_1, d_2]$  траектория удовлетворяет следующей задаче Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, & \dot{x}_2 = x_4, & \dot{x}_3 = -x_1 - p x_1 + x_2 + p x_2, \\ \dot{x}_4 = x_1 + p x_1 - x_2 - p x_2 - \frac{x_1(1 - 4\Theta^2)}{2\Theta^4} - \frac{3x_2}{\Theta^2} - \frac{2x_3}{\Theta^3} - \frac{2x_4}{\Theta}, \\ \dot{\Theta} = \frac{-\Theta(N^{-1}(\Theta)x, x) + p \Theta^2((N^{-1}(\Theta)D + D^*N^{-1}(\Theta))x, x)}{\Theta(N^{-1}(\Theta)x, x) + (N_1(\Theta)N^{-1}(\Theta)x, N^{-1}(\Theta)x)}, \\ x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, x_3(0) = x_3^0, x_4(0) = x_4^0, \Theta(0) = \Theta_0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Пусть начальные условия системы (3.38) имеют вид  $x_1^0 = 0.5$ ,  $x_2^0 = -0.3$ ,  $x_3^0 = -0.8$ ,  $x_4^0 = 0.7$ . Тогда  $\Theta(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) \approx 2.77$ ,  $d_1 = -0.02$ ,  $d_2 = 0.02$ .

Численный расчет показывает, что можно увеличить границы для параметра  $p$ :  $-0.3 \leq p \leq 0.29$ . На рисунках 3.21-3.23 представлены проекции траектории при  $p = -0.3$ ,  $p = 0$ ,  $p = 0.29$ . Случай  $p = 0$  соответствует более тонкой линии. Случай  $p = -0.3$  соответствует пунктирной линии. На рисунке 3.24 представлено управление при  $p = -0.3$ ,  $p = 0$ ,  $p = 0.29$ . Оно удовлетворяет ограничению  $|u| \leq 1$ . На рисунке 3.25 представлена функция управляемости на траектории. На рисунке 3.26 представлена  $\frac{d\Theta}{dt}\Big|_{(3.42)}$  при  $p = -0.3$ ,  $p = 0$ ,  $p = 0.29$ . Она является отрицательной.

**Замечание 3.4.** Выпишем характеристический полином матрицы  $A + pD$ . Он имеет вид  $\det(\lambda E - (A + pD)) = \lambda^4 + 2(1 + p)\lambda^2$ . Для этой

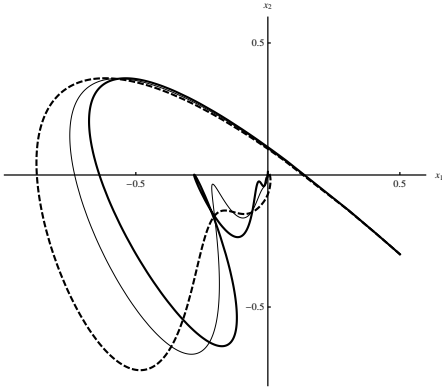


Рис. 3.21: Проекция траектории на плоскость  $x_1, x_2$  при  $p = -0.3, p = 0, p = 0.29$ .

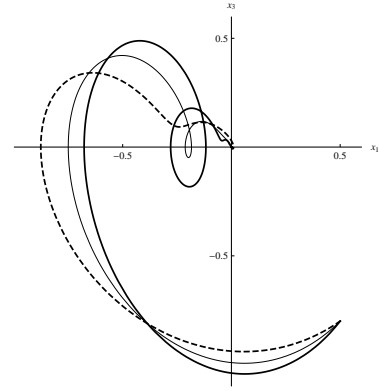


Рис. 3.22: Проекция траектории на плоскость  $x_1, x_3$  при  $p = -0.3, p = 0, p = 0.29$ .

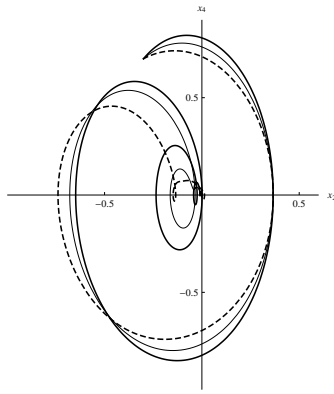


Рис. 3.23: Проекция траектории на плоскость  $x_2, x_4$  при  $p = -0.3, p = 0, p = 0.29$ .

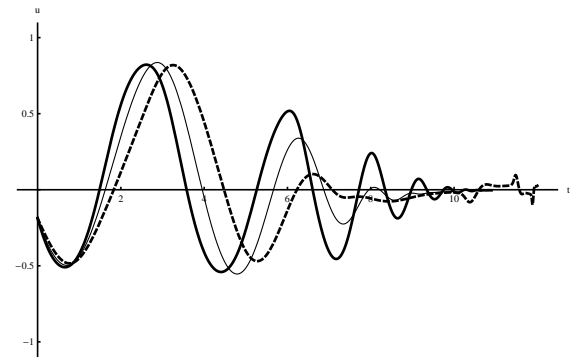


Рис. 3.24: Управление на траектории при  $p = -0.3, p = 0, p = 0.29$ .

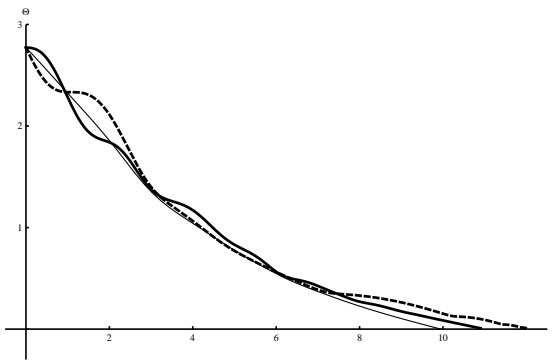


Рис. 3.25: Функция управляемости  $\Theta$  при  $p = -0.3, p = 0, p = 0.29$ .

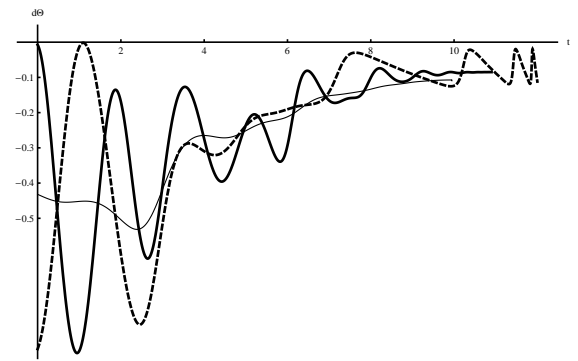


Рис. 3.26: Производная в силу системы от функции  $\Theta$  при  $p = -0.3, p = 0, p = 0.29$ .

матрицы возможны 2 полинома Харитоновна (1.53):

$$S_1(\lambda) = \lambda^4 + 2(1 + d_2)\lambda^2, \quad S_2(\lambda) = \lambda^4 + 2(1 + d_1)\lambda^2$$

(напомним, что  $d_1 \leq p \leq d_2$ ). Корни обоих полиномов имеют действительную часть равную нулю. То есть в данном примере мы также не можем воспользоваться теоремой Харитонова.

### 3.7. Выводы к разделу

В разделе 3 получена теорема о нахождении наибольшего отрезка границ изменения возмущения для робастной системы в случае вынесения общей функции. Сначала выделен случай наддиагональных возмущений, так как именно в этом случае для нахождения границ возмущений требуется найти собственные значения вспомогательной матрицы, которая является постоянной. В этом случае синтез глобальный. В случае поддиагональных возмущений требуется найти собственные значения матрицы, элементы которой являются полиномами по  $\Theta$  степени не выше  $n$ . Для оценки собственных значений используются теоремы интервального анализа. Получены оценки сверху и снизу на время движения из произвольной начальной точки в начало координат. В конце раздела приведены примеры, иллюстрирующие результаты раздела: решение задачи синтеза для двумерной робастной системы, управление движением материальной точки с учетом неизвестного трения, решение задачи синтеза для робастной колебательной системы, решение задачи синтеза для связанного осциллятора.



## РАЗДЕЛ 4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ  
НЕЗАВИСИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ4.1. Решение задачи синтеза для робастной системы в случае одно-  
мерного управления

Рассмотрим систему (1.29), где  $t \geq 0$ ,  $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q$  – это некоторая окрестность начала координат,  $u$  – скалярное управление, удовлетворяющее ограничению  $|u| \leq 1$ , матрицы  $A_0$  и  $b_0$  задаются формулой (1.19), а матрица  $R$  имеет вид (1.30). Будем считать, что функции  $r_{ij} = r_{ij}(t, x)$  неизвестны и удовлетворяют ограничению

$$r_{ij}^{(-)} \leq r_{ij}(t, x) \leq r_{ij}^{(+)}, \quad 1 \leq j \leq i + 1 \leq n.$$

Требуется построить *ограниченное управление*, переводящее произвольную начальную точку  $x_0 \in Q$  в начало координат за *конечное время* при неизвестной матрице  $R(t, x)$ , а также найти  $r_{ij}^{(-)}$  и  $r_{ij}^{(+)}$ .

**Определение 4.1.** Множеством допустимых возмущений  $\mathcal{R}$  называется множество матриц  $R(t, x)$ , состоящих из функций  $r_{ij}(t, x) : [0, +\infty) \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что удовлетворяются следующие условия:

- 1)  $r_{ij}(t, x)$  непрерывна по  $t$  и  $x$ ;
- 2) в каждой области  $K_1(\rho_2) = \{(t, x) : 0 \leq t < +\infty, \|x\| \leq \rho_2\}$ ,

вектор функция  $R(t, x)x$  удовлетворяет условию Липшица

$$|R(t, x'')x'' - R(t, x')x'| \leq \ell_1(\rho_2)\|x'' - x'\|;$$

- 3)  $r_{ij}^{(-)} \leq r_{ij}(t, x) \leq r_{ij}^{(+)}$  для всех  $(t, x) \in [0, +\infty) \times Q$ .

При  $R(t, x) \equiv 0$  система (1.29) совпадает с канонической системой (1.17). Она является полностью управляемой. В теореме 1.3 дано управление  $u(x)$ , решающее задачу синтеза для канонической системы с одномерным управлением.

**Определение 4.2.** Под *локальным позиционным синтезом ограниченного управления для робастных систем в случае нескольких независимых возмущений* будем понимать нахождение границ изменения возмущений, при которых траектория  $x(t)$  замкнутой системы (1.29) с этим управлением  $u = u(x)$

$$\dot{x} = (A_0 + R(t, x))x + b_0u(x), \quad (4.1)$$

выходящая из произвольной начальной точки  $x_0 \in Q$ , оканчивалась в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T(x_0, \mathcal{R})$ , то есть  $\lim_{t \rightarrow T(x_0, \mathcal{R})} x(t) = 0$ . Если  $Q = \mathbb{R}^n$ , то задачу будем называть *глобальным позиционным синтезом*.

Рассмотрим систему (1.29). Пусть постоянная  $a_0$  удовлетворяет неравенству (1.23). Рассмотрим замкнутую систему (4.1), где  $u(x)$  задается формулой (1.24). Пусть матрица  $S(\Theta, t, x)$  задается формулой

$$S(\Theta, t, x) = \Theta(FD(\Theta)R(t, x)D^{-1}(\Theta) + D^{-1}(\Theta)R^*(t, x)D(\Theta)F). \quad (4.2)$$

Обозначим через  $x(t)$  траекторию системы (4.1) и найдем производную в силу системы  $\dot{\Theta} = \frac{d}{dt}\Theta(x(t))$ . Рассуждая аналогично главе 2, формула (2.8), получаем, что производная функции управляемости в силу системы (4.1) имеет вид

$$\dot{\Theta} = -1 + \frac{(S(\Theta, t, x)y(\Theta, x), y(\Theta, x))}{(F^1y(\Theta, x), y(\Theta, x))}. \quad (4.3)$$

Обозначим  $y = y(\Theta, x)$ . Получим точную оценку для  $\dot{\Theta}$ . Для этого при  $y \neq 0$  найдем наибольшее и наименьшее значение отношения  $(S(\Theta, t, x)y, y)/(F^1y, y)$ . Рассмотрим задачу

$$(S(\Theta, t, x)y, y) \rightarrow \text{extr}, \quad y \in \{y : (F^1y, y) = c\}.$$

Будем решать с помощью функции Лагранжа. Она имеет вид

$$\mathcal{L}(y, \lambda) = (S(\Theta, t, x)y, y) - \lambda[(F^1y, y) - c].$$

Необходимые условия экстремума дают  $S(\Theta, t, x)y - \lambda F^1 y = 0$ . Следовательно, в точках экстремума  $(S(\Theta, t, x)y, y) = \lambda(F^1 y, y)$ , причем  $\lambda \in \sigma((F^1)^{-1}S(\Theta, t, x))$ . Поэтому

$$\lambda_{\min}((F^1)^{-1}S(\Theta, t, x)) \leq \frac{(S(\Theta, t, x)y, y)}{(F^1 y, y)} \leq \lambda_{\max}((F^1)^{-1}S(\Theta, t, x)).$$

Откуда из (4.3) получаем, что

$$\dot{\Theta} \leq -1 + \lambda_{\max}((F^1)^{-1}S(\Theta, t, x)). \quad (4.4)$$

#### 4.1.1. *Случай наддиагональных возмущений и симметричного отрезка их изменения*

Будем считать, что  $r_{ij}(t, x)$  удовлетворяют ограничению  $\max_{1 \leq j \leq i+1 \leq n} |r_{ij}(t, x)| \leq \Delta$ . Пусть у матрицы  $R(t, x)$  ненулевые только элементы главной наддиагонали. В этом случае система (1.29) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_i = (1 + r_{ii+1}(t, x))x_{i+1}, & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u. \end{cases} \quad (4.5)$$

Аналогично [13, стр. 28], можно установить тождество  $D(\Theta)R(t, x)D^{-1}(\Theta) = \Theta^{-1}R(t, x)$  (это связано с тем, что матрица  $R(t, x)$  в этом случае имеет такую же структуру, как и  $A_0$ ). Тогда

$$S(\Theta, t, x) = S_0(t, x) = FR(t, x) + R^*(t, x)F. \quad (4.6)$$

В дальнейшем мы существенно пользуемся тем, что матрица  $S_0(t, x)$  не зависит от  $\Theta$ . В этом случае матрица  $S_0(t, x)$  имеет вид  $S_0(t, x) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & f_{11}r_{12} & \dots & f_{1n-1}r_{n-1n} \\ f_{11}r_{12} & 2f_{12}r_{12} & \dots & f_{1n}r_{12} + f_{2(n-1)}r_{(n-1)n} \\ f_{12}r_{23} & f_{13}r_{12} + f_{22}r_{23} & \dots & f_{2n}r_{23} + f_{3(n-1)}r_{(n-1)n} \\ & \dots & & \\ f_{1(n-1)}r_{(n-1)n} & f_{1n}r_{12} + f_{2(n-1)}r_{(n-1)n} & \dots & 2f_{(n-1)n}r_{(n-1)n} \end{pmatrix},$$

где  $r_{ij} = r_{ij}(t, x)$ .

**Теорема 4.1.** Пусть  $\gamma_1$  – произвольное число, удовлетворяющее неравенству  $0 < \gamma_1 < 1$ . Пусть  $G = |(F^1)^{-1}| \cdot (FA_0 + A_0^*F)$ ,

$$\Delta = \frac{(1 - \gamma_1)}{\rho(G)}, \quad (4.7)$$

Пусть при  $x \neq 0$  функция управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  – это единственное положительное решение уравнения (1.22), где постоянная  $a_0$  выбирается согласно неравенству (1.23).

Тогда управление, задаваемое формулой (1.24), решает задачу глобального позиционного синтеза для робастной системы (4.5). При этом траектория замкнутой системы (4.1), выходящая из произвольной начальной точки  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T = T(x_0, \mathcal{R})$ , для которого выполнена оценка (2.23).

**Доказательство.** Напомним, что матрица (1.20) возникает при исследовании функции управляемости как времени движения в случае матрицы интегрального вида. В [13, глава 2.3] доказано, что матрица  $F_i^{-1}$  положительно определена. Докажем, что элементы матрицы  $F_i$ , обратной к матрице  $F_i^{-1}$  и задаваемой формулой (1.20), являются положительными. Рассмотрим

$$\widetilde{M} = \left( \frac{1}{(2n - i - j + 1)(2n - i - j + 2)} \right)_{i,j=1}^n.$$

Докажем, что  $\widetilde{M}$  вполне положительна (totally positive). Обозначим  $d_i = (-1)^i(n - i)!$ . Элементы матрицы  $F_i^{-1}$  вычисляются из элементов матрицы  $\widetilde{M}$  умножением каждого элемента  $i$ -той строки на  $d_i$  и каждого элемента  $j$ -го столбца на  $d_j$ . Как известно, если в матрице каждый элемент строки с номером  $i$  умножить на число  $\varepsilon \neq 0$ , то в обратной матрице столбец с номером  $i$  разделится на  $\varepsilon$ . Аналогичное утверждение верно для столбцов. Тогда для нахождения элементов матрицы  $F_i$  нужно каждый элемент  $i$ -того столбца матрицы  $\widetilde{M}^{-1}$  разделить на  $d_i$  и каждый элемент  $j$ -й строки

матрицы  $\widetilde{M}^{-1}$  разделить на  $d_j$ , т. е. элемент с номером  $ij$  разделить на  $d_i d_j$ .

Докажем, что все миноры матрицы  $\widetilde{M}$  являются положительными. Известно, что если у матрицы размера  $n \times n$  все миноры, составленные из последовательных  $s$  столбцов, начиная с какого-то номера, и последовательных  $s$  строк, начиная с какого-то номера, положительны, то все миноры этой матрицы положительны [78, теорема 3.3]. Этот результат впервые был получен в [70]. Поэтому в матрице  $\widetilde{M}$  будем рассматривать только подматрицы, составленные из подряд идущих строк  $\bar{r} + 1, \bar{r} + 2, \dots, \bar{r} + s$  и столбцов  $\bar{c} + 1, \bar{c} + 2, \dots, \bar{c} + s$ . При этом любая такая подматрица является шуровским произведением матриц Коши. Матрицей Коши [37, теорема 1.2.12.1] называется матрица  $\left(\frac{1}{x_i + y_j}\right)_{i,j=1}^n$ . Любая подряд идущая подматрица матриц  $\left(\frac{1}{2n - i - j + 1}\right)_{i,j=1}^n$  и  $\left(\frac{1}{2n - i - j + 2}\right)_{i,j=1}^n$  является матрицей Коши (положим для первой матрицы  $x_i = n - i, y_j = n - j + 1$ ). Определитель матрицы Коши находится по формуле [37, теорема 1.2.12.1]

$$\frac{\prod_{i>j} (x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j} (x_i + y_j)}. \quad (4.8)$$

Любая подряд идущая подматрица матриц  $\left(\frac{1}{2n - i - j + 1}\right)_{i,j=1}^n$  и  $\left(\frac{1}{2n - i - j + 2}\right)_{i,j=1}^n$  является положительно определенной матрицей в силу критерия Сильвестра и формулы (4.8). Шуровским произведением матриц  $\left(\frac{1}{2n - i - j + 1}\right)_{i,j=1}^n$  и  $\left(\frac{1}{2n - i - j + 2}\right)_{i,j=1}^n$  называется матрица

$$\left(\frac{1}{(2n - i - j + 1)(2n - i - j + 2)}\right)_{i,j=1}^n,$$

которая совпадает с  $\widetilde{M}$ . Шуровское произведение положительно опреде-

ленных матриц является положительно определенной матрицей [37, теорема 6.4.2.1]. Итак, в матрице  $\widetilde{M}$  все подматрицы, составленные из подряд идущих строк  $\bar{r} + 1, \bar{r} + 2, \dots, \bar{r} + s$  и столбцов  $\bar{c} + 1, \bar{c} + 2, \dots, \bar{c} + s$  являются положительными. Значит, все миноры этой матрицы положительны. Тогда в частности положительны ее миноры  $n - 1$  и  $n$  порядка, откуда вытекает, что элементы обратной матрицы к матрице  $\widetilde{M}$  имеют знак  $(-1)^{i+j}$ . Значит, у матрицы  $F$  элементы положительны.

Оценим  $\lambda_{max}((F^1)^{-1}S_0(t, x)) \leq \rho((F^1)^{-1}S_0(t, x))$ . Для этого приведем

**Лемма 4.1.** (Хорн и др. [50, глава 8.1]). Пусть  $M$  и  $N$  - некоторые матрицы. Тогда

1.  $|M \cdot N| \leq |M| \cdot |N|$ ;
2. если  $|M| \leq N$ , то  $\rho(M) \leq \rho(|M|) \leq \rho(N)$ .

Тогда

$$\rho((F^1)^{-1}S_0(t, x)) \leq \rho|(F^1)^{-1}S_0(t, x)| \leq \Delta\rho(G). \quad (4.9)$$

Здесь используется то, что элементы матрицы  $F$  положительны. Подставим полученное неравенство в (4.4), имеем

$$\dot{\Theta} \leq -1 + \Delta\rho(G). \quad (4.10)$$

Выберем произвольное  $0 < \gamma_1 < 1$ . Потребуем, чтобы

$$-1 + \Delta\rho(G) \leq -\gamma_1, \quad (4.11)$$

тогда  $\dot{\Theta} \leq -\gamma_1$ . Из последнего неравенства в силу теоремы 1.1 вытекает оценка на время попадания (2.23). Разрешая (4.11) относительно  $\Delta$ , получаем формулу (4.7).

Ограниченность управления доказывается аналогично рассуждениям для канонической системы [13, Теорема 1.2] (см. доказательство теоремы 3.1).

□

#### 4.1.2. Общий случай симметричного отрезка изменения возмущений

Пусть матрица  $R$  имеет вид (1.30) и  $r_{ij}(t, x)$  удовлетворяют ограничению  $\max_{1 \leq j \leq i+1 \leq n} |r_{ij}(t, x)| \leq \Delta$ . Тогда элементы матрицы  $S(\Theta, t, x)$ , задаваемой формулой (4.2), это полиномы по  $\Theta$  степени не выше  $n$ . Обозначим  $\tilde{G} = |(F^1)^{-1}| \cdot \sum_{i=0}^n (F \tilde{R}_i + \tilde{R}_i^* F)$ , где матрицы  $\tilde{R}_i$  имеют вид

$$\tilde{R}_0 = A_0, \quad \tilde{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \tilde{R}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ & & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассуждая аналогично случаю наддиагональных возмущений, из формулы (4.4) имеем

$$\dot{\Theta} \leq -1 + \rho((F^1)^{-1} S(\Theta, t, x)) \leq \Delta \rho(\tilde{G})$$

при  $\Theta(x) \leq 1$ . Потребуем, чтобы  $-1 + \Delta \rho(\tilde{G}) \leq -\gamma_1$ ,  $0 < \gamma_1 < 1$ , тогда  $\dot{\Theta} \leq -\gamma_1$ . Получаем, что справедлива следующая теорема:

**Теорема 4.2.** Пусть  $\gamma_1$  – произвольное число, удовлетворяющее неравенству  $0 < \gamma_1 < 1$ . Пусть

$$\Delta = \frac{(1 - \gamma_1)}{\rho(\tilde{G})}. \quad (4.12)$$

Пусть при  $x \neq 0$  функция управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  – это единственное положительное решение уравнения (1.22), где постоянная  $a_0$  выбирается согласно неравенству (1.23).

Тогда в области  $Q$ , задаваемой равенством  $Q = \{x : \Theta(x) \leq 1\}$  управление, задаваемое формулой (1.24), решает задачу локального позиционного синтеза для робастной системы (1.29). При этом траектория

замкнутой системы (4.1), выходящая из произвольной начальной точки  $x(0) = x_0 \in Q$ , оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T = T(x_0, \mathcal{R})$ , для которого выполнена оценка (2.23).

**Замечание 4.1.** В случае, если элемент матрицы  $R$ , задаваемой формулой (1.30) имеет вид  $r_{i(i-k+1)}(t, x) = 0$ , целесообразнее брать соответствующий элемент матрицы  $\tilde{R}_k : \tilde{r}_{i(i-k+1)} = 0$ .

#### 4.1.3. Применение методов интервального анализа в случае произвольных границ изменения возмущений

Будем считать, что  $r_{ij}(t, x)$  удовлетворяют ограничению

$$r_{ij}^{(-)} \leq r_{ij}(t, x) \leq r_{ij}^{(+)}$$

В силу (4.3) производная от функции управляемости имеет вид

$$\dot{\Theta} = -\frac{(F^1 - S(\Theta, t, x)y, y)}{(F^1 y, y)}. \quad (4.13)$$

Пусть область  $Q$ , в которой будем искать решение задачи синтеза, задается равенством  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$ . Пусть постоянная матрица  $\tilde{R}$  равна матрице  $R$  при  $r_{ij}(t, x) = \tilde{r}_{ij}$ ,  $\tilde{r}_{ij}$  неизвестные. Обозначим

$$\tilde{S}(\Theta) = \Theta(FD(\Theta)\tilde{R}D^{-1}(\Theta) + D^{-1}(\Theta)\tilde{R}^*D(\Theta)F).$$

Выберем ограничения  $0 \leq \Theta \leq c$  и  $r_{ij}^{(-)} \leq \tilde{r}_{ij} \leq r_{ij}^{(+)}$  так, чтобы матрица  $F^1 - \tilde{S}(\Theta)$  была положительно определенной. Тогда матрица  $F^1 - S(\Theta, t, x)$  будет положительно определенной при всех  $\Theta(x) \leq c$  и  $r_{ij}^{(-)} \leq r_{ij}(t, x) \leq r_{ij}^{(+)}$ . Для проверки положительной определенности семейства матриц  $F^1 - \tilde{S}(\Theta)$  при всех  $0 \leq \Theta \leq c$  и  $r_{ij}^{(-)} \leq \tilde{r}_{ij} \leq r_{ij}^{(+)}$  воспользуемся теоремой 1.18. Для этого оценим элементы матрицы

$$a_{ij}^{(-)} \leq (F^1 - \tilde{S}(\Theta))_{ij} \leq a_{ij}^{(+)}$$



Тогда полная производная от функции управляемости в силу системы удовлетворяет неравенству

$$\dot{\Theta} \leq -\frac{\lambda_{\min}(F^1 - \tilde{S}(\Theta))}{\lambda_{\max}(F^1)}.$$

Тогда в силу неравенств (1.3) и (1.4) (теорема 1.1) выполнена оценка на время движения

$$T(x_0) \leq \frac{\lambda_{\max}(F^1)}{\lambda_{\min}(F^1 - \tilde{S}(\Theta))} \Theta(x_0). \quad (4.14)$$

Получаем, что справедлива следующая теорема:

**Теорема 4.3.** Пусть при  $x \neq 0$  функция управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  – это единственное положительное решение уравнения (1.22), где постоянная  $a_0$  выбирается согласно неравенству (1.23). Пусть ограничения

$$r_{ij}^{(-)} \leq r_{ij}(t, x) \leq r_{ij}^{(+)}, \quad 1 \leq j \leq i+1 \leq n, \quad \Theta(x) \leq c$$

таковы, что все ключевые матрицы  $B(h)$  семейства  $F^1 - \tilde{S}(\Theta)$ , задаваемые формулой (1.62), положительно определены.

Тогда в области  $Q$ , задаваемой равенством  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$  управление, задаваемое формулой (1.24), решает задачу локального позиционного синтеза для робастной системы (1.29). При этом траектория замкнутой системы (4.1), выходящая из произвольной начальной точки  $x(0) = x_0 \in Q$ , оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T = T(x_0, \mathcal{R})$ , для которого выполнена оценка (4.14).

#### 4.1.4. Решение задачи синтеза для двумерной и трехмерной робастных систем в случае независимых возмущений

**Пример 4.1.** Рассмотрим задачу позиционного синтеза для робастной двумерной системы (perturbed double integrator)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11}(t, x_1, x_2)x_1 + r_{12}(t, x_1, x_2)x_2 \\ r_{21}(t, x_1, x_2)x_1 + r_{22}(t, x_1, x_2)x_2 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

при ограничениях на управление вида  $|u| \leq 1$ . В системе (4.15)  $r_{ij}(t, x_1, x_2)$  – некоторые неизвестные функции, удовлетворяющие ограничению  $r_{ij}^{(-)} \leq r_{ij}(t, x_1, x_2) \leq r_{ij}^{(+)}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Запишем эту систему в матричном виде  $\dot{x} = (A_0 + R(t, x_1, x_2))x + b_0u$ , где матрицы  $A_0$  и  $b_0$  имеют вид (3.9), а матрица  $R(t, x_1, x_2)$

$$R(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} r_{11}(t, x_1, x_2) & r_{12}(t, x_1, x_2) \\ r_{21}(t, x_1, x_2) & r_{22}(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $F$  и  $D(\Theta)$  имеют вид (3.10). Определим функцию управляемости  $\Theta = \Theta(x_1, x_2)$  как единственное положительное решение уравнения (3.11) при  $a_0 = 1/3$ , а при  $(x_1, x_2) = 0$  пусть  $\Theta(0) = 0$ . Управление, решающее задачу позиционного синтеза, имеет вид (3.12). Наша цель – найти такие границы изменения возмущений, при которых траектория  $x(t)$  замкнутой системы (2.2) с управлением  $u = u(x)$ , выходящая из произвольной начальной точки  $x_0$ , оканчивалась в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T(x_0)$ .

**Наддиагональные возмущения.** Рассмотрим случай  $r_{11}(t, x_1, x_2) = r_{21}(t, x_1, x_2) = r_{22}(t, x_1, x_2) = 0$ , то есть возмущаются только элементы главной наддиагонали. Для получения оценки (4.7) выпишем матрицы

$$(F^1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \frac{1}{36} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 36 \\ 36 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}.$$

$\sigma(G) = \{7 \pm 2\sqrt{13}\}$ ,  $\Delta = (1 - \gamma_1)/(7 + 2\sqrt{13}) \approx (1 - \gamma_1)0.07$ . Итак,  $|r_{12}(t, x_1, x_2)| \leq (1 - \gamma_1)0.07$ . Синтез глобальный. Для сравнения с результатами, полученными в главе 3.3 в формуле (3.15) положим  $\gamma_2 = +\infty$ , тогда  $\gamma_1 - 1 < r_{12}(t, x_1, x_2) < (1 - \gamma_1)/3$ .

**Случай**  $r_{21}(t, x_1, x_2) = 0$ . Построим области решения задачи синтеза, полученные в силу теоремы 4.3. На рисунках 4.27 - 4.29 представлены линии уровня области решения задачи синтеза, полученные при  $\Theta = 5$ , при  $\Theta = 3$  и при  $\Theta = 1$  соответственно. Увеличение жирности линии со-

ответствует увеличению параметра  $r_{11}$ . Заметим, что при увеличении  $\Theta$ , т. е. при увеличении размеров эллипсоида, из которого берется начальная точка, область решения задачи в пространстве параметров уменьшается. На рисунке 4.30 представлен трехмерный рисунок линий уровня области решения задачи синтеза, полученных при  $\Theta = 1$ , соответствующий неотрицательным значениям  $r_{11}$ .

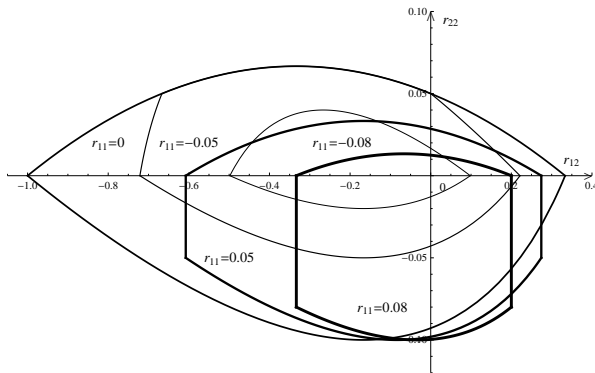


Рис. 4.27: Линии уровня области решения задачи при  $\Theta = 5$

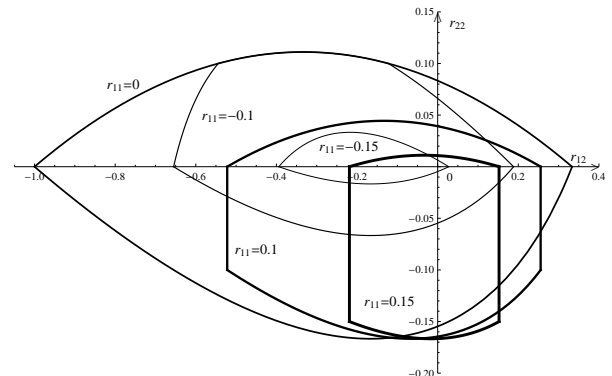


Рис. 4.28: Линии уровня области решения задачи при  $\Theta = 3$

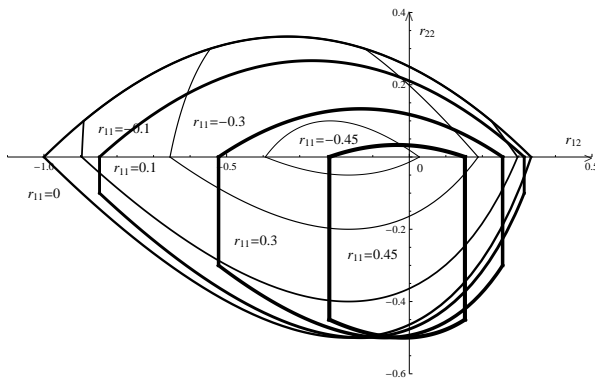


Рис. 4.29: Линии уровня области решения задачи при  $\Theta = 1$

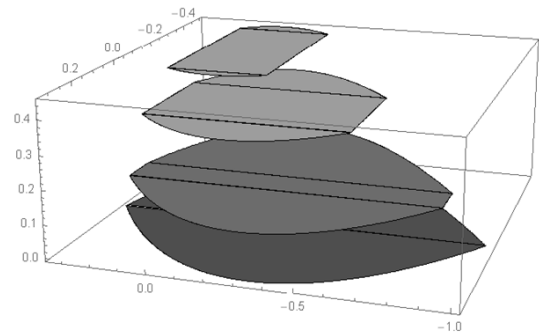


Рис. 4.30: Линии уровня области решения задачи при  $\Theta = 1$

**Общий случай.** Будем считать, что  $r_{ij}(t, x)$  удовлетворяют ограничению  $\max_{1 \leq j \leq i+1 \leq 2} |r_{ij}(t, x)| \leq \Delta$ . Требуется найти  $\Delta$ . В общем случае синтез локальный. Пусть область  $Q$  задается равенством  $Q = \{x : \Theta(x) \leq 1\}$ . Пусть матрица  $S(\Theta, t, x)$  задается формулой (4.2), тогда  $(F^1)^{-1}S(\Theta) =$  имеет вид (3.18), где  $r_{ij} = r_{ij}(t, x)$ .

Диагональные возмущения. Пусть матрица

$$R(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} r_{11}(t, x_1, x_2) & 0 \\ 0 & r_{22}(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}, \text{ тогда } \Delta \approx (1 - \gamma_1)0.1.$$

Поддиагональные возмущения. Пусть матрица

$$R(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r_{21}(t, x_1, x_2) & 0 \end{pmatrix}, \text{ тогда } \Delta \approx (1 - \gamma_1)0.58.$$

Нижнетреугольные возмущения. Пусть матрица

$$R(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} r_{11}(t, x_1, x_2) & 0 \\ r_{21}(t, x_1, x_2) & r_{22}(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}, \text{ тогда } \Delta \approx (1 - \gamma_1)0.08.$$

Верхнетреугольные возмущения. Пусть матрица

$$R(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} r_{11}(t, x_1, x_2) & r_{12}(t, x_1, x_2) \\ 0 & r_{22}(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}, \text{ тогда } \Delta \approx (1 - \gamma_1)0.04.$$

Произвольные возмущения. Пусть матрица

$$R(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} r_{11}(t, x_1, x_2) & r_{12}(t, x_1, x_2) \\ r_{21}(t, x_1, x_2) & r_{22}(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}, \text{ тогда } \Delta \approx (1 - \gamma_1)0.03.$$

**Пример 4.2.** Рассмотрим задачу позиционного синтеза синтеза для трехмерной робастной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + r_{12}(t, x_1, x_2, x_3))x_2, \\ \dot{x}_2 = (1 + r_{23}(t, x_1, x_2, x_3))x_3, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \quad (4.16)$$

или в матричном виде  $\dot{x} = (A_0 + R)x + b_0u$ , где матрицы  $A_0$  и  $b_0$  задаются формулой (2.29),

$$R = \begin{pmatrix} 0 & r_{12}(t, x_1, x_2, x_3) & 0 \\ 0 & 0 & r_{23}(t, x_1, x_2, x_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ограничения на управление имеют вид  $|u| \leq 1$ . Обозначим  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Пусть  $r_{12}^{(-)} \leq r_{12}(t, x) \leq r_{12}^{(+)}$ ,  $r_{23}^{(-)} \leq r_{23}(t, x) \leq r_{23}^{(+)}$ .

Матрицы  $F$  и  $D(\Theta)$  имеют вид (2.30), матрица  $S_0(t, x)$ , задаваемая

формулой (4.6), имеет вид

$$S_0(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & 2400r_{12} & 960r_{23} \\ 2400r_{12} & 1920r_{12} & 60(2r_{12} + 7r_{23}) \\ 960r_{23} & 60(2r_{12} + 7r_{23}) & 120r_{23} \end{pmatrix},$$

поэтому  $-F^1 + S_0(t, x) =$

$$= \begin{pmatrix} -14400 & 2400(-2 + r_{12}) & 480(-1 + 2r_{23}) \\ 2400(-2 + r_{12}) & 240(-7 + 8r_{12}) & 60(-3 + 2r_{12} + 7r_{23}) \\ 480(-1 + 2r_{23}) & 60(-3 + 2r_{12} + 7r_{23}) & 24(-1 + 5r_{23}) \end{pmatrix}.$$

В обеих матрицах  $r_{12} = r_{12}(t, x)$ ,  $r_{23} = r_{23}(t, x)$ . Характеристический многочлен матрицы  $-F^1 + S_0(t, x)$  имеет вид

$$h(r_{12}, r_{23}, \lambda) = \lambda^3 + h_2(r_{12}, r_{23})\lambda^2 + h_1(r_{12}, r_{23})\lambda^1 + h_0(r_{12}, r_{23}), \quad \text{где}$$

$$h_2(r_{12}, r_{23}) \approx 16104 - 1920r_{12} - 120r_{23}, \quad h_1(r_{12}, r_{23}) \approx 1275120 - 4610880r_{12} - \\ - 5774400r_{12}^2 - 856800r_{23} + 129600r_{12}r_{23} - 1098000r_{23}^2,$$

$$h_0(r_{12}, r_{23}) \approx 3456000 - 13824000r_{12} - 69120000r_{12}^2 - 6912000r_{23} + \\ + 235008000r_{12}r_{23} + 138240000r_{12}^2r_{23} - 217728000r_{23}^2 - 165888000r_{12}r_{23}^2.$$

На рисунке 4.31 сплошной линией изображена точная область устойчивости, полученная в силу леммы 2.2 ( $h_i(r_{12}, r_{23}) > 0$ ). Если в характеристическом многочлене положить  $r_{12} = r_{23}$ , то областью устойчивости будет прямоугольник  $-1 < r_{12} < 1/8$ ,  $-1 < r_{23} < 1/8$ , который обозначен на рисунке 4.31 тонкой линией.

Для вычисления производной собственного значения матрицы  $-F^1 + S_0(t, x)$  по параметру воспользуемся теоремой 1.10. Для этого выберем точку  $r_{12} = r_{23} = 0$ . Имеем  $\lambda(r_{12}, r_{23}) \approx$

$$\approx -2.81 + 0.74 r_{12} + 3.8 r_{23} + 47.53 r_{12}^2 + 183.74 r_{23}^2 - 182.84 r_{12}r_{23} + \bar{o}(r_{12}^2, r_{23}^2).$$

Если выбрать точку  $r_{12} = r_{23} = 1/8$ , то  $\lambda(r_{12}, r_{23}) \approx 72 (r_{23} - 0.125) +$

$$+ 106.6 (r_{12} - 0.125)^2 + 486.6 (r_{23} - 0.125)^2 + 424.4 (r_{12} - 0.125)(r_{23} - 0.125) +$$

$$+\bar{o}((r_{12} - 0.125)^2, r_{23} - 0.125)^2).$$

Выбирая  $r_{12} = r_{23} = -1$ , получаем кратные собственные значения матрицы и нахождение производных по параметру в силу теоремы 1.11 представляет трудности. На рисунке 4.31 изображена пунктирная слева область - область устойчивости в точке  $r_{12} = r_{23} = 0$  (с точностью до 2-х слагаемых), полученная в силу теоремы 1.10, пунктирная справа - область устойчивости в точке  $r_{12} = r_{23} = 1/8$  (с точностью до 2-х слагаемых), полученная в силу теоремы 1.10.

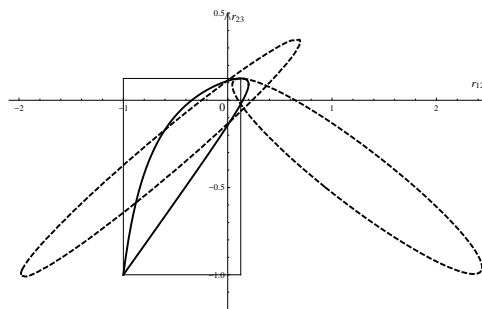


Рис. 4.31: Область устойчивости

Для получения оценки (4.12) выпишем матрицу

$$G = \begin{pmatrix} 36 & 30.5 & 8.7 \\ 160 & 129 & 36 \\ 520 & 380 & 101 \end{pmatrix}, \quad \rho(G) \approx 272.5, \quad \Delta \approx 0.004.$$

#### 4.2. Решение задачи синтеза для линейной системы в случае многомерного управления

Работа [15] посвящена решению задачи синтеза для линейной управляемой системы (1.31). Сделаем преобразование координат (1.34). Получаем каноническую форму системы (1.31) – систему (1.37), где  $v \in \Omega = \{v : \|v\| \leq \tilde{d}, \tilde{d} < d\}$ . Выберем вспомогательное управление в виде функции

фазовых координат

$$v(z) = P_0 z, \quad \text{где} \quad P_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

так, чтобы нулевое решение системы (1.37) при  $v = v(z)$  было асимптотически устойчиво. Тогда система (1.37) приобретает вид

$$\dot{z} = A_1 z, \quad \text{где} \quad A_1 = A_0 + B_0 P_0. \quad (4.18)$$

**Замечание 4.2.** Предложенный подход позволяет дать более широкий класс управлений, чем в работах [86],[13, Теорема 2.3], так как матрица  $P_0$  (4.17) имеет более общий вид, чем предложенный в формуле (1.41).

В силу устойчивости матрицы  $A_1$  можно найти положительно определенную квадратичную форму  $V = (Fz, z)$  — функцию Ляпунова, производная которой в силу системы (4.18) будет наперед заданной отрицательно определенной квадратичной формой  $(-Wz, z)$ , матрицы  $F$  и  $W$  положительно определены. Так как

$$\frac{d}{dt}(Fz, z) = (F\dot{z}, z) + (Fz, \dot{z}) = ((FA_1 + A_1^*F)z, z),$$

то отыскание матрицы  $F$  сводится к решению матричного уравнения  $FA_1 + A_1^*F = -W$ .

Пусть  $D(\Theta)$  — диагональная матрица вида (1.40). Пусть  $a_0$  — пока некоторое положительное число, которое будет определено далее. Следуя теореме 1.4, определим для каждого  $z \neq 0$  функцию управляемости  $\Theta(z)$  как решение уравнения (1.42), которое приобретает вид

$$2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)z, z), \quad (4.19)$$

которое имеет при всех  $z \neq 0$  единственное положительное непрерывно-дифференцируемое решение  $\Theta(z)$ . Полагая  $\Theta(0) = 0$ , получаем непрерывность функции  $\Theta(z)$  для всех  $z$ . Обозначим через  $y(\Theta(z), z) =$

$D(\Theta(z))z$ . С помощью вспомогательного управления выберем управление вида

$$v(z) = \Theta^{-\frac{1}{2}}(z)P_0D(\Theta(z))z = \Theta^{-\frac{1}{2}}(z)P_0y(\Theta(z), z). \quad (4.20)$$

Управление  $v(z)$  при  $\{z : 0 < \rho \leq \|z\| \leq \rho_1\}$  удовлетворяет условию Липшица. Пусть  $H$  – диагональная матрица вида

$$H = \text{diag}(H_1, \dots, H_r), \quad \text{где} \quad H_i = \text{diag} \left( -\frac{2n_i - 2j + 1}{2} \right)_{j=1}^{n_i}. \quad (4.21)$$

Производная функции  $\Theta(z)$  в силу системы (1.37) с управлением вида (4.20) имеет вид

$$\dot{\Theta}(z) = \frac{(FA_1 + A_1^*F)y(\Theta(z), z), y(\Theta(z), z))}{((F - FH - HF)y(\Theta(z), z), y(\Theta(z), z))}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство  $\dot{\Theta}(z) = -1$ . В этом случае функция управляемости является временем движения (теорема 1.4). Тогда отыскание матрицы  $F$  сводится к решению матричного уравнения

$$FA_1 + A_1^*F = -F + FH + HF,$$

которое при заданных матрицах  $A_1$  и  $H$  имеет решение. Обозначим  $\mathcal{G} = \frac{1}{2}E - H$ , тогда последнее равенство приобретает вид

$$F(A_1 + \mathcal{G}) + (A_1^* + \mathcal{G})F = 0. \quad (4.22)$$

Аналогично доказательству [13, Лемма 2.1] из последнего равенства заключаем, что матрица  $F^{\frac{1}{2}}(A_1 + \mathcal{G})F^{-\frac{1}{2}}$  является кососимметрической, поэтому ее собственные значения имеют вещественные части, равные нулю. А т. к. эта матрица подобна матрице  $A_1 + \mathcal{G}$ , то ее собственные значения являются корнями характеристического уравнения  $\det(\lambda E - (A_1 + \mathcal{G})) = 0$ . Значит, в этом характеристическом уравнении при разложении по степеням  $\lambda$  коэффициент перед  $\lambda$  равен нулю.

**Теорема 4.4.** Пусть  $a_0$  удовлетворяет условию

$$0 < a_0 \leq \frac{\tilde{d}^2}{2\|P_0\|^2\|F^{-1}\|}, \quad (4.23)$$



функция управляемости  $\Theta(z)$  при  $z \neq 0$  определяется уравнением (4.19) и  $\Theta(0) = 0$ .

Тогда управление  $v(z)$  вида (4.20) решает для системы (1.37) задачу глобального позиционного синтеза непрерывного управления, удовлетворяющего ограничению  $\|v\| \leq \tilde{d}$ , причем время движения  $T(z_0)$  из произвольной начальной точки  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  в начало координат по траектории полной системы, порожденной управлением  $v(z)$ , совпадает с  $\Theta(z_0)$ .

**Доказательство.** Согласно теореме 1.4 с учетом вышеизложенного для полного доказательства этой теоремы требуется установить ограниченность управления  $v(z)$ . Из равенства (4.19) имеем неравенство  $\|y(\Theta(z), z)\|^2 \leq 2a_0\Theta(z)\|F^{-1}\|$ . В силу этого неравенства из (4.20) получаем

$$\|v(z)\|^2 \leq \Theta^{-1}(z)\|P_0\|^2\|y(\Theta(z), z)\|^2 \leq 2a_0\|P_0\|^2\|F^{-1}\|. \quad (4.24)$$

Выбирая  $a_0$  согласно условию (4.23), из (4.24) имеем, что управление удовлетворяет ограничению  $\|v(z)\| \leq \tilde{d}$  при  $\forall z \in \mathbb{R}^n$ . Тогда по теореме 1.4 управление  $v(z)$  вида (4.20) решает для системы (1.37) задачу глобального позиционного синтеза ограниченного управления.  $\square$

Вернемся к решению задачи (1.31). Будем искать решение задачи в области  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c, c > 0\}$ . Ограниченность области  $Q$ , а также существование константы  $c$  показано в работе [86]. В работе [15] (Коровов, Куприянова) получена теорема, аналогичная теореме 1.4 для матрицы  $P_0$  вида (4.17).

**Замечание 4.3.** В случае, когда  $A = A_0$ ,  $B = B_0$ , то  $L = E$ ,  $M = E$ ,  $LAL^{-1} = A_0$ , тогда  $B_0^*LAL^{-1}$  – нулевая  $(r \times n)$ -матрица и условие (1.43) выбора числа  $a_0$  совпадает с условием (4.23).

**Замечание 4.4.** Для определения траектории поступаем следующим образом. Пусть задана начальная точка  $x_0 \in Q$ . Выберем  $a_0$  из условия (1.43) и найдем положительный корень  $\Theta_0$  уравнения (1.42) при  $x = x_0$ .

Т. к.  $\dot{\Theta}(x(t)) = -1$ , то  $\Theta(x(t)) = \Theta_0 - t$ , где  $T(x_0) = \Theta(x_0) = \Theta_0$  – время движения из произвольной начальной точки  $x_0 \in Q$  в начало координат. В дальнейшем зависимость от  $x_0$  будем опускать. Тогда получаем задачу Коши [13, стр. 111]

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BM^{-1} \left( (T-t)^{-\frac{1}{2}} P_0 D(T-t)L - B_0^* LA \right) x, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

решая которую, определим траекторию, выходящую из заданной точки  $x_0 \in Q$  в начало координат. Подчеркнем, что для нахождения траектории достаточно один раз найти решение уравнения (1.42).

#### 4.2.1. Решение задачи синтеза для двумерной и трехмерной канонических систем с многомерным управлением

**Пример 4.3.** Рассмотрим задачу синтеза для двумерной системы вида

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2 \quad (4.25)$$

с начальным условием  $x(0)=x^0$  или покомпонентно  $x_1(0)=x_1^0$ ,  $x_2(0)=x_2^0$ , при ограничениях на управление вида  $\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2} \leq 1$ . В данном случае систему (4.25) можно записать в виде  $\dot{x} = A_0x + B_0u$ , где  $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Заметим, что  $\text{rang}(b_{01}, A_0b_{01}) = 1$ ,  $\text{rang}(b_{02}, A_0b_{02}) = 1$  ( $b_{0i}$  –  $i$ -тый столбец матрицы  $B_0$ ), т. е. система (4.25) не является полностью управляемой ни с помощью управления  $u_1$  ( $u_2 = 0$ ), ни с помощью управления  $u_2$  ( $u_1 = 0$ ). Выберем вспомогательное управление вида  $u(x) = P_0x$ , где  $P_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Подчеркнем, что в [13, Глава 2.4] предлагается подход, при котором  $a_{12} = 0$ ,  $a_{21} = 0$ . Имеем  $A_1 = A_0 + B_0P_0 = P_0$ . Матрицы  $H$ ,  $D(\Theta)$  и  $\mathcal{G} = \frac{1}{2}E - H$  имеют

вид

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D(\Theta) = \begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \Theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\lambda E - (A_1 + \mathcal{G})) = \lambda^2 - \lambda(2 + a_{11} + a_{22}) + 1 + a_{11} + a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22}.$$

В силу условия, что корни этого уравнения имеют равную нулю вещественную часть, получаем, что  $a_{11} = -2 - a_{22}$ . Пусть  $a_{12} \neq 0$ , тогда решением уравнения (4.22) будет матрица

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{a_{21}}{1 + a_{22}} & -\frac{1 + a_{22}}{a_{12}} \\ -\frac{1 + a_{22}}{a_{12}} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

где  $a_{12}a_{21} < 0$ ,  $-1 - \sqrt{-a_{12}a_{21}} < a_{22} < -1 + \sqrt{-a_{12}a_{21}}$ . Выполнение этого условия обеспечивает положительную определенность матрицы  $F$  и асимптотическую устойчивость системы  $\dot{x} = A_1x$ .

Функция управляемости  $\Theta(x_1, x_2)$  задается как положительное решение уравнения (4.19), которое приобретает вид

$$2a_0\Theta^2 a_{12} = -a_{21}x_1^2 - 2(1 + a_{22})x_1x_2 + a_{12}x_2^2,$$

откуда

$$\Theta(x) = \sqrt{\frac{-a_{21}x_1^2 - 2(1 + a_{22})x_1x_2 + a_{12}x_2^2}{2a_0a_{12}}}, \quad (4.27)$$

где  $a_0$  удовлетворяет условию (4.23), причем

$$\begin{aligned} \|P_0\|^2 &= (4 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + 4a_{22} + 2a_{22}^2 + \\ &\sqrt{4 + a_{12}^2 - 2a_{12}a_{21} + a_{21}^2} \sqrt{4 + a_{12}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{21}^2 + 8a_{22} + 4a_{22}^2})/2, \\ \|F^{-1}\| &= \frac{-a_{12}^2 + a_{12}a_{21} + |a_{12}| \sqrt{4 + a_{12}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{21}^2 + 8a_{22} + 4a_{22}^2}}{2(1 + a_{12}a_{21} + 2a_{22} + a_{22}^2)}. \end{aligned}$$

Управление, задаваемое формулой (4.20), имеет вид

$$u(x) = \Theta^{-\frac{1}{2}}(x)P_0D(\Theta(x))x = \begin{pmatrix} -\frac{(2 + a_{22})x_1}{\Theta(x)} + \frac{a_{12}x_2}{\Theta(x)} \\ \frac{a_{21}x_1}{\Theta(x)} + \frac{a_{22}x_2}{\Theta(x)} \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Т. к. уравнение для  $\dot{\Theta}(x(t))$  имеет вид  $\dot{\Theta}(x(t)) = -1$  и  $\Theta(x_0) = \Theta_0$  задается формулой (4.27) при  $x = x_0$ , то  $\Theta(x(t)) = \Theta_0 - t$ . Тогда искомая траектория является решением задачи Коши вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{(2 + a_{22})x_1}{\Theta_0 - t} + \frac{a_{12}x_2}{\Theta_0 - t}, \\ \dot{x}_2 = \frac{a_{21}x_1}{\Theta_0 - t} + \frac{a_{22}x_2}{\Theta_0 - t}, \\ x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0. \end{cases}$$

Поскольку  $x_2(t) = [\dot{x}_1(t)(\Theta_0 - t) + (2 + a_{22})x_1(t)]/a_{12}$ , то дифференцируя первое уравнение системы, получаем уравнение типа Эйлера относительно  $x_1(t)$ :  $\ddot{x}_1(t)(\Theta_0 - t)^2 + \dot{x}_1(t)(\Theta_0 - t) - (a_{12}a_{21} + (2 + a_{22})a_{22})x_1(t) = 0$ . Будем искать решение этого уравнения в виде  $x_1(t) = (\Theta_0 - t)^\lambda$ . Характеристическое уравнение для  $\lambda$  имеет вид  $\lambda^2 - 2\lambda - (a_{12}a_{21} + (2 + a_{22})a_{22}) = 0$ , корни которого есть  $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(-\det F) a_{12}^2}$ . Т. к.  $F$  положительно определена, то  $\det F > 0$  и под корнем стоит отрицательное число. Обозначим  $\eta = \sqrt{-a_{12}a_{21} - (1 + a_{22})^2}$ ,  $\nu(t) = \eta \ln(\Theta_0 - t)$ . Тогда

$$x_1(t) = (\Theta_0 - t)[c_1 \cos \nu(t) + c_2 \sin \nu(t)],$$

$$x_2(t) = (\Theta_0 - t)[((1 + a_{22})c_1 - \eta c_2) \cos \nu(t) + (\eta c_1 + (1 + a_{22})c_2) \sin \nu(t)]/a_{12},$$

где постоянные  $c_1$  и  $c_2$  находятся из начальных условий  $x_1(0) = x_1^0$ ,  $x_2(0) = x_2^0$  и имеют вид

$$c_1 = [\eta x_1^0 \cos(\eta \ln \Theta_0) - ((1 + a_{22})x_1^0 - a_{12}x_2^0) \sin(\eta \ln \Theta_0)]/(\eta \Theta_0),$$

$$c_2 = [((1 + a_{22})x_1^0 - a_{12}x_2^0) \cos(\eta \ln \Theta_0) + \eta x_1^0 \sin(\eta \ln \Theta_0)]/(\eta \Theta_0).$$

Окончательно имеем

$$x_1(t) = (\Theta_0 - t)[\eta x_1^0 \cos \mu(t) + ((1 + a_{22})x_1^0 - a_{12}x_2^0) \sin \mu(t)]/(\eta \Theta_0),$$

$$x_2(t) = (\Theta_0 - t)[\eta x_2^0 \cos \mu(t) - (a_{21}x_1^0 + (1 + a_{22})x_2^0) \sin \mu(t)]/(\eta \Theta_0),$$

где  $\mu(t) = \eta \ln(1 - t/\Theta_0)$ . Найдем управление  $u(t)$  на траектории  $x(t)$ . Из формулы (4.28) имеем

$$u_1(t) = [\eta((2 + a_{22})x_1^0 + x_2^0) \cos \mu(t) -$$

$$\begin{aligned}
& -((a_{12}a_{21} + (2 + a_{22})(1 + a_{22}))x_1^0 - a_{12}x_2^0) \sin \mu(t)]/(\eta\Theta_0), \\
& u_2(t) = [\eta(a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0) \cos \mu(t) + \\
& + (a_{21}x_1^0 - (a_{22}(1 + a_{22}) - a_{21}a_{12})x_2^0) \sin \mu(t)]/(\eta\Theta_0).
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай  $P_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ , тогда матрица (4.26) имеет вид

$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , и, следовательно, условие (4.23) приобретает вид  $a_0 \leq 1/4$ . Положим  $a_0 = 1/4$ , тогда функция управляемости (4.27) имеет вид  $\Theta(x) = \sqrt{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . В этом случае

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\Theta_0 - t) \cos \zeta(t)/\sqrt{2} \\ (\Theta_0 - t) \sin \zeta(t)/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} [-\cos \zeta(t) + \sin \zeta(t)]/\sqrt{2} \\ -[\cos \zeta(t) + \sin \zeta(t)]/\sqrt{2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где  $\zeta(t) = \ln(\Theta_0 - t) + \varphi_0$ ,  $\Theta_0 = \sqrt{2}\sqrt{x_1^{02} + x_2^{02}}$ , а  $\varphi_0$  определяется равенством  $\operatorname{tg}(\ln \Theta_0 + \varphi_0) = x_2^0/x_1^0$ . График фазовой траектории – спираль, число витков которой стремится к бесконечности при  $t \rightarrow \Theta_0$ .

**Пример 4.4.** Рассмотрим задачу синтеза для трехмерной системы вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u_1, \quad \dot{x}_3 = u_2 \quad (4.29)$$

с начальным условием  $x(0) = x^0$  или покомпонентно  $x_1(0) = x_1^0$ ,  $x_2(0) = x_2^0$ ,  $x_3(0) = x_3^0$ , при ограничениях на управление вида  $\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2} \leq 1$ . Запишем систему (4.29) в виде  $\dot{x} = A_0x + B_0u$ ,

где  $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Заметим, что поскольку

$\operatorname{rang}(b_{01}, A_0b_{01}, A_0^2b_{01}) = 2$ ,  $\operatorname{rang}(b_{02}, A_0b_{02}, A_0^2b_{02}) = 1$  ( $b_{0i}$  –  $i$ -тый столбец матрицы  $B_0$ ), то система (4.29) не является полностью управляемой

только лишь с помощью управления  $u_1$  ( $u_2 = 0$ ), и только лишь с помощью управления  $u_2$  ( $u_1 = 0$ ). Матрицы  $H$  и  $D(\Theta)$  имеют вид

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D(\Theta) = \begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Выберем вспомогательное управление вида  $u(x) = P_0x$ , где

$$P_0 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

тогда решением уравнения (4.22) при  $A_1 = A_0 + B_0P_0$  будет положительно

определенная матрица  $F = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Следовательно, уравнение (4.19)

для определения функции  $\Theta(x)$  имеет вид

$$2a_0\Theta^4 = 5x_1^2 + 4\Theta x_1(x_2 + x_3) + \Theta^2(x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2). \quad (4.30)$$

Поскольку  $\|F^{-1}\| = (3\sqrt{5} + 7)/2$ ,  $\|P_0\| = \sqrt{\sqrt{85} + 15}$ , то условие (4.23) на  $a_0$  имеет вид  $a_0 \leq 1/(3\sqrt{5} + 7)/(\sqrt{85} + 15) \approx 0.003\dots$ ; выберем  $a_0 = 0.003$ .

Управление, задаваемое формулой (4.20), имеет вид

$$u(x) = \begin{pmatrix} -\frac{4x_1}{\Theta^2(x)} - \frac{2x_2}{\Theta(x)} + \frac{2x_3}{\Theta(x)} \\ \frac{x_1}{\Theta^2(x)} - \frac{x_2}{\Theta(x)} - \frac{2x_3}{\Theta(x)} \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Рассуждая аналогично предыдущему примеру, получаем, что траектория  $x(t)$ , переводящая произвольную точку  $x_0$  в нуль, является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{4x_1}{(\Theta_0 - t)^2} - \frac{2x_2}{\Theta_0 - t} + \frac{2x_3}{\Theta_0 - t}, \\ \dot{x}_3 = -\frac{x_1}{(\Theta_0 - t)^2} - \frac{x_2}{\Theta_0 - t} - \frac{2x_3}{\Theta_0 - t}, \\ x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, x_3(0) = x_3^0 \end{cases}$$

и имеет вид

$$x_1(t) = (\Theta_0 - t)^2 [c_1 + \xi_1 \cos \mu(t) + \xi_2 \sin \mu(t)], \quad (4.32)$$

$$x_2(t) = (\Theta_0 - t) [-2c_1 - \xi_1 (2 \cos \mu(t) - \sqrt{3} \sin \mu(t)) - \xi_2 (\sqrt{3} \cos \mu(t) + 2 \sin \mu(t))], \quad (4.33)$$

$$x_3(t) = (\Theta_0 - t) [2c_1 - \xi_1 (\cos \mu(t) + \sqrt{3} \sin \mu(t)) + \xi_2 (\sqrt{3} \cos \mu(t) - \sin \mu(t))] / 2, \quad (4.34)$$

где  $\mu(t) = \sqrt{3} \ln(1 - t/\Theta_0)$ ,  $c_1 = (3x_1^0 + (x_2^0 + 2x_3^0)\Theta_0)/(3\Theta_0^2)$ ,  
 $\xi_1 = -(x_2^0 + 2x_3^0)/(3\Theta_0)$ ,  $\xi_2 = -(2\sqrt{3}x_1^0 + \sqrt{3}x_2^0\Theta_0)/(3\Theta_0^2)$ .

Найдем управление  $u(t)$  на траектории  $x(t)$ . Из формулы (4.31) получаем

$$u_1(t) = 2c_1 - \xi_1 (\cos \mu(t) + 3\sqrt{3} \sin \mu(t)) + \xi_2 (3\sqrt{3} \cos \mu(t) - \sin \mu(t)), \quad (4.35)$$

$$u_2(t) = -c_1 + 2\xi_1 \cos \mu(t) + 2\xi_2 \sin \mu(t). \quad (4.36)$$

Пусть начальная точка имеет вид  $x_0 = (1, -1.5, 2)$ . Тогда решением уравнения (4.30) при  $x = x_0$  вида  $0.006\Theta^4 = 4.25\Theta^2 + 2\Theta + 5$  будет  $\Theta_0 \approx 26.81\dots$  Из формул (4.32)-(4.34) получаем

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (\Theta_0 - t)^2 [0.03 - 0.03 \cos \mu_1(t) + 0.03 \sin \mu_1(t)] \\ (\Theta_0 - t) [-0.06 + 0.01 \cos \mu_1(t) - 0.12 \sin \mu_1(t)] \\ (\Theta_0 - t) [0.03 + 0.04 \cos \mu_1(t) + 0.01 \sin \mu_1(t)] \end{pmatrix},$$

где  $\mu_1(t) \approx \sqrt{3} \ln(1 - 0.04t)$ . Из формул (4.35), (4.36) имеем, что управление на траектории имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.06 + 0.19 \cos \mu_1(t) + 0.13 \sin \mu_1(t) \\ -0.03 - 0.06 \cos \mu_1(t) + 0.06 \sin \mu_1(t) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что управления удовлетворяют ограничению  $\|u\| \leq 1$ .

### 4.3. Решение задачи синтеза для робастной системы в случае многомерного управления

В работе [85] рассмотрена задача позиционного синтеза ограниченного управления для системы (1.49), где  $t \geq 0$ ,  $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q$  – это некоторая окрестность начала координат,  $u \in \mathbb{R}^r$  – управление, удовлетворяющее ограничению  $\|u\| \leq 1$ , матрица  $A_0$  задается формулой (1.38), матрица  $B_0$  задается формулой (1.36), у матрицы  $K$  элементы, стоящие в строке с номером  $s_i$  (то есть в строке, содержащей управление) равны  $k_{s_i j}$ , а остальные элементы нулевые, матрица  $R(t, x)$  задается формулой (1.50). Будем считать, что функции  $r_{mj}(t, x)$  неизвестны и удовлетворяют ограничению

$$\max_{1 \leq j \leq m+1 \leq n_i, i=1, \dots, r} |r_{mj}(t, x)| \leq \Delta.$$

Требуется построить *ограниченное управление*, переводящее произвольную начальную точку  $x_0 \in Q$  в начало координат за *конечное время* при неизвестной матрице  $R(t, x)$ , а также найти  $\Delta$ .

При  $R(t, x) \equiv 0$  система (1.49) совпадает с канонической системой  $\dot{x} = (A_0 + K)x + B_0 u$  (1.45), которая является полностью управляемой. В теореме 1.5 дано управление  $u(x)$ , решающее задачу синтеза для канонической системы с многомерным управлением.

**Определение 4.3.** Под *локальным позиционным синтезом ограниченного управления для робастных систем с многомерным управлением* будем понимать нахождение границы  $\Delta$  изменения возмущений, при которой траектория  $x(t)$  замкнутой системы с этим управлением  $u = u(x)$

$$\dot{x} = (A_0 + K + R(t, x))x + B_0 u(x), \quad (4.37)$$

выходящая из произвольной начальной точки  $x_0 \in Q$ , оканчивалась в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T(x_0, \mathcal{R})$ , то есть

$\lim_{t \rightarrow T(x_0, \mathcal{R})} x(t) = 0$ . Если  $Q = \mathbb{R}^n$ , то задачу будем называть *глобальным позиционным синтезом*.



Рассмотрим систему (1.49). Правая часть уравнения (4.37) с управлением (1.48) представляет собой

$$\begin{aligned} & (A_0 + K + R(t, x))x + B_0u(x) = \\ & = (A_0 + K + R(t, x))x - \left( \frac{1}{2} B_0B_0^*D(\Theta(x))FD(\Theta(x)) + B_0B_0^*K \right) x \end{aligned}$$

Т. к.  $B_0B_0^*K = K$ , то последнее равенство преобразуется к виду

$$(A_0 + K + R(t, x))x + B_0u(x) = (A_0 + R(t, x))x - \frac{1}{2} B_0B_0^*D(\Theta(x))FD(\Theta(x))x.$$

Обозначим  $y(\Theta, x) = D(\Theta)x$ . Тогда уравнение (1.46) принимает вид

$$2a_0\Theta = (Fy(\Theta, x), y(\Theta, x)). \quad (4.38)$$

Пусть  $H$  — диагональная матрица вида (4.21). Обозначим

$$F^1 = F - FH - HF. \quad (4.39)$$

В случае, если матрица  $F^1$  положительно определена, то уравнение (4.38) имеет единственное положительное решение  $\Theta = \Theta(y)$  [13, стр. 108]. Поскольку функция управляемости является временем движения, то матрица  $F^1$  положительно определена [13, стр. 106]. Пусть постоянная  $a_0$  удовлетворяет неравенству (1.47). Рассмотрим замкнутую систему (4.37), где  $u(x)$  задается формулой (1.48). Обозначим через  $x(t)$  траекторию системы (4.37) и найдем производную в силу системы  $\dot{\Theta} = \frac{d}{dt}\Theta(x(t))$ . Пусть матрица  $S(\Theta, t, x)$  задается формулой (4.2), где матрица  $R(t, x)$  имеет вид (1.50). Рассуждая аналогично главе 2, формула (2.8), получаем, что производная функции управляемости в силу системы (4.37) имеет вид (4.3), значит, выполнено (4.4).

### 4.3.1. Наддиагональные возмущения

Пусть у  $(n_i \times n_i)$ -матриц  $R_i(t, x)$  ненулевые только элементы главной наддиагонали, а  $\hat{R}(t, x) \equiv 0$ . В этом случае система (1.49) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_{s_{i-1}+j} = (1 + r_{s_{i-1}+j, s_{i-1}+j+1}(t, x))x_{s_{i-1}+j+1}, & j = 1, \dots, n_i - 1, \\ \dot{x}_{s_i} = \sum_{j=1}^n k_{s_i j} x_j + u_i, & i = 1, \dots, r. \end{cases} \quad (4.40)$$

Используя [13, стр. 109], можно установить тождество  $D(\Theta)R(t, x)D^{-1}(\Theta) = \Theta^{-1}R(t, x)$ . Тогда выполнено (4.6). В дальнейшем мы существенно пользуемся тем, что матрица  $S_0(t, x)$  не зависит от  $\Theta$  и имеет вид  $S_0(t, x) = \text{diag}(S_1(t, x), \dots, S_r(t, x))$ ,  $S_i(t, x) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & f_{11}r_{12} & \dots & f_{1(n_i-1)}r_{(n_i-1)n_i} \\ f_{11}r_{12} & 2f_{12}r_{12} & \dots & f_{1n_i}r_{12} + f_{2(n_i-1)}r_{(n_i-1)n_i} \\ f_{12}r_{23} & f_{13}r_{12} + f_{22}r_{23} & \dots & f_{2n_i}r_{23} + f_{3(n_i-1)}r_{(n_i-1)n_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1(n_i-1)}r_{(n_i-1)n_i} & f_{1n_i}r_{12} + f_{2(n_i-1)}r_{(n_i-1)n_i} & \dots & 2f_{(n_i-1)n_i}r_{(n_i-1)n_i} \end{pmatrix},$$

где  $r_{mj} = r_{mj}(t, x)$ .

**Теорема 4.5.** Пусть  $\gamma_1$  – произвольное число, удовлетворяющее неравенству  $0 < \gamma_1 < 1$ . Пусть  $\tilde{G} = |(F^1)^{-1}| \cdot (F\tilde{R} + \tilde{R}^*F)$ , где матрица  $\tilde{R}$  равна матрице  $R(t, x)$  при  $r_{mj}(t, x) = 1$ . Пусть

$$\Delta = \frac{(1 - \gamma_1)}{\rho(\tilde{G})}. \quad (4.41)$$

Пусть при  $x \neq 0$  функция управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  – это единственное положительное решение уравнения (1.46), где постоянная  $a_0$  выбирается согласно неравенству (1.47).

Тогда в области  $Q$ , задаваемой равенством  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$  управление, задаваемое формулой (1.48), решает задачу локального позиционного синтеза для робастной системы (4.40). При этом траектория замкнутой системы (4.37), выходящая из произвольной начальной точки

$x(0) = x_0 \in Q$ , оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T = T(x_0, \mathcal{R})$ , для которого выполнена оценка (2.23).

В случае, если  $K \equiv 0$ , синтез глобальный.

**Доказательство.** Т. к. матрицы  $A_0$  и  $B_0 = \text{diag}(B_{01}, \dots, B_{0r})$ , имеют блочную структуру, то матрица  $F^{-1}$ , задаваемая формулой (1.39), имеет вид

$$F^{-1} = \text{diag}(F_1^{-1}, \dots, F_r^{-1}),$$

где [13, стр. 98]

$$F_i^{-1} = \int_0^1 (1-t)e^{-A_{0i}t} B_{0i} B_{0i}^* e^{-A_{0i}^* t} dt = \left( \frac{(-1)^{m+j}}{(n_i - m)!(n_i - j)!(2n_i - m - j + 1)(2n_i - m - j + 2)} \right)_{m,j=1}^{n_i}. \quad (4.42)$$

В силу доказательства теоремы 4.1 элементы матрицы  $F_i$ , обратной к матрице  $F_i^{-1}$ , являются положительными.

Оценим  $\lambda_{\max}((F^1)^{-1} S_0(t, x)) \leq \rho((F^1)^{-1} S_0(t, x))$ . В силу формулы (4.9) имеем  $\rho((F^1)^{-1} S_0(t, x)) \leq \rho|(F^1)^{-1} S_0(t, x)| \leq \Delta\rho(\tilde{G})$ . Здесь используется то, что элементы матрицы  $F$  положительны. Подставим полученное неравенство в (4.10), имеем

$$\dot{\Theta} \leq -1 + \Delta\rho(\tilde{G}). \quad (4.43)$$

Потребуем, чтобы  $-1 + \Delta\rho(\tilde{G}) \leq -\gamma_1$ , тогда  $\dot{\Theta} \leq -\gamma_1$ . Из последнего неравенства в силу теоремы 1.1 вытекает оценка на время попадания (2.23).

Для полного доказательства теоремы нам осталось установить ограниченность управления. Используя равенство  $B_0^* D(\Theta) = \Theta^{-\frac{1}{2}} B_0^*$ , перепишем управление (1.48) в виде

$$u(x) = - \left( \frac{\Theta^{-\frac{1}{2}}}{2} B_0^* F + B_0^* K D^{-1}(\Theta(x)) \right) y(\Theta, x)$$

На основании неравенств  $\|y(\Theta, x)\|^2 \leq 2a_0\Theta(x)\|F^{-1}\|$  и

$$\|D^{-1}(\Theta(x))\| = \begin{cases} \Theta^{\frac{1}{2}} & \text{при } 0 < \Theta < 1, \\ \Theta^{\frac{2n_1-1}{2}} & \text{при } \Theta \geq 1, \end{cases}$$

при  $\Theta(x) \leq c$  имеем

$$\|u(x)\| \leq \left( \frac{1}{2} \|B_0^* F\| + \max\{c^{n_1}, c\} \|B_0^* K\| \right) \sqrt{2a_0 \|F^{-1}\|}.$$

Выбирая число  $a_0$  из условия (1.47), из последнего неравенства имеем  $\|u(x)\| \leq 1$  для всех  $x \in Q$ . Тогда по теореме 1.5 управление  $u(x)$  вида (1.48) решает для системы (4.40) задачу локального позиционного синтеза ограниченного управления.  $\square$

#### 4.3.2. Общий случай

Пусть матрица  $R(t, x)$  имеет вид (1.50). Тогда элементы матрицы  $S(\Theta, t, x)$ , задаваемой формулой (4.2), это полиномы по  $\Theta$  степени не выше  $n_1$ . Рассуждая аналогично случаю наддиагональных возмущений, из формулы (4.11) имеем

$$\dot{\Theta} \leq -1 + \rho((F^1)^{-1} S(\Theta, t, x)) \leq -1 + \Delta \max\{c^{n_1}, c\} \cdot \rho(\tilde{G})$$

при  $\Theta(x) \leq c$ . Потребуем, чтобы

$$-1 + \Delta \max\{c^{n_1}, c\} \cdot \rho(\tilde{G}) \leq -\gamma_1, \quad (4.44)$$

тогда  $\dot{\Theta} \leq -\gamma_1$ . Получаем, что справедлива следующая теорема:

**Теорема 4.6.** Пусть  $\gamma_1$  – произвольное число, удовлетворяющее неравенству  $0 < \gamma_1 < 1$ . Пусть при  $x \neq 0$  функция управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  – это единственное положительное решение уравнения (1.46), где постоянная  $a_0$  выбирается согласно неравенству (1.47), область решения задачи синтеза является эллипсоидом вида  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$ . Пусть

$$\Delta = \frac{(1 - \gamma_1)}{\max\{c^{n_1}, c\} \cdot \rho(\tilde{G})}. \quad (4.45)$$

Тогда в области  $Q$  управление, задаваемое формулой (1.48), решает задачу локального позиционного синтеза для робастной системы (1.49). При этом траектория замкнутой системы (4.37), выходящая из произвольной

начальной точки  $x(0) = x_0 \in Q$ , оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени  $T = T(x_0, \mathcal{R})$ , для которого выполнена оценка (2.23).

**Замечание 4.5.** Иногда из неравенства (4.44) необходимо находить  $c$ , считая  $\Delta$  произвольным. При этом мы получаем область решения задачи синтеза  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$ .

**Замечание 4.6.**  $\Delta$  монотонно убывает по  $\gamma_1$ , при этом оценка на время движения  $T(x_0, \mathcal{R})$ , задаваемая формулой (2.23), тоже монотонно убывает по  $\gamma_1$ . Величина  $\Delta \rightarrow \max$  при  $\gamma_1 \rightarrow 0$ , при этом  $T(x_0, \mathcal{R}) \rightarrow +\infty$  при  $\Delta \rightarrow 0$ .

**Замечание 4.7.** Пусть  $R(t, x)$  – некоторая матрица, принадлежащая классу  $\mathcal{R}$ . Для нахождения траектории, начинающейся в заданной точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  ( $x_0 \in Q$  в случае локального синтеза), поступаем следующим образом. Решаем уравнение (1.46) при  $x = x_0$  и находим единственный положительный корень  $\Theta(x_0) = \theta_0$ . Положим  $\theta(t) = \Theta(x(t))$ . Траектория находится из системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + R(t, x))x - \frac{1}{2} B_0^* D(\theta(x)) F D(\theta(x)) x, \\ \dot{\theta} = \frac{(-F^1 + S(\Theta, t, x)) D(\theta) x, D(\theta) x}{(F^1 D(\theta) x, D(\theta) x)} \\ x(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (4.46)$$

Заметим, что при этом уравнение (1.46) достаточно решить только один раз – для нахождения  $\theta_0$ .

#### 4.4. Остановка колебаний управляемого движения системы двух связанных маятников

Также в работе [85] рассмотрена механическая система, состоящая из 2-х маятников, связанных между собой пружиной и совершающих колебания в плоскости рисунка. Два маятника длины  $l_1$  и массы  $m_1$  и длины  $l_2$

и массы  $m_2$  соединены упругой пружиной жесткости  $k$ , прикрепленной концами к стержням маятников. Пусть  $h$  – длина от точки подвеса до точки крепления пружины в обоих маятниках. Колебаниям этой системы без управления посвящено много работ, напр. [32, п. 6.1], [48, п. 132].

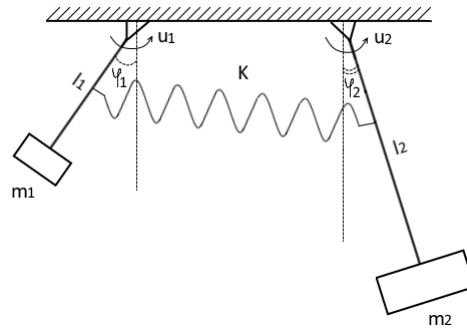


Рис. 4.32: Система связанных маятников

Составим систему уравнений Лагранжа второго рода

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \end{cases} \quad (4.47)$$

описывающую движение рассматриваемой механической системы. В качестве обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$  выберем  $q_1 = \varphi_1$  и  $q_2 = \varphi_2$ , где  $\varphi_1$  – это угол между стержнем массы  $m_1$  и вертикальной осью, а  $\varphi_2$  – это угол между стержнем массы  $m_2$  и вертикальной осью. Лагранжиан имеет вид  $L = T - V$ , где  $T$  – это кинетическая энергия системы,  $V$  – её потенциальная энергия. Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{m_1(l_1\dot{\varphi}_1)^2}{2} + \frac{m_2(l_2\dot{\varphi}_2)^2}{2}.$$

Потенциальная энергия системы равна

$$V = -m_1gl_1 \cos \varphi_1 - m_2gl_2 \cos \varphi_2 + \frac{kh^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}.$$

Тогда лагранжиан принимает вид:  $L = T - V =$

$$= \frac{m_1(l_1\dot{\varphi}_1)^2}{2} + \frac{m_2(l_2\dot{\varphi}_2)^2}{2} + m_1gl_1 \cos \varphi_1 + m_2gl_2 \cos \varphi_2 - \frac{kh^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}.$$

Рассмотрим управляемые движения этой системы. Действие сил  $u_1$  и  $u_2$  указано на рис. 4.32. Линеаризованные уравнения движения этого маятника имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = -\frac{m_1gl_1 + kh^2}{m_1l_1^2} \varphi_1 + \frac{kh^2}{m_1l_1^2} \varphi_2 + u_1, \\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{kh^2}{m_2l_2^2} \varphi_1 - \frac{m_2gl_2 + kh^2}{m_2l_2^2} \varphi_2 + u_2. \end{cases} \quad (4.48)$$

Величины сил  $u_1$  и  $u_2$  удовлетворяют условию

$$\|(u_1, u_2)^*\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq 1.$$

Если величина силы положительна, то сила действует по часовой стрелке. Сила действует по касательной к траектории движения.

**Первый случай.** Будем считать, что массы маятников  $m_1$ ,  $m_2$  и длины  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $h$  известны, а жесткость пружины  $k$  неизвестна. Обозначим

$$\frac{kh^2}{m_1l_1^2} = r_{21}, \quad \frac{kh^2}{m_2l_2^2} = r_{41}, \quad \frac{g}{l_1} = k_{21}, \quad \frac{g}{l_2} = k_{43}.$$

Заменой переменных

$$x_1 = \varphi_1, \quad x_2 = \dot{\varphi}_1, \quad x_3 = \varphi_2, \quad x_4 = \dot{\varphi}_2$$

система (4.48) сводится к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -(r_{21} + k_{21})x_1 + r_{21}x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = r_{41}x_1 - (r_{41} + k_{43})x_3 + u_2, \end{cases} \quad (4.49)$$

в которой коэффициенты  $r_{21}$  и  $r_{41}$  неизвестные константы. Приведем систему (4.49) к матричному виду

$$\dot{x} = (A_0 + K + R)x + B_0u, \quad (4.50)$$

где матрицы  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $K$  и  $R$  имеют вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{21} & 0 & r_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & -r_{41} & 0 \end{pmatrix},$$

в данном случае  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 2$ ,  $s_1 = 2$ ,  $s_2 = n = 4$ .

Рассмотрим задачу позиционного синтеза для робастной системы (4.50) с ограничениями на управление  $\|u\| \leq 1$ . Эта система является полностью управляемой при любой постоянной величине жесткости  $k$ , так как  $rg(B_0, (A_0 + K + R)B_0) = 4$ .

Матрица  $F$ , задаваемая формулой (1.39) и матрица  $D(\Theta)$ , задаваемая формулой (1.40), имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} 36 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad D(\Theta) = \begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Пусть  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ . При  $x \neq 0$  определим функцию управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  как единственное положительное решение уравнения (1.46), которое приобретает вид

$$2a_0\Theta^4 = 36x_1^2 + 24\Theta x_1x_2 + 6\Theta^2x_2^2 + 36x_3^2 + 24\Theta x_3x_4 + 6\Theta^2x_4^2. \quad (4.53)$$

Доопределим функцию управляемости в точке ноль равенством  $\Theta(0) = 0$ .

Будем рассматривать решение задачи синтеза в области  $Q = \{x :$



$\Theta(x) \leq c$ }, представляющей собой эллипсоид. Постоянную  $c > 0$  определим далее. Постоянная  $a_0$  выбирается согласно неравенству (1.47), которое приобретает вид

$$0 < a_0 \leq \frac{3.58}{(13.42 + 2 \max\{c^2, c\} \max\{k_{21}, k_{43}\})^2}. \quad (4.54)$$

Для того, чтобы область решения задачи синтеза содержала эллипсоид наибольшего размера, будем выбирать  $a_0$  наибольшим, удовлетворяющим (4.54).

Управление, задаваемое формулой (1.48), имеет вид

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6x_1}{\Theta^2(x)} - \frac{3x_2}{\Theta(x)} + k_{21}x_1 \\ -\frac{6x_3}{\Theta^2(x)} - \frac{3x_4}{\Theta(x)} + k_{43}x_3 \end{pmatrix},$$

где  $\Theta = \Theta(x)$  – единственное положительное решение уравнения (4.53). Это управление при любой реализации жесткости  $k$  переводит произвольную начальную точку  $x_0$  в начало координат за конечное время  $T(x_0, k) \leq \Theta(x_0)/\gamma_1$ , где  $\gamma_1$  – произвольное число, удовлетворяющее неравенству  $0 < \gamma_1 < 1$ .

Матрица  $S = S(\Theta, t, x)$ , задаваемая формулой (4.2), равна

$$S = \begin{pmatrix} -24r_{21}\Theta^2 & -6r_{21}\Theta^2 & 12(r_{21} + r_{41})\Theta^2 & 6r_{41}\Theta^2 \\ -6r_{21}\Theta^2 & 0 & 6r_{21}\Theta^2 & 0 \\ 12(r_{21} + r_{41})\Theta^2 & 6r_{21}\Theta^2 & -24r_{41}\Theta^2 & -6r_{41}\Theta^2 \\ 6r_{41}\Theta^2 & 0 & -6r_{41}\Theta^2 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\Theta = \Theta(x)$  – единственное положительное решение уравнения (4.53).

Получим оценку на область решения задачи синтеза. Для этого найдем  $c$  из неравенства (4.44), которое имеет вид

$$-1 + \Delta \max\{c^2, c\} \cdot \rho(\tilde{G}) \leq -\gamma_1. \quad (4.55)$$

Учитывая вид матрицы  $R$ , получаем, что  $\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Имеем:

$$\tilde{G} = |(F^1)^{-1}| \cdot (F\tilde{R} + \tilde{R}^*F) = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 4 & \frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 4 & \frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho(\tilde{G}) \approx 8.4,$$

$$\Delta = k \max \left\{ \frac{h^2}{m_1 l_1^2}; \frac{h^2}{m_2 l_2^2} \right\}.$$

Из неравенства (4.55) следует, что

$$\max\{c^2, c\} \leq \frac{0.12(1 - \gamma_1)}{\Delta} = \frac{0.12(1 - \gamma_1)}{k \max \left\{ \frac{h^2}{m_1 l_1^2}; \frac{h^2}{m_2 l_2^2} \right\}}.$$

Матрица  $F^1$ , задаваемая формулой (4.39), имеет вид

$$F^1 = \begin{pmatrix} 144 & 36 & 0 & 0 \\ 36 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 144 & 36 \\ 0 & 0 & 36 & 12 \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Получим более точную оценку на  $c$ , воспользовавшись неравенством (4.4). Так как

$$(F^1)^{-1}S(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{r_{21}\Theta^2}{6} & \frac{r_{21}\Theta^2}{6} & \frac{(-r_{21} + 2r_{41})\Theta^2}{6} & \frac{r_{41}\Theta^2}{6} \\ 0 & \frac{r_{21}\Theta^2}{2} & (r_{21} - r_{41})\Theta^2 & -\frac{r_{41}\Theta^2}{2} \\ \frac{(-r_{21} + 2r_{41})\Theta^2}{6} & \frac{r_{21}\Theta^2}{2} & -\frac{r_{41}\Theta^2}{6} & -\frac{r_{41}\Theta^2}{6} \\ (r_{21} - r_{41})\Theta^2 & -\frac{r_{21}\Theta^2}{2} & 0 & \frac{r_{41}\Theta^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$\text{то } \sigma((F^1)^{-1}S(\Theta)) = \left\{ 0; 0; \frac{(r_{21} + r_{41} \pm 2\sqrt{2(r_{21}^2 + r_{41}^2)}) \Theta^2}{6} \right\},$$

$$\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S(\Theta)) = \frac{(r_{21} + r_{41} + 2\sqrt{2(r_{21}^2 + r_{41}^2)}) \Theta^2}{6}.$$

При  $x \in Q$  из (4.4) вытекает, что

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &\leq -1 + \lambda_{\max}((F^1)^{-1}S(\Theta)) = -1 + \frac{(r_{21} + r_{41} + 2\sqrt{2(r_{21}^2 + r_{41}^2)}) \Theta^2}{6} \leq \\ &\leq -1 + \frac{(r_{21} + r_{41} + 2\sqrt{2(r_{21}^2 + r_{41}^2)}) c^2}{6}. \end{aligned}$$

Пусть  $c > 0$  таково, что выполняется неравенство

$$-1 + \frac{(r_{21} + r_{41} + 2\sqrt{2(r_{21}^2 + r_{41}^2)}) c^2}{6} \leq -\gamma_1, \quad (4.57)$$

тогда  $\dot{\Theta} \leq -\gamma_1$ . Из (4.57) получаем, что  $c \leq \sqrt{\frac{6(1-\gamma_1)}{(r_{21}+r_{41}+2\sqrt{2(r_{21}^2+r_{41}^2)})}}$ . Для того, чтобы область решения задачи синтеза содержала эллипсоид наибольшего размера, будем выбирать  $c$  наибольшим, удовлетворяющим последнему неравенству. Решение задачи синтеза проводится в области

$$Q = \left\{ x : \Theta(x) \leq \left( \frac{6(1-\gamma_1)}{k \left( \frac{h^2}{m_1 l_1^2} + \frac{h^2}{m_2 l_2^2} + 2\sqrt{\frac{2h^4}{m_1^2 l_1^4} + \frac{2h^4}{m_2^2 l_2^4}} \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (4.58)$$

Пусть

$$m_1 = 1, m_2 = 2, l_1 = 60, l_2 = 30, h = 7.5, \gamma_1 = 0.001.$$

Тогда

$$\frac{h}{l_1} = \frac{1}{8}, \frac{h}{l_2} = \frac{1}{4}, k_{21} = \frac{g}{l_1} \approx 0.16, k_{43} = \frac{g}{l_2} \approx 0.32, r_{21} = \frac{k}{64}, r_{41} = \frac{k}{32}.$$

Пусть жесткость пружины  $k$  удовлетворяет ограничению  $k \leq 4$ , но является неизвестной величиной. Тогда множество точек, из которых можно попасть в начало координат (4.58) является эллипсоидом вида  $Q = \{x :$

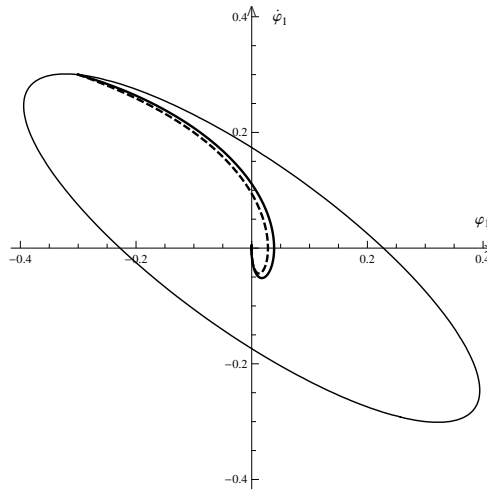
$\Theta(x) \leq 3.2\}$ . Заметим, что из (4.58) также следует, что при уменьшении жесткости пружины  $k$  размеры осей эллипсоида  $Q$  увеличиваются. Т. е. если пружина отсутствует, то синтез глобальный. При  $c = 3.2$  неравенство (4.54) на  $a_0$  приобретает вид  $a_0 \leq 0.0088\dots$ . Положим  $a_0 = 0.008$ .

Выберем начальную точку  $x(0) = (-0.3, 0.3, 0, 0)$ ,  $x(0) \in Q$ . Тогда единственное положительное решение уравнения (4.53) равно  $\Theta_0 \approx 3.2$ . Пусть  $x = x(t, k_0)$  – траектория системы (4.46), которая реализуется при некотором коэффициенте жесткости  $k_0 \leq 4$ . Обозначим  $\theta(t) = \Theta(x(t, k_0))$ . Траектория  $x = x(t, k_0)$  является траекторией системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{k_0}{64}(-x_1 + x_3) - \frac{6x_1}{\theta^2} - \frac{3x_2}{\theta}, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \frac{k_0}{32}(x_1 - x_3) - \frac{6x_1}{\theta^2} - \frac{3x_2}{\theta}, \\ \dot{\theta} = \phi, \\ x_1(0) = -0.3, \quad x_2(0) = 0.3, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0, \quad \theta(0) = 3.2, \end{cases} \quad (4.59)$$

где  $\phi = -((12 + 0.03 k_0 \theta^2) x_1^2 + (6 + 0.02 k_0 \theta^2) x_1 x_2 \theta + x_2^2 \theta^2 + (12 + 0.06 k_0 \theta^2) x_3^2 + (6 + 0.03 k_0 \theta^2) x_3 x_4 \theta + x_4^2 \theta^2 - 0.09 k_0 x_1 x_3 \theta^2 - 0.02 k_0 x_2 x_3 \theta^3 - 0.03 k_0 x_1 x_4 \theta^3) / (12 x_1^2 + 6x_1 x_2 \theta + x_2^2 \theta^2 + 12 x_3^2 + 6x_3 x_4 \theta + x_4^2 \theta^2)$ .

На рис. 4.33 представлена проекция области  $Q$  на плоскость  $(x_1, x_2) = (\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ , то есть  $\tilde{Q} = \{(x_1^0, x_2^0, 0, 0) : \Theta(x_1^0, x_2^0, 0, 0) \leq 3.2\}$ . Пусть  $(x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t), x_4^0(t), \theta(t))$  – решение системы (4.59) при  $k_0 = 4$ . На рис. 4.33 представлена кривая  $(x_1^0(t), x_2^0(t))$  (сплошная линия). На рис. 4.33 также представлена кривая  $(\bar{x}_1^0(t), \bar{x}_2^0(t))$  (пунктирная линия), соответствующая случаю  $k_0 = 0$ . При изменении жесткости пружины 0 до 4 траектории, которые начинаются в  $x(0)$ , заполняют пространство между этими

Рис. 4.33: Проекция траекторий на плоскость  $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ 

траекториями. Траектория при  $k_0 = 0$  находится из системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_2 = -\frac{6x_1}{\theta^2} - \frac{3x_2}{\theta}, & \dot{x}_3 = x_4, & \dot{x}_4 = -\frac{6x_3}{\theta^2} - \frac{3x_4}{\theta}, & \dot{\theta} = -1, \\ x_1(0) = -0.3, & x_2(0) = 0.3, & x_3(0) = 0, & x_4(0) = 0, & \theta(0) = 3.2. \end{cases}$$

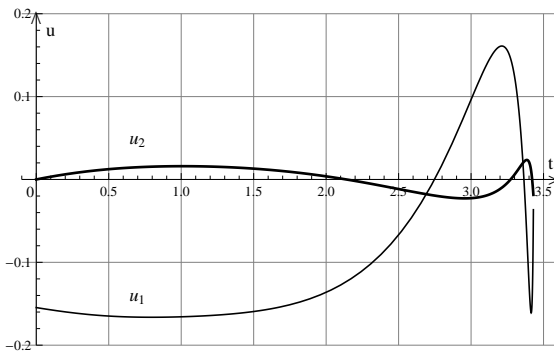


Рис. 4.34: Компоненты управления системы (4.59)

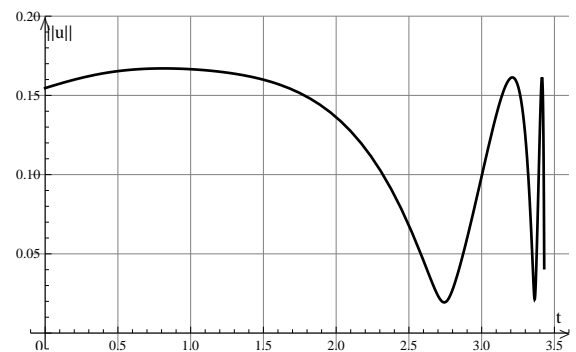


Рис. 4.35: Норма управления системы (4.59)

На рис. 4.34 приведены графики компонент управления на конкретной реализации траектории

$$u_1 = u_1(x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t), x_4^0(t)) = -\frac{6x_1^0(t)}{\theta^2(t)} - \frac{3x_2^0(t)}{\theta(t)} + 0.16x_1^0(t),$$

$$u_2 = u_2(x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t), x_4^0(t)) = -\frac{6x_3^0(t)}{\theta^2(t)} - \frac{3x_4^0(t)}{\theta(t)} + 0.32x_3^0(t),$$

а на рис. 4.35 приведена норма управления  $\|(u_1, u_2)^*\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ , причем

$\|(u_1, u_2)^*\| \leq 1$ . Функция управляемости  $\theta(t)$  близка к линейной функции ( $y = 3.2 - t$ ) и ее график представлен на рис. 4.36. График производной по времени от функции управляемости дан на рис. 4.37. Оценка (2.23) на время попадания в начало координат имеет вид  $T \leq 3206$ . Эта оценка на время попадания верна при всех  $0 \leq k_0 \leq 4$ , но при конкретных  $k_0$  она меньше. Решая задачу численно, получаем, что  $T \approx 3.43$ . Численный расчет показывает, что при  $0 \leq k_0 \leq 4$  выполнено  $3.2 \leq T \leq 3.43$ . Все графики представлены на траектории при  $k_0 = 4$ . При других  $k_0$  графики будут подобны представленным, но время  $T$  попадания в точку покоя  $(0, 0, 0, 0)$  будет меняться, но будет конечным и удовлетворять оценке  $T \leq 3206$ .

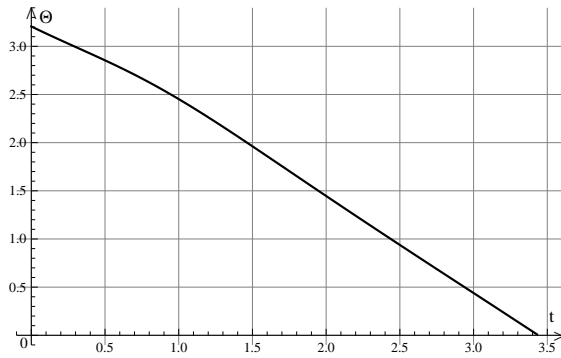


Рис. 4.36: Функция управляемости системы (4.59)

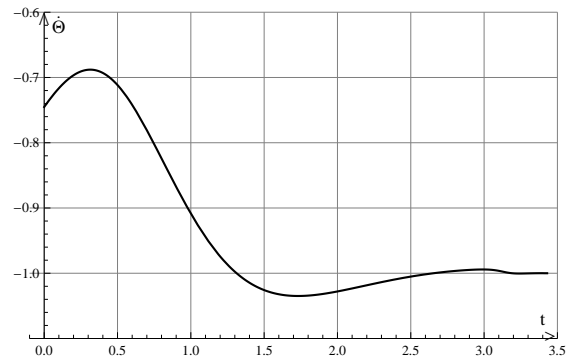


Рис. 4.37: Производная от функции управляемости системы (4.59)

На рис. 4.38 представлены колебания системы с этими начальными условиями при отсутствии управлений.

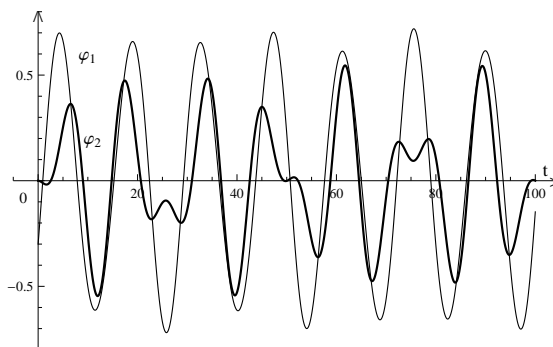


Рис. 4.38: Колебания системы без управления

**Второй случай.** Пусть  $l_1 = l_2 = l$ . Будем считать, что массы маятников  $m_1$ ,  $m_2$  и жесткость пружины  $k$  известны, а длина  $l$  неизвестна, но известно отношение  $\frac{h}{l}$ . Обозначим

$$\frac{kh^2}{m_1 l^2} = k_{21}, \quad \frac{kh^2}{m_2 l^2} = k_{41}, \quad \frac{g}{l} = r_{21}.$$

Заменой переменных

$$x_1 = \varphi_1, \quad x_2 = \dot{\varphi}_1, \quad x_3 = \varphi_2, \quad x_4 = \dot{\varphi}_2$$

система (4.48) сводится к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -(r_{21} + k_{21})x_1 + k_{21}x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = k_{41}x_1 - (r_{21} + k_{41})x_3 + u_2, \end{cases}$$

в которой коэффициент  $r_{21}$  – неизвестная постоянная. Матричный вид этой системы (4.50), в которой матрицы  $A_0$  и  $B_0$  задаются формулой (4.51), а матрицы  $K$  и  $R$  имеют вид

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{21} & 0 & k_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41} & 0 & -k_{41} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $F$  и  $D(\Theta)$  задаются формулой (4.52). При  $x \neq 0$  определим функцию управляемости  $\Theta = \Theta(x)$  как единственное положительное решение уравнения (4.53), где постоянная  $a_0$  выбирается согласно неравенству (1.47), которое приобретает вид

$$0 < a_0 \leq \frac{3.58}{(13.42 + 2.83 \max\{c^2, c\} \sqrt{k_{21}^2 + k_{41}^2})^2}. \quad (4.60)$$

Для того, чтобы область решения задачи синтеза содержала эллипсоид наибольшего размера, будем выбирать  $a_0$  наибольшим, удовлетворяющим (4.60). Как и ранее, будем рассматривать решение задачи синтеза в области

$Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$ , которая является эллипсоидом. Постоянную  $c > 0$  определим далее.

Управление, задаваемое формулой (1.48), имеет вид

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6x_1}{\Theta^2(x)} - \frac{3x_2}{\Theta(x)} + k_{21}(x_1 - x_3) \\ -\frac{6x_3}{\Theta^2(x)} - \frac{3x_4}{\Theta(x)} + k_{41}(-x_1 + x_3) \end{pmatrix},$$

где  $\Theta = \Theta(x)$  – единственное положительное решение уравнения (4.53). Это управление при любой реализации длины  $l$  переводит произвольную начальную точку  $x_0$  в начало координат за конечное время  $T(x_0, l) \leq \Theta(x_0)/\gamma_1$ , где  $\gamma_1$  – произвольное число, удовлетворяющее неравенству  $0 < \gamma_1 < 1$ .

Матрица  $S = S(\Theta, t, x)$ , задаваемая формулой (4.2), равна

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{24g\Theta^2}{l} & -\frac{6g\Theta^2}{l} & 0 & 0 \\ -\frac{6g\Theta^2}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{24g\Theta^2}{l} & -\frac{6g\Theta^2}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{6g\Theta^2}{l} & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\Theta = \Theta(x)$  – единственное положительное решение уравнения (4.53).

Получим оценку на область решения задачи синтеза, выражая  $c$  из неравенства (4.55) при  $\Delta = \frac{g}{l}$ . Во втором случае  $\rho(\tilde{G}) \approx 4.2$ . Тогда из неравенства (4.55) следует, что

$$\max\{c^2, c\} \leq \frac{0.23(1 - \gamma_1)}{\Delta} = \frac{0.23(1 - \gamma_1)}{\frac{g}{l}} \approx 0.024 l(1 - \gamma_1).$$

Так как во втором случае  $\lambda_{max}((F^1)^{-1}S(\Theta)) = \frac{g\Theta^2}{2l}$ , то при  $x \in Q$  из (4.4) вытекает, что

$$\dot{\Theta} \leq -1 + \lambda_{max}((F^1)^{-1}S(\Theta)) = -1 + \frac{g\Theta^2}{2l} \leq -1 + \frac{gc^2}{2l}.$$



Пусть  $c > 0$  таково, что выполняется неравенство

$$-1 + \frac{gc^2}{2l} \leq -\gamma_1, \quad (4.61)$$

тогда  $\dot{\Theta} \leq -\gamma_1$ . Из (4.61) получаем, что  $c \leq \sqrt{0.2 l(1 - \gamma_1)}$ . Для того, чтобы область решения задачи синтеза содержала эллипсоид наибольшего размера, будем выбирать  $c$  наибольшим, удовлетворяющим последнему неравенству. Во втором случае решение задачи синтеза проводится в области

$$Q = \{x : \Theta(x) \leq \sqrt{0.2 l(1 - \gamma_1)}\}. \quad (4.62)$$

Пусть

$$m_1 = 1, m_2 = 2, k = 1, \frac{h}{l} = \frac{1}{4}, \gamma_1 = 0.001.$$

Тогда  $k_{21} = \frac{kh^2}{m_1 l^2} = \frac{1}{16}$ ,  $k_{41} = \frac{kh^2}{m_2 l^2} = \frac{1}{32}$ ,  $r_{21} = \frac{9.8}{l}$ .

Пусть длина маятника  $l$  удовлетворяет ограничению  $l \geq 30$ , но является неизвестной величиной. Тогда множество точек, из которых можно попасть в начало координат (4.62) является эллипсоидом вида  $Q = \{x : \Theta(x) \leq 2.47\}$ . Заметим, что из (4.62) также следует, что при уменьшении длины  $l$  размеры осей эллипсоида  $Q$  уменьшаются. При  $c = 2.47$  неравенство (4.60) на  $a_0$  приобретает вид  $a_0 \leq 0.016\dots$ . Положим  $a_0 = 0.016$ .

Выберем как и ранее начальную точку  $x(0) = (-0.3, 0.3, 0, 0)$ ,  $x(0) \in Q$ . Тогда единственное положительное решение уравнения (4.53) равно  $\Theta_0 \approx 2.44$ . Пусть  $x = x(t, l_0)$  – траектория системы (2.16), которая реализуется при некотором коэффициенте жесткости  $l_0 \geq 30$ . Обозначим

$\theta(t) = \Theta(x(t, l_0))$ . Траектория  $x = x(t, l_0)$  является траекторией системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{9.8}{l}x_1 - \frac{6x_1}{\theta^2} - \frac{3x_2}{\theta}, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\frac{9.8}{l}x_3 - \frac{6x_3}{\theta^2} - \frac{3x_4}{\theta}, \\ \dot{\theta} = \phi, \\ x_1(0) = -0.3, \quad x_2(0) = 0.3, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0, \quad \theta(0) = 2.44, \end{array} \right. \quad (4.63)$$

где  $\phi = -((12l + 19.6\theta^2)x_1^2 + (6l + 9.8\theta^2)x_1x_2\theta + lx_2^2\theta^2 + (12l + 19.6\theta^2)x_3^2 + (6l + 9.8\theta^2)x_3x_4\theta + lx_4^2\theta^2) / (l(12x_1^2 + 6x_1x_2\theta + x_2^2\theta^2 + 12x_3^2 + 6x_3x_4\theta + x_4^2\theta^2))$ .

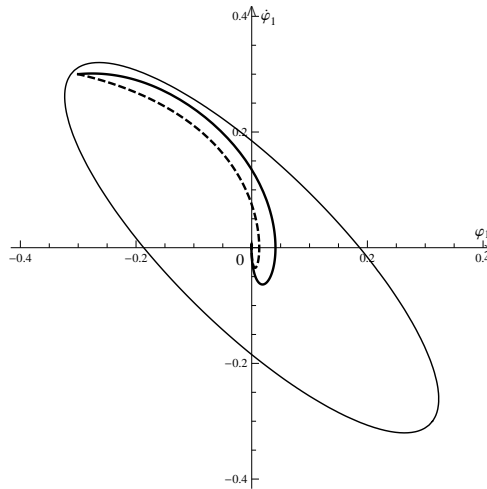


Рис. 4.39: Проекция траекторий на плоскость  $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$

На рис. 4.39 представлена проекция области  $Q$  на плоскость  $(x_1, x_2) = (\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ , то есть  $\tilde{Q} = \{(x_1^0, x_2^0, 0, 0) : \Theta(x_1^0, x_2^0, 0, 0) \leq 2.47\}$ . Пусть  $(x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t), x_4^0(t), \theta(t))$  – решение системы (4.63) при  $l = 30$ . На рис. 4.39 представлена кривая  $(x_1^0(t), x_2^0(t))$  (сплошная линия).

Также на рис. 4.39 также представлена кривая  $(\bar{x}_1^0(t), \bar{x}_2^0(t))$  (пунктирная линия), соответствующая случаю  $l = \infty$ . При изменении длины ма-

ятника от 30 до  $\infty$  траектории, начинающиеся в  $x(0)$ , заполняют пространство между этими траекториями. Траектория при  $l = \infty$  находится из системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_2 = -\frac{6x_1}{\theta^2} - \frac{3x_2}{\theta}, & \dot{x}_3 = x_4, & \dot{x}_4 = -\frac{6x_3}{\theta^2} - \frac{3x_4}{\theta}, & \dot{\theta} = -1, \\ x_1(0) = -0.3, & x_2(0) = 0.3, & x_3(0) = 0, & x_4(0) = 0, & \theta(0) = 2.44. \end{cases}$$

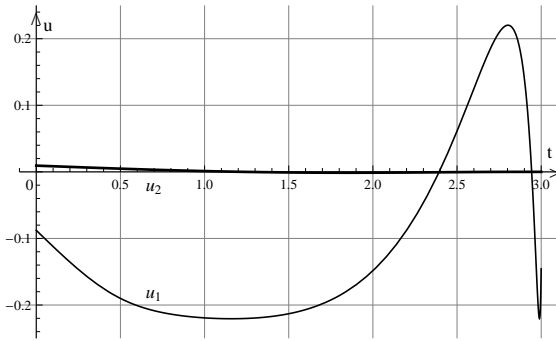


Рис. 4.40: Компоненты управления системы (4.63)

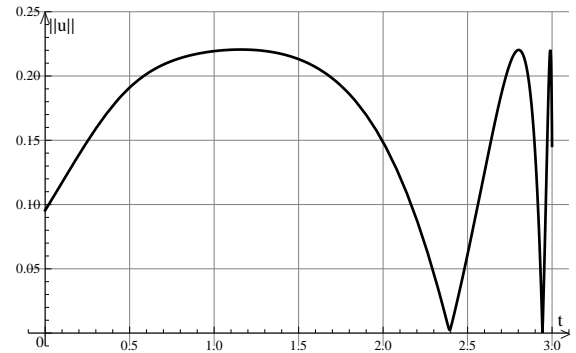


Рис. 4.41: Норма управления системы (4.63)

На рис. 4.40 приведены графики компонент управления на конкретной реализации траектории

$$u_1 = u_1(x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t), x_4^0(t)) = -\frac{6x_1^0(t)}{\theta^2(t)} - \frac{3x_2^0(t)}{\theta(t)} + \frac{x_1^0(t) - x_3^0(t)}{16},$$

$$u_2 = u_2(x_1^0(t), x_2^0(t), x_3^0(t), x_4^0(t)) = -\frac{6x_3^0(t)}{\theta^2(t)} - \frac{3x_4^0(t)}{\theta(t)} - \frac{x_1^0(t) - x_3^0(t)}{32},$$

а на рис.4.41 – норма управления  $\|(u_1, u_2)^*\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ , причем  $\|(u_1, u_2)^*\| \leq 1$ . Функция управляемости  $\theta(t)$  близка к линейной ( $y = 2.46 - t$ ) и представлена на рис. 4.42. График производной по времени от функции управляемости дан на рис. 4.43. Оценка (2.23) на время попадания в начало координат имеет вид  $T \leq 2438$ . Эта оценка на время попадания верна при всех  $l \geq 30$ , но при конкретных  $l$  она меньше. Решая задачу численно, получаем, что  $T \approx 3$ . Численный расчет показывает, что при  $l \geq 30$  выполнено  $2.44 \leq T \leq 3$ .

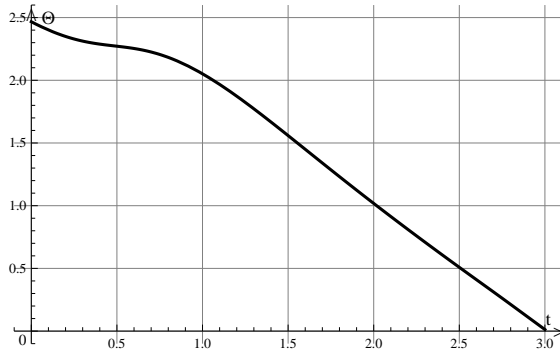


Рис. 4.42: Функция управляемости системы (4.63)

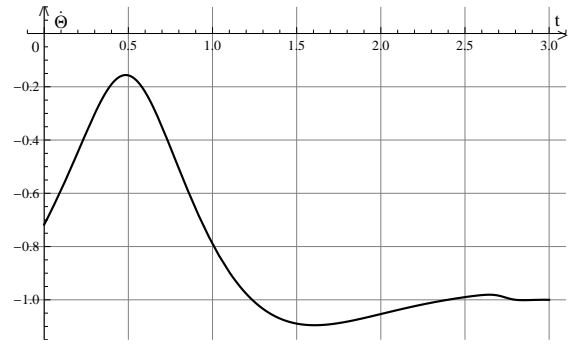


Рис. 4.43: Производная от функции управляемости системы (4.63)

#### 4.5. Выводы к разделу

В разделе 4 было введено понятие глобального и локального позиционного синтеза в случае нескольких независимых возмущений для робастных систем с одномерным и многомерным управлением. Получены теоремы о нахождении границы симметричного отрезка изменения возмущений для робастных систем с одномерным и многомерным управлением. Приведен метод решения задачи синтеза для линейной системы в случае многомерного управления, в котором управление берется из более широкого класса, чем предложенное в [13, Теорема 2.3] (Коробов В. И, 2007). Получена оценка сверху на время движения из произвольной начальной точки в начало координат. В [13, Глава 2.3] показано, что матрица  $F_i^{-1}$ , задаваемая формулой (1.20), является положительно определенной. В разделе 4 диссертации доказано, что элементы матрицы  $F_i$ , обратной к матрице  $F_i^{-1}$ , являются положительными. В разделе приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты: решение задачи синтеза для двумерной и трехмерной линейных робастных систем в случае независимых возмущений и одномерного управления, решение задачи синтеза для двумерной и трехмерной линейных систем с многомерным управлением, остановка колебаний управляемого движения системы двух связанных маятников.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена решению задачи синтеза для одного класса линейных систем – задачи построения управления в виде функции от фазовых координат, такого, что траектория системы с этим управлением, начинающаяся в произвольной начальной точке некоторой окрестности начала координат, оканчивается в начале координат в конечный момент времени. При этом управление удовлетворяет заранее заданным ограничениям, что усложняет задачу.

В книге Коробова В. И. [13] (2007) предложены методы решения задачи синтеза для управляемых систем. На основании этого в диссертационной работе предложено решение задачи синтеза для линейной системы с ограниченными неизвестными возмущениями. В диссертации решается следующая задача: найти ограничения на неизвестные возмущения, при которых управление, решающее задачу синтеза для линейной системы без возмущений, решает также задачу синтеза и для возмущенной системы.

Итак, основные результаты данной диссертации таковы:

- построено ограниченное управление, решающее задачу попадания из произвольной начальной точки некоторой окрестности начала координат в начало координат за конечное время для линейных робастных систем при наличии возмущений, построение управления основано на методе функции управляемости В. И. Коробова;
- границы изменения возмущений находятся из условия, что полная производная от функции управляемости в силу возмущенной системы является отрицательной;
- получены границы изменения возмущений в случае вынесения общей функции и одномерного управления для задачи глобального позиционного синтеза и локального позиционного синтеза;

- предложено несколько подходов к определению границ изменения возмущений, доказательство основано на применении теории устойчивости интервальных матриц;
- найден наибольший интервал изменения возмущений в случае вынесения общей функции для задачи глобального позиционного синтеза и локального позиционного синтеза для линейных робастных систем с одномерным управлением. В случае, когда матрица возмущений содержит ненулевые элементы только на главной наддиагонали, синтез будет глобальным, причем границы изменения возмущения зависят от наибольшего и наименьшего собственных значений вспомогательной матрицы. В случае матрицы возмущений общего вида, синтез будет локальным, причем границы изменения возмущения зависят от наибольшего и наименьшего собственных значений вспомогательной матрицы, элементы которой полиномиально зависят от параметра. Для оценки собственных значений этой матрицы применяются теоремы интервального анализа;
- получены границы изменения возмущений в случае нескольких независимых возмущений для задачи глобального позиционного синтеза и локального позиционного синтеза для линейных робастных систем с одномерным управлением;
- получена общая граница изменения возмущений в случае нескольких независимых возмущений для задачи глобального позиционного синтеза и локального позиционного синтеза для линейных робастных систем с многомерным управлением. Граница зависит от спектрального радиуса вспомогательной матрицы и размеров эллипсоида, в котором проводится решение задачи синтеза;
- получены оценки сверху и снизу на время движения из произвольной начальной точки в начало координат;

- приведены механические примеры применения полученных результатов: управление движением материальной точки с учетом неизвестного трения, решение задачи синтеза для робастной колебательной системы, решение задачи синтеза для связанного осциллятора, остановка колебаний управляемого движения системы двух связанных маятников.

Результаты диссертационной работы носят теоретический и практический характер. Её результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении решения задачи позиционного синтеза для робастных систем. В работе предложен метод построения управления конкретным объектом, описываемым данным уравнением. Результаты диссертации могут быть использованы в задачах управляемости и устойчивости механических объектов с неизвестными параметрами.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры / Айзекс Р., Понтрягин Л. С. – М. – Мир. – 1967. – 479 с.
2. Баландин Д. В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Баландин Д. В., Коган М. М. - М. Физматлит., 2007.
3. Бессонов Г. А. Задача устойчивого синтеза ограниченных управлений для некоторого класса нестационарных систем / Бессонов Г. А., Коробов В. И., Скляр Г. М. // Прикладная математика и механика. – 1988. – № 52(1), С. 9-15.
4. Бобылев Н. А. О положительной определенности интервальных семейств симметрических матриц /Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К. // Автомат. и телемех. – 2000.– вып. 8. – С. 5-10.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Гантмахер Ф. Р. – М. – гл. ред. физмат лит, изд-е 2, 1975. – 576 с.
6. Жолен Л. Прикладной интервальный анализ / Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 468 с.
7. Зименко К. А. Устойчивость системы последовательно соединенных интеграторов на конечном интервале времени / Зименко К. А., Поляков А. Е., Ефимов Д. В., Кремлев А. С. // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2015. – Т. 58. – №. 9. – с. 682-686.
8. Коробов В. И. Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем / Коробов В. И. // ДУ. – 1973. – 9, № 4. – С. 614 – 619.
9. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости / Коробов В. И. // Математический сборник. – 1979. – Т. 109(151), № 4(8). – С. 582 – 606.



10. Коробов В. И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости / Коробов В. И. // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 248, № 5. – С. 1051 – 1055.
11. Коробов В. И. Решение задачи синтеза в дифференциальных играх с помощью функции управляемости / Коробов В. И. // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 266, № 2. – С. 269 – 273.
12. Коробов В. И. Решение задачи синтеза для управляемых процессов с возмущениями с помощью функции управляемости / Коробов В. И. // Дифференциальные уравнения, 1987. – Т. 23, № 2. – С. 236–243.
13. Коробов В. И. Метод функции управляемости / Коробов В. И. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 576 с.
14. Коробов В. И. Робастные системы. Синтез ограниченного управления / Коробов В. И., Гавриляко В. М. // Вісн. Харк. унів. Сер. «Матем., прикл. матем. і мех». – 2005. – 711. – Вып. 55. – С. 23-27.
15. Коробов В. И. Функция управляемости в случае многомерного управления / Коробов В. И., Куприянова Т. В. // Вісник Харківського університету, Сер. «Математика, прикладна математика і механіка» - 2004. - № 645. - вип. 54. - С. 153-162.
16. Коробов В. И. Функция управляемости как время движения / Коробов В. И., Куприянова Т. В. // 7 Крым. Межд. мат. школа «Метод функций Ляпунова и его прилож.»: тез докл.; Тавр. национ. ун-т. - Симф., 2004. - С. 76.
17. Коробов В. И. Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума / Коробов В. И., Скляр Г. М. // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 11. – С. 1914 – 1924.

18. Коробов В. И. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов / Коробов В. И., Скляр Г. М. // Мат. сб. – 1987. – 134(176), № 2(10). – С. 186 – 206.
19. Коробов В. И. Решение задачи робастного позиционного синтеза для канонической системы / Коробов В. И., Ревина Т. В. // Доповіді Національної академії наук України, рубрика Математика. - 2015. - №6. - С. 13-18.
20. Коробов В. И. Робастный позиционный синтез для канонической системы / Коробов В. И., Ревина Т. В. // Укр. мат. журн. – 2016. – Т. 68, № 3. – С. 341-356.
21. Коробов В. И. Управление движением материальной точки с учетом неизвестного трения / Коробов В. И., Ревина Т. В. // Механика. Исследования и инновации. – Гомель – 2016. – Вып. 9. – С. 61-66.
22. Красовский Н. Н. Позиционные дифференциальные игры / Красовский Н. Н., Субботин А. И. — М. — Гл. ред. физ-мат лит. — 1974. — 456 с.
23. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / Куржанский А. Б. — М., Гл. ред. физ-мат лит., 1977. — 392 с.
24. Курош А. Г. Курс высшей алгебры/ Курош А. Г. — М., Гл. ред. физ-мат лит., 1968. — 431 с.
25. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / Ляпунов А. М. // [Докт. дис.]. - Х., 1892. - XI, 250 с. Переизд. Общая задача об устойчивости движения (диссертация и статьи). – Directmedia, 2013.

26. Майлыбаев А. А. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике / Майлыбаев А. А., Сейранян А. П. – М. – Физматлит. – 2009, 400 с.
27. Маликов А. И. Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями / Маликов А. И. // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №. 5. – С. 19-36.
28. Мазко А. Г. Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств / Мазко О. Г. // Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. – Т. 102. – Київ, 2016. – 332 с.
29. Мазко А. Г. Стабилизация по измеряемому выходу и оценка уровня гашения возмущений в системах управления / Мазко А. Г., Кусий С. Н. // Нелінійні коливання. – 2015. – Т. 18, № 3. – С. 373-387.
30. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения/ Меркин Д. Р. Учеб. пособие для вузов. - 3-е изд. перераб. и доп. – М., Гл. ред. физ-мат лит., 1987. – 304 с.
31. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб и доп. Т. 1: Матем. модели, динам. характеристики и анализ систем автом. управления/ Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – М.: Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 656 с.
32. Мигулин В. В. Основы теории колебаний / Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. – М.: Наука. – 1978. - 393 с.
33. Поляк Б. Т. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем / Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. // Автоматика и телемеханика. – 1990. – №. 9. – С. 45-54.

34. Поляк Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Поляк Б. Т., Щербаков П. С. – М.: Наука, 2002.– 303 с.
35. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе М.В., Мищенко Е.Ф. – 1961. – 393 с.
36. Постников М. М. Устойчивые многочлены / Постников М. М. – М.: Наука, 1981, 176 с.
37. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры / Прасолов В. В. – М., 2008. 2-е изд. – 536 с.
38. Ревина Т. В. Решение задачи синтеза для линейных систем на основе допустимого принципа максимума / Ревина Т. В. //8 Крым. Межд. мат. школа «Метод функций Ляпунова и его прилож.»: тез докл.; Тавр. национ. ун-т. - Симф.: ДиАйПи, 2006. - С. 145.
39. Ревина Т. В. Численное решение одной задачи синтеза для линейной системы с помощью разрывного управления / Ревина Т. В. //9 Крым. Межд. мат. школа «Метод функций Ляпунова и его прилож.»: тез докл.; Тавр. национ. ун-т. - Симф., 2008. - С. 143.
40. Ревина Т. В. Решение одной задачи синтеза управления для робастных систем на основе метода функции управляемости / Ревина Т. В. // Динам. системы. Таврич. нац. ун-т им. В. И. Вернадского. – Симферополь, 2008. – 25. – С. 83-93.
41. Ревина Т. В. Один метод решения задачи синтеза управления для робастных систем / Ревина Т. В. // «Совр. пробл. матем. и ее прилож.»: тез. докл. межд. конф. – Харьков. – 2011. – С. 165.
42. Ревина Т. В. Решение задачи синтеза управления для одной робастной двумерной системы / Ревина Т. В. // «Совр. пробл. матем. и ее при-

- лож. в естеств. науках и информац. технол.»: тез. докл. межд. конф. – Харьков. – 2012. – С. 91.
43. Ревина Т. В. Решение одной задачи робастного синтеза / Ревина Т. В. // «Совр. проблемы матем., мех. и информ.»: тез. докл. межд. школы-конф. «Тараповские чтения-2013» – Харьков. – 2013. – С. 110.
44. Ревина Т. В. Несколько подходов к определению границ изменения возмущения в задаче глобального робастного синтеза / Ревина Т. В. // Вісн. Харк. унів. Сер. «Матем., прикл. матем. і мех». – 2014. – 1133. – Вып. 70. – С. 140 – 155.
45. Ревина Т. В. Решение задачи робастного позиционного синтеза в случае нескольких возмущений / Ревина Т. В. // «Совр. проблемы естеств. наук»: тез. докл. межд. школы-конф. «Тараповские чтения-2016» – Харьков. – 2016. – С. 65-66.
46. Скляр К. В. Нахождение в явном виде управления и траекторий, решающих задачу управляемости для некоторых нелинейных систем / Скляр К. В. // Вісн. Харк. унів. Сер. «Матем., прикл. матем. і мех». – 1999. – 458, С. 43–52.
47. Скорик В. А. Аналитическое обращение одного семейства плохо обусловленных матриц, возникающих в методе функции управляемости / Скорик В. А. // Вісн. Харк. унів. Сер. «Матем., прикл. матем. і мех». – 1999. – 444, С. 15–23.
48. Стрелков П. С. Механика, 3-е изд., перераб./ Стрелков П. С. – М.: Наука, – 1975. – 560 с.
49. Харитонов В. Л. Асимптотическая устойчивость положения равновесия семейства систем дифференциальных уравнений / Харитонов В. Л. // Дифференц. уравн. – 1978. – Т. 14, № 11. – С. 2086-2088.

50. Хорн Р. А. Матричный анализ / Хорн Р. А., Джонсон Ч. Р. – М.: Наука, – 1989. – 656 с.
51. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем / Черноусько Ф. Л. – М.: Наука, 1988.
52. Черноусько Ф. Методы управления нелинейными механическими системами / Черноусько Ф., Ананьевский И., Решмин С. – М. Физматлит. – 2006, 328 с.
53. Якубович В. А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования / Якубович В. А. // ДАН СССР. – 1962. – Т. 143. – № 6. – С. 1304–1307.
54. Ackermann J. Parameter space design of robust control systems / Ackermann J. // IEEE Trans. on Autom. Control. – 1980. – Vol. 25, no. 6. – pp. 1058-1072.
55. Bartlett A. C. Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges/ Bartlett, A. C., Hollot, C. V., Lin, H. // Math. of Control, Signals and Systems. – 1988. – Vol. 1(1). – pp. 61-71.
56. Barmish B. R. New tools for robustness of linear systems / Barmish B. R. – Macmillan, New York, USA. – 1994.
57. Barmish B. R. Counter example to a recent results on the stability of interval matrices by S. Bialas / Barmish B. R., Hollot C. V. // Int. J. Control. - 1984, Vol. 39, no. 5, pp. 1103-1104.
58. Bialas S. A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices / Bialas S. // Int. J. Contr. – 1983. – Vol. 37, no. 4, pp. 717-722.
59. Bhat S. P. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators / Bhat S. P., Bernstein D. S. // IEEE Trans. on Autom. Control. – 1998. – Vol. 43, no. 5, pp. 678-682.

60. Bhat S. P. Finite-time stability of continuous autonomous systems / Bhat S. P., Bernstein D. S. // *SIAM J. of Control and Optimiz.* – 2000. – Vol. 38, no. 3, pp. 751-766.
61. Boyd S. Linear matrix inequalities in systems and control theory / Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. –1994. –ix, –193 p.
62. Bowong S. Chaos control and duration time of a class of uncertain chaotic systems / Bowong S., Moukam Kakmeni F. M. // *Phys. Lett.* – 2003. – A 316. – pp. 206-217.
63. Cai M. Adaptive finite-time control for uncertain nonlinear systems with application to mechanical systems / Cai M., Xiang Z., Guo J. // *Nonlinear Dynamics.* – 2015. – pp. 1-16.
64. Desoer, C., Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis/ Desoer C., Liu R. W., Murray J., Saeks R. // *IEEE Trans. on Autom. Control.* – 1980. – Vol. 25, no. 3, pp. 399 – 412.
65. Ding S. Global finite-time stabilization of a class of upper-triangular systems / Ding S., Qian C., Li S. // *Proc. of the Amer. Control Conf., Baltimore, MD, USA, 2010.* – pp. 4223-4228.
66. Ding S. Global stabilization of a class of upper-triangular systems with unbounded or uncontrollable linearizations / Ding S., Qian C., Li S., Li Q. // *Intern. J. of Robust and Nonl. Contr.* – 2011. – Vol. 21 (3). – pp. 271-294.
67. Doyle J. C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties / Doyle J. C. // *IEEE Proc. Pt. D: Control Theory and Applic.* –1982, – Vol. 129. – no. 6 – pp. 242-250.

68. Du H. Global finite-time stabilization of a class of nonlinear systems via bounded output feedback controllers / Du H., Qian C., Frye M. T., Li S. // Proc. of the 18-th IFAC World Congress. – Milano, Italy, 2011. – pp. 233-238.
69. Faedo S. Un nuova problema di stabilita per le equazione algebriche a coefficienti reali / Faedo S. // Ann. Scuola Norm. Super. Piza, Ser. sci. fis. e mat. – 1953. – Vol. 7, no. 1-2, pp. 53-63.
70. Fekete M. Über ein Problem von Laguerre / Fekete M., Polya G. // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940). – 1912. – Vol. 34, no. 1, pp. 89-120.
71. Fu M. and Barmish B. R. Maximal unidirectional perturbation bounds for stability of polinomials and matrices / Fu M. Barmish B. R. // Systems & Control Letters. – 1988. – Vol. 11. – pp. 173-179.
72. Franze G. On the stability of interval matrices / Franze G., Carotenuto L., Muraca P. // Proceeding of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusets, USA, – 2004. – pp. 2648-2653.
73. Juang Y. T. Stability analysis of dinamic interval systems / Juang Y. T., Shao C. S. // Int. J. Contr., 1989. – Vol. 49. – pp. 1401-1408.
74. Haimo V. Finite time controllers // SIAM J. on Contr. and Optim., 1986. – Vol. 24, no. 4. – pp. 760-770.
75. Hollot C. V. On the eigenvalues of interval matrices / Hollot C. V., Bartlett A. C. // Proc. 26th IEEE Confer. on Decision and Control, LA,CA, USA. – 1987. – Vol. 26. – pp. 794-799.
76. Hong Y. Finite-time control for robot manipulators / Hong Y., Xu Y., Huang J. // Systems & Control Letters. – 2002. – Vol. 46, no. 4. – pp. 243-253.



77. Hong Y. Finite-time stabilization of nonlinear systems with parametric and dynamic uncertainties / Hong Y. // IEEE Trans. on Autom. Control. – 2006. – Vol. 51, no. 12. – pp. 1950–1956.
78. Karlin S. Total positivity / Karlin S. — Stanford University Press. – 1968. — Vol. 1. - 576 p.
79. Katkova O. M., Vishnyakova A. M. A sufficient condition for a polynomial to be stable / Katkova O. M., Vishnyakova A. M. // J. of Math. An. and Appl. – 2008. – Vol. 347, no.1. – pp. 81-89.
80. Korobov V. I. The controllability function as the time of motion / Korobov V. I., Kupriyanova T. V. // First Karazin scientific readings. Book of abstracts. Kharkiv: Karazin Kharkiv National University. – 2004. – pp. 17-18.
81. Korobov V. I. Global properties of the triangular systems in the singular case / Korobov V. I., Pavlichkov S. S. // J. of Math. Anal. and Appl. – 2008. – Vol. 342(2). – pp. 1426-1439.
82. Korobov V. I. Global positional synthesis and stabilization in finite time of MIMO generalized triangular systems by means of the controllability function method / Korobov V. I., Pavlichkov S. S., Schmidt W. H. // J. of Math. Sciences. – 2013. – Vol. 189(5). – pp. 795-804.
83. Korobov V. I. Robust feedback synthesis problem for systems with a single perturbation / Korobov V. I., Revina T. V. // Communications in Mathematical Analysis. – 2014. – Vol. 17, no. 2. – pp. 217 – 230.
84. Korobov V. I. Feedback control for a robust canonical system / Korobov V. I., Revina T. V. // III International conference «ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS»: Book of abstracts. - Kharkiv: B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU. - 2015. - p. 26.

85. Korobov V. I. On robust feedback synthesis for systems with multidimensional control / Korobov V. I., Revina T. V. // Preprint arXiv.org, Cornell University Library, 2 Nov 2016. – 19 p. – (Available at <http://arxiv.org/abs/1611.00581>).
86. Korobov V. I. Synthesis of restricted inertial controls for systems with multivariate control / Korobov V. I., Skorik V.O. // J. of Math. Anal. and Appl. – Nov. 2002. – 275, no. 1. – pp. 84-107.
87. Korobov V. I. Construction of Restricted Controls for a Non-equilibrium Point in Global Sense / Korobov V. I., Skorik V.O. // – Vietnam Journal of Mathematics. – 2015. – 43, no. 2, pp. 459 – 469.
88. Mera M. Finite-time attractive ellipsoid method: implicit Lyapunov function approach / Mera M., Polyakov A., Perruquetti W. // Intern. J. of Control. – 2016. – Vol. 89, Iss. 6. – pp. 1079-1090.
89. Nemirovskii A. A. Several NP-hard problems arising in robust stability analysis / Nemirovskii A. A. // Math. Contr. Sig. Syst., 1993, no. 6, pp. 99-105.
90. Ovseevich A. A local feedback control bringing a linear system to equilibrium / Ovseevich A. // J Optim Theory Appl. – 2015. – Vol. 165. – pp. 532-544.
91. Polyakov A. Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach / Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. // Automatica. – 2015. – Vol. 51. – pp. 332-340.
92. Praly L. Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate / Praly L. // IEEE Trans. on Autom. Control. – 2003. – Vol. 48. – no. 6. – pp. 1103-1108.
93. Revina T. V. One method of synthesis problem numeral solution for the linear systems / Revina T. V. // Lyapunov memorial conference. Book of

- abstracts. - Kharkiv: Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU. - 2007. - pp. 127.
94. Revina T. V. Robust feedback synthesis problem for a system with two perturbations / Revina T. V. // II International conference «ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS II»: Book of abstracts. - Kharkiv: B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU. – 2014. – p. 39.
95. Revina T. V. Robust feedback synthesis for a disturbed canonical system / Revina T. V. // International conference «Dynamical systems and their applications»: Book of abstracts. – Kyiv, National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Mathematics. – 2015. – p. 47.
96. Revina T. V. On robust feedback synthesis for the perturbed double integrator / Revina T. V. // IV International Conference «ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS»: Book of abstracts, Kharkiv: B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NASU, 2016. – pp. 28-29.
97. Revina T. V. On robust feedback synthesis for the system of two coupled pendulums / Revina T. V. // International conference «DIFFERENTIAL EQUATIONS and CONTROL THEORY»: Book of abstracts, Kharkiv: V. N. Karazin Kharkiv National University, 2016. – pp. 27.
98. Rodoumta K. Construction of bounded feedback by the controllability function method / Rodoumta K., Bowong S. // Appl. Math. Sci. – 2007. – Vol. 1, no. 6. – pp. 267-279.
99. Rohn J. Stability of interval matrices: the real eigenvalue case / Rohn J. // IEEE Trans. on Autom. Control. – 1992. –Vol. 37 – no. 10. – pp. 1604-1605.

100. Rohn J. Positive definiteness and stability of interval matrices / Rohn J. // SIAM J. Matrix anal. appl. – 1994. – Vol. 15, no. 1. – pp. 175-184.
101. Rohn J. Bounds on eigenvalues of interval matrices / Rohn J. //Z. angew. Math. Mech. – 1998. – Vol. 78. – Iss. S3 – pp. 1049–1050.
102. Rohn J. A Handbook of Results on Interval Linear Problems / Rohn J. – Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic, European Union. – 2005. – 80 p.
103. Rothig A. On stabilizing linear systems with input saturation via soft variable structure control laws / Rothig A., Adamy J. // Systems & Control Letters. – 2016. – Vol. 89. – pp. 47-54.
104. Roxin E. On finite stability in control systems / Roxin E. //Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. — 1966. — Vol. 15, no. 3. – C. 273-282.
105. Ryan E. P. Finite-time stabilization of uncertain nonlinear planar systems/ Ryan E. P. – Mechanics and Control. Springer Berlin Heidelberg. – 1991. – pp. 406 – 441.
106. Safonov M. G. A multiloop generalization of the circle criterion for stability margin analysis / Safonov M. G., Athans M. // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1981. – Vol.26, no. 2. – pp. 415-422.
107. Schwappe F. C. Uncertain dynamic systems/ Schwappe F. C.– Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. – 1973.
108. Shalaby M. A. The interval eigenvalue problem: Review article / Shalaby M. A. – European Congress on Comput. Methods in Appl. Sciences and Engineering, 2000 Barcelona, 31 p.
109. Sklyar G. M. On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class  $C1$  / Sklyar G. M., Sklyar K. V., Ignatovich S. Y. // Systems & Control letters. – 2005. – Vol. 54(11). – pp. 1097-1108.

110. Soh C. B. Parameter space approach to control problems/ Soh C. B. – PhD Dissertation, Ch. 5. Dept. Elect. Engineering, Monash Univ, Clayton, Victoria, Australia, 1986.
111. Soh C. B. Necessary and sufficient conditions for stability of symmetric interval matrices / Soh C. B. // Intern. J. of Contr. – 1990. – Vol. 51 – no.1. – pp. 243-248.
112. Su Y. Robust finite-time output feedback control of perturbed double integrator / Su Y., Zheng C. // Automatica. – 2015. – Vol. 60. – pp. 86-91.
113. Sun Z. A new approach to finite-time adaptive stabilization of high-order uncertain nonlinear system / Sun Z., Xue L.-R., Zhang K. // Automatica. – 2015. – 58. – pp. 60-66.
114. Wang X. Global finite-time stabilization of second-order systems subject to mismatched disturbances with application to consensus / Wang X., Li S., Du H. // Proceedings of the 34th Chinese Control Conf., Hangzhou, China, 2015. – pp. 7557-7562.
115. Wang K. Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices / Wang K, Michel A, Liu D. // IEEE Trans. on Automatic Control, 1994. – Vol. 39, no. 6. – pp. 1251-1255.
116. Weiss L. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces / Weiss L., Infante E. F. //IEEE Trans. on Automatic Control. – 1967, no. 12(1). – pp. 54-59.