Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Шань Марія Олексіївна

УДК 517.956.4

УСУВНІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ АНІЗОТРОПНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Донецькому національному університеті імені Василя Стуса Міністерства освіти і науки України, м. Вінниця.

Науковий керівник: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, доцент
Скрипнік Ігор Ігорович,
Інститут прикладної математики і механіки
НАН України (м. Слов'янськ),
директор.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Шепельський Дмитро Георгійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б. І. Вєркіна НАН України (м. Харків),
провідний науковий співробітник відділу
математичної фізики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Бокало Микола Михайлович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка МОН України,
професор кафедри диференціальних рівнянь.

Захист дисертації відбудеться 20 грудня 2019 р. о 16.40 на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4, ауд. 6-49.

З дисертацією можна ознайомитися у Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Автореферат розісланий ___ ________ 2019 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради С. Ю. Ігнатович

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Задача про усувність особливостей розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних привертає увагу великої кількості науковців. Сформулювати її можна наступним чином. Нехай функція u є розв'язком деякого рівняння на відкритій підмножині Ω в R^n за виключенням однієї точки. Задача полягає в тому, щоб продовжити функцію u на всю множину Ω, щоб нова функція $\tilde{u}$ задовольняла цьому ж рівнянню на всій множині Ω. Перша теорема усувності особливості була отримана Ріманом. У своїй докторській дисертації він встановив усувність ізольованої особливості в точці x^0 для гармонічної функції двох дійсних змінних при умові, що модуль градієнту функції веде себе як $o(|x-x^0|^{-1})$, коли $x \to x^0$.

Довгий час проблема усувності особливостей вивчалась тільки для лінійних рівнянь та радіальних розв'язків рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q. Значні результати для цих рівнянь були отримані М. Пікардом, М. Гевреєм, М. Бочером, Д. Гілбаргом, Дж. Серріном, А. Соммерфелдом, С. Чандрасекаром, Е. Хіллем та іншими. Поштовхом для подальшого розвитку теорії усувності ізольованих особливостей стала робота Дж. Серріна, який отримав у 1965 році умови усувності сингулярностей для квазілінійних еліптичних рівнянь з дивергентною головною частиною. Різкий розвиток теорії нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних у 80-х роках спричинив ще один прорив - дослідження нерадіальних сингулярних розв'язків рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q, який був ініційований Б. Гідасом, Д. Спарком, П. Л. Ліонсом та Л. Вероном. Після цього було опубліковано багато статей з урахуванням різних аспектів задачі сингулярності для вищезазначених рівнянь, а також для еволюційного рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q. Серед науковців, які отримали вагомі результати, можна відмітити Х. Брезіса, Д. Васкеса, Л. Верона, Л. Ніренберга, П. Бараса. Що стосується нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь, то перші значні результати усувності особливостей пов'язані з Х. Брезісом, А. Фрідманом, С. Каміном, Л. Пелет'єром, В. А. Галактіоновим, С. П. Курдюмовим, А. А. Самарським та ін.

Останнім часом спостерігається зацікавленість до вивчення розв'язків анізотропних еліптичних та параболічних рівнянь, які застосовуються в моделюванні нелінійних фізичних процесів. Для цих рівнянь якісна теорія ще не побудована, тому доцільним є їх дослідження.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь в околі сингулярної точки. Модельними випадками таких рівнянь є рівняння анізотропного пористого середовища (1), зокрема з абсорбцією (2) та градієнтною абсорбцією (3):

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \left(u^{m_i-1} u_{x_i}\right)_{x_i} = 0, \tag{1}$$

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \left(u^{m_i-1} u_{x_i}\right)_{x_i} + f(u) = 0, \tag{2}$$

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \left(u^{m_i-1} u_{x_i}\right)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{q_i} = 0, \tag{3}$$

де частина показників $m_i < 1, i = \overline{1, s}$ (сингулярний випадок), а інша частина $m_i > 1, i = \overline{s+1, n}$ (вироджений випадок).

Також розглянуто подвійно нелінійне анізотропне параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \left(u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}\right)_{x_i} + f(u) = 0, \tag{4}$$

де $m_i > 1, p_i \geqslant 2, i = \overline{1, n}$.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано на кафедрі математичного аналізу і диференціальних рівнянь факультету математики та інформаційних технологій Донецького національного університету імені Василя Стуса у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри та в рамках державних науково-дослідних робіт:

- НДР «Метричні простори, гармонічний аналіз функцій і операторів, сингулярні та некласичні задачі для диференціальних рівнянь», номер державної реєстрації - 0115U000136;

- НДР «Властивості сингулярних розв'язків диференціальних рівнянь, спектральний аналіз різницевих систем та моделювання нелінійних процесів», номер державної реєстрації - 0118U003138.

А також частково у відділі нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики та механіки НАН України у відповідності до тематики пріоритетних досліджень відділу.

НДР «Регулярність та точні поточкові оцінки сингулярних розв'язків квазілінійних еліптичних та параболічних рівнянь структури дифузії-сильної нелінійної абсорбції», що фінансувалась Державним фондом фундаментальних досліджень згідно договорів:

№ Ф71/66-2016 від 12.07.2016 р., номер державної реєстрації - 0116U007160, термін виконання: липень - грудень 2016 року;

№ Ф71/42-2017 від 11.05.2017 р., номер державної реєстрації - 0117U006053, термін виконання: травень - жовтень 2017 року.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження асимтотичної поведінки розв'язків анізотропних параболічних рівнянь, встановлення для них умов усувності особливостей, отримання поточкових оцінок та оцінок типу Келлера-Оссермана.

Завдання дослідження:

- розвинути метод точних поточкових оцінок розв'язків типу "нелінійного потенціалу" для дослідження слабких розв'язків анізотропних параболічних рівнянь;
- дослілити поведінку розв'язків анізотропних параболічних рівнянь в околі особливості;
- отримати оцінки типу Келлера-Оссермана для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з абсорбцією і градієнтною абсорбцією;
- встановити умови усувності особливостей для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь в околі особливості;
- побудувати і застосувати спеціальні пробні функції, використовуючи структурні особливості рівняння та раніше наробленi приклади, таким чином, щоб доведення основних результатів не залежало від показників анізотропії m_i.

Об'єкт дослідження – анізотропні параболічні рівняння з дивергентною головною частиною (зокрема рівняння з абсорбційним членом).

Предмет дослідження – точні поточкові оцінки та оцінки типу Келлера-Оссермана для розв'язків анізотропних параболичних рівнянь (зокрема рівнянь з абсорбційним членом), умови усувності особливостей для цих розв'язків.

Методи дослідження. Для вирішення поставлених задач у дисертаційній роботі використано ітераційну техніку Де Джорджі, метод локальних енергетичних оцінок, метод точних поточкових оцінок розв'язків типу "нелінійного потенціалу", який був запропонований І. В. Скрипніком для еліптичних дивергентних квазілінійних рівнянь, розвинутий І. І. Скрипніком для параболічних рівнянь та адаптований в поданій роботі для анізотропних параболічних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі досліджено розв'язки анізотропних параболічних рівнянь, як було зазначено вище, модельними випадками яких є рівняння анізотропного пористого середовища, зокрема з абсорбційним потенціалом. Важливим моментом є те, що в рівняннях (1) - (3) частина показників $m_i < 1$, а інша частина $m_i > 1$. Зазвичай у літературі ці два випадки розглядаються окремо, для кожного випадку вводяться свої означення розв'язку і проводяться окремі доведення при дослідженні якісних властивостей розв'язків, навіть в ізотропному випадку ($m_1 = m_2 = ... = m_n$). В дисертаційній роботі вдалося знайти універсальний підхід в дослідженнях властивостей розв'язків анізотропного рівняння пористого середовища, який не залежить від значень показників анізотропії m_i. А саме в роботі було введено одне означення слабкого розв'язку і проведено одне доведення для обох випадків одночасно та отримані такі результати:

- отримано достатню умову усувності ізольованих особливостей розв'язків анізотропних параболічних рівнянь;
- отримано оцінки типу Келлера-Оссермана для подвійно нелінійного анізотропного параболічного рівняння з абсорбційним членом, який залежить тільки від розв'язку;
- отримано оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропних параболічних рівнянь з абсорбційним членом $f(u)$;
- отримано оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропних параболічних рівнянь з градієнтною абсорбцією;
- отримано нерівність Гарнака зі сталою, яка не залежить від розв'язку, для нелінійного параболічного рівняння з абсорбційним членом;
- отримано достатню умову усувності ізольованих особливостей для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з абсорбційним членом вигляду u^q;
- отримано достатню умову усувності ізольованих особливостей для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з градієнтним абсорбційним членом.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Важливим є те, що знайдено універсальний підхід дослідження розв'язків анізотропних параболічних рівнянь, який не залежить від показників анізотропії. Отримані результати можуть слугувати підґрунтям для проведення подальших наукових досліджень у відповідній проблематиці та можуть бути використані при розробці, читанні курсів для підготовки фахівців з диференціальних рівнянь, математичної фізики, а також суміжних напрямків.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковому керівникові. Зі статей, які опубліковані у співавторстві, у дисертацію включені лише ті результати, які належать автору. А саме: роботи [4], [6], написані у співавторстві з науковим керівником, особистий внесок здобувача у статті [4] - це Proposition 1.3, Proposition 1.4, Theorem 1.2, Theorem 1.4., у роботі [6] науковому керівнику належить постановка задачі та загальний план дослідження. Решта результатів отримано автором дисертації самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації були представлені на конференціях всеукраїнського та міжнародного рівнів: Міжнародній конференції з Диференціальних рівнянь, присвяченій 110 - річчю Я.Б. Лопатинського (Львів, 2016); V Міжнародній конференції з Диференціальних рівнянь та їх застосувань для молодих вчених імені Я.Б. Лопатинського (Київ, 2016); XVII Міжнародній науковій конференції з диференціальних рівнянь "Єругінські читання-2017"(Мінськ, 2017); Міжнародній конференції з Диференціальних рівнянь, математичної фізики та застосувань (Черкаси, 2017); науковій конференції професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів вищої освіти за підсумками науково-дослідної роботи за період 2015-2016 рр., присвяченій 80-річчю Донецького національного університету (Вінниця, 2017); Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 2018); Міжнародному конгресі математиків, 1-9 серпня (Ріо-де-Жанейро, Бразилія, 2018); Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" (Чернівці, 2018); науковій конференції "Сучасний аналіз і нелінійні граничні задачі" , присвяченій 80-річчю проф. Б.В. Базалія, 17-19 жовтня (Слов’янськ, 2018); VI Міжнародній Школі-Семінарі з Диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я.Б. Лопатинського, 18-20 червня (Вінниця, 2019); Міжнародній математичній літній школі "Прикладні математичні задачі в геофізиці" , (Четраро, Італія, 2019).

В цілому дисертація доповідалась на семінарі кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь факультету математики та інформаційних технологій Донецького національного університету імені Василя Стуса (лютий 2018 р.), а також на науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь та геометрії (керівник - проф. Є. Я. Хруслов) Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України (березень 2018 р.) та науковому семінарі відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики (керівник - доц. І. І. Скрипнік) Інституту прикладної математики та механіки НАН України (червень 2018 р.).

Публікації. Результати дисертаційної роботи повною мірою відображено в 16 наукових працях, з них 5 статтей надруковані у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз [2]-[6], 1 стаття опублікована у фахововому виданні України [1], з яких чотири написано без співавторів, і в тезах виступів [7]-[16] на 10 конференціях. Робота пройшла необхідну апробацію на наукових семінарах та міжнародних конференціях.

Структура та обсяг дисертації Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків до дисертації, списку використаних джерел, який містить 102 найменування, та 1 додатку. Повний обсяг роботи – 144 сторінки.

Обсяг основної частини дисертації – 111 сторінок. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 19 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, завдання, об'єкт та предмет дослідження, вказано методи дослідження, сформульовано наукову новизну, теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячено огляду та аналізу літератури.

Бурхливий розвиток теорії усувності ізольованих особливостей починається у 1960-х роках у зв'яку з виходом роботи Дж. Серріна, який отримав умови усувності сингулярностей для квазілінійних еліптичних рівнянь дивергентного вигляду. Адже до цього часу об'єктом дослідження були тільки лінійні рівняння та рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q і при цьому розглядались лише радіальні розв'язки цих рівнянь. Різкий розвиток теорії нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних у 80-х роках спричинив ще один прорив - дослідження нерадіальних сингулярних розв'язків рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q, який був ініційований Б. Гідасом, Д. Спарком, П. Л. Ліонсом та Л. Вероном. Після цього було опубліковано багато статей з урахуванням різних аспектів задачі сингулярності для вищезазначених рівнянь, а також для еволюційного рівняння Лапласу з абсорбційним членом або джерелом вигляду u^q. Серед науковців, які отримали вагомі результати, можна відмітити Х. Брезіса, Д. Васкеса, Л. Верона, Л. Ніренберга, П. Бараса. Що стосується нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь, то перші значні результати усувності особливостей пов'язані з Х. Брезісом, А. Фрідманом, С. Каміном, Л. Пелет'єром, В.А. Галактіоновим, С.П. Курдюмовим, А.А. Самарським та ін. Останніми десятиліттями зростає зацікавленість до анізотропних параболічних та еліптичних рівнянь завдяки їхньому застосуванню в моделюванні нелінійних фізичних процесів, що відбуваються у неоднорідних середовищах.

Вищезазначені результати і деякі інші, які висвітлені в даному розділі, отримані для рівнянь, для яких якісна теорія здобула повноту й завершеність. Водночас, для анізотропних параболічних рівнянь, які є об'єктом дослідження дисертаційної роботи, залишається багато нерозв'язаних питань, зокрема усувність ізольованих особливостей розв'язків, при цьому дослідження цього питання ускладнюється тим, що точний вигляд фундаментального розв'язку для таких рівнянь невідомий.

Під час огляду літератури було визначено актуальні напрямки досліджень та важливі відкриті проблеми у цій галузі, сформульовано мету роботи.

Другий розділ присвячено вивченню локальної поведінки розв'язків в околі особливості квазілінійного параболічного рівняння в дивергентному вигляді

$$u_t - \operatorname{div} A(x,t,u,\nabla u) = b(x,t,u,\nabla u), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{5}$$

які задовольняють початкову умову

$$u(x,0) = 0 \qquad x \in \Omega \setminus \{x^0\}, \tag{6}$$

де $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$, Ω обмежена область в R^n, $x^0 \in \Omega$, $0 < T < \infty$, $n \geqslant 3$.

На коефіцієнти рівняння $A : \Omega_T \times R \times R^n \longrightarrow R^n$ і $b : \Omega_T \times R \times R^n \longrightarrow R^n$ будемо накладати наступні умові

- $A(\cdot,\cdot,u,\varsigma)$, $b(\cdot,\cdot,u,\varsigma)$ є вимірними за Лебегом для усіх $u \in R, \varsigma \in R^n$;
- $A(x,t,\cdot,\cdot)$, $b(x,t,\cdot,\cdot)$ неперервні для майже усіх точок $(x,t) \in \Omega_T$, $A = (a_1, a_2, ...a_n)$;
-

$$a_i(x,t,u,\varsigma)\varsigma \geqslant \nu_1 \sum_{i=1}^{n} |u|^{m_i - 1} |\varsigma_i|^2, \tag{7}$$

$$|a_i(x,t,u,\varsigma)| \leqslant \nu_2 |u|^{\frac{m_i-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |u|^{m_j-1} |\varsigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ \ i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

$$|b(x,t,u,\varsigma)| \leqslant \nu_2 |u|^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |u|^{m_j-1} |\varsigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

де ν_1, ν_2 додатні сталі.

Будемо вважати, що показники рівняння задовольняють нерівностям

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} m_i > 1 - \frac{2}{n}, \ \ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} m_i < m + \frac{2}{n}, \tag{10}$$

де $m = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.

Введемо позначення

$$D(r) = \left\{ (x,t) \in \Omega_T : \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i - x_i^0|}{r^{k_i}} \right)^2 + \frac{t}{r^k} \leqslant 1 \right\}, \tag{11}$$

де

$$k = n(m-1)+2, \quad k_i = \frac{2+n(m-m_i)}{2}. \tag{12}$$

Результат усувності сформулюємо в термінах поведінки функції

$$M_u(r) = \operatorname{ess\,sup}\{\mid u(x,t) \mid : (x,t) \in D(R_0) \setminus D(r)\}, \tag{13}$$

де R_0 достатньо маленьке фіксоване додатнє число: $D(R_0) \subset \Omega_T$. Відмітимо, що для будь-якого $r > 0$ функція $M_u(r)$ є скінченним числом[1].

Перед тим, як дати означення слабкого розв'язку задачі (5), (6), введемо означення простору.

Означення 2.1 Через $V_m(\Omega_T)$ будемо позначати клас функцій $C(0,T,L^2(\Omega))$, для елементів якого має місце нерівність $\sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_T} \mid \cdot \mid^{m_i-1} \left| \dfrac{\partial \cdot}{\partial x_i} \right|^2 dxdt < \infty$.

Означення 2.2 Під слабким розв'язком задачі (5), (6) будемо розуміти функцію $u \geqslant 0$, яка задовольняє включенню $u\psi \in V_m(\Omega_T) \cap L^2(0,T,W^{1,2}(\Omega))$ і для якої виконується інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\Omega} u(x,\tau)\varphi\psi dx - \int\limits_{0}^{\tau} \int\limits_{\Omega} u \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial t} dxdt +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{0}^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega} a_i\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_i} dxdt - \int\limits_{0}^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega} b\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \varphi\psi\, dxdt = 0 \tag{14}$$

для будь-якого $\tau \in (0,T)$, для будь-якої пробної функції $\varphi \in V_m(\Omega_T) \cap L^2(0,T,\overset{o}{W}{}^{1,2}(\Omega))$ й для будь-якої функції $\psi \in C^1(\overline{\Omega_T})$, яка обертається в 0 в околі точки $(x^0,0)$.

Означення 2.3 Будемо казати, що слабкий розв'язок u має усувну особливість в точці $(x^0,0)$, якщо інтегральна тотожність (14) має місце для функції $\psi \equiv 1$.

Головним результатом розділу є така теорема.

Теорема 2.1 Нехай виконані умови (7)-(10) і u є слабким розв'язком задачі (5), (6). Якщо виконується наступна умова

$$\lim_{r \to 0} M_u(r) r^n = 0, \tag{15}$$

тоді особливість розв'язку u в точці $(x^0,0)$ є усувною.

---

[1] Kolodij I.M. On boundedness of generalized solutions of parabolic differential equations / I.M. Kolodij // Vestnik Moskov. Gos. Univ. – 1971. – Vol. 5. – P. 25–31.

У **третьому розділі** досліджено слабкі розв'язки анізотропних параболічних рівнянь з абсорбцією і градієнтною абсорбцією, для яких отримано поточкові верхні оцінки, які записані в термінах відстані до межі області. Такі оцінки називаються оцінками типу Келлера-Оссермана, вони відіграють важливу роль у теорії існування або неіснування великих розв'язків, у проблемах усувності особливостей. Всі відомі оцінки такого типу пов'язані з рівняннями, для яких існують деякі порівняльні властивості. Анізотропні еліптичні та параболічні рівняння були об'єктом дослідження невеликої кількості робіт, оскільки загалом такі властивості для них не мають місце. Незважаючи на відсутність принципу порівняння, нам вдалося отримати оцінки типу Келлера-Осермана для розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь, модельними випадками яких є подвійно нелінійне анізотропне параболічне рівняння з абсорбцією, анізотропне рівняння пористого середовища з абсорбцією та градієнтною абсорбцією, за допомогою яких встановлено нерівність Гарнака у цьому розділі та умови усувності особливості в наступному розділі.

У **підрозділі 3.1** розглянуто подвійно нелінійне параболічне рівняння з абсорбційним членом, який залежить тільки від розв'язку

$$u_t - \mathrm{div} A(x,t,u,\nabla u) + a_0(u) = 0,\ (x,t) \in \Omega_T, \tag{16}$$

де $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega-$ обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty, n \geqslant 2$.

На коефіцієнти рівняння $A = (a_1, ..., a_n)$ і a_0 накладені наступні умови:

- $A = (a_1, ..., a_n)$ і a_0 задовольняють умові Каратеодорі;
- $$A(x,t,u,\xi)\xi \geqslant \nu_1 \sum_{i=1}^{n} |u|^{(m_i-1)(p_i-1)} |\xi_i|^{p_i},$$
$$|a_i(x,t,u,\xi)| \leqslant \nu_2 u^{\frac{(m_i-1)(p_i-1)}{p_i}} \left(\sum_{j=1}^{n} |u|^{(m_j-1)(p_j-1)} |\xi_j|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p_i}},\ i = \overline{1,n}, \tag{17}$$
$$a_0(u) \geqslant \nu_1 f(u),$$
  де ν_1, ν_2 додатні сталі , $f(u)-$ неперервна, додатня функція та для показників m_i, p_i справедливі нерівності
$$2 \leqslant p_1 \leqslant ... \leqslant p_n, \min_{1\leqslant i \leqslant n} m_i > 1, \max_{1\leqslant i \leqslant n} m_i(p_i-1) \leqslant 1 + \frac{\kappa}{n},\ p < n, \tag{18}$$
  де $\kappa = n(p(m-d)-1)+p,\ d = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{m_i}{p_i}$.

Не втрачаючи спільності, будемо вважати, що $m_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} m_i$.

Введемо необхідні означення.

Означення 3.1 Будемо казати, що функція φ належить простору $V_{p,m}(\Omega_T)$, якщо $\varphi \in C(0,T,L^2(\Omega))$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_T} |\varphi|^{(m_i-1)(p_i-1)} |\varphi_{x_i}|^{p_i}\, dxdt < \infty$.

Означення 3.2 Будемо казати, що u слабкий розв'язок рівняння (16), якщо $u \in V_{p,m}(\Omega_T) \cap L^p(0,T,W^{1,\overline{p}}(\Omega))$ і для будь-якого інтервалу $(t_1,t_2) \subset (0,T)$ справедлива інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\Omega} u\varphi\, dx\Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} \{-u\varphi_t + A(x,t,u,\nabla u)\nabla\varphi + a_0(u)\varphi\}\, dx\, dt = 0 \tag{19}$$

для всіх $\varphi \in W^{1,p}(0,T,L^p(\Omega)) \cap L^p(0,T,\overset{o}{W}{}^{1,\overline{p}}(\Omega))$.

Для формулювання головного результата введемо наступні позначення. Зафіксуємо довільну точку $(x^0,t^0) \in \Omega_T$ для будь-яких $\tau,\theta_1,\theta_2,...,\theta_n > 0$, $\theta = (\theta_1,...,\theta_n)$ визначимо циліндри $Q_{\theta,\tau}(x^0,t^0) := \{(x,t) : |t-t^0| < \tau,\ |x_i - x_i^0| < \theta_i,\ i = \overline{1,n}\}$ і позначимо $M_u(\theta,\tau) := \sup\limits_{Q_{\theta,\tau}(x^0,t^0)} u$, $\delta(\theta,\tau) := \sup\limits_{Q_{\theta,\tau}(x^0,t^0)} \delta(u)$, $\Phi(\theta,\tau) := \sup\limits_{Q_{\theta,\tau}(x^0,t^0)} \Phi(u)$, $\Phi(u) = \int\limits_0^u g(s)ds$, $g(s) = s^{m_n-1}f(s)$, $F(u) = \int\limits_0^u f(s)ds$.

Теорема 3.1 Нехай виконані умови (17), (18) і u невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (16), припустимо також, що $f \in C^1(R^1_+)$ і $f'(u) \geqslant 0$. Зафіксуємо точку $(x^0,t^0) \in \Omega_T$ і нехай стала $\sigma \in (0,1)$, $\tau \in (0, \min(\theta_n^{p_n}, t^0, T-t^0))$, $\theta_i \in (0,\theta_n)$ для $i \in I' = \{i = \overline{1,n} : m_i(p_i-1) < m_n(p_n-1)\}$ і $\theta_i = \theta_n$ для $i \in I'' = \{i = \overline{1,n} : m_i(p_i-1) = m_n(p_n-1)\}$. Тоді існують додатні сталі c_1, c_2, які залежать лише від $n,\nu_1,\nu_2,m_1,...,m_n,p_1,...,p_n$, що виконується

$$u(x^0,t^0) \leqslant (\tau^{-1}\rho^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}} + \sum_{i\in I'} (\theta_i^{-1}\theta_n^{\frac{p_n}{p_i}})^{\frac{p_i}{m_n(p_n-1)-m_i(p_i-1)}}, \tag{20}$$

або

$$\Phi(\sigma\theta,\sigma\tau) \leqslant c_1(1-\sigma)^{-c_2}\theta_n^{-p_n}\delta(\theta,\tau)M_u^{m_np_n-1}(\theta,\tau). \tag{21}$$

У випадку, коли I' пуста множина, тобто $m_1(p_1-1) = m_2(p_2-1) = ... = m_n(p_n-1)$, або справедлива оцінка

$$u(x^0,t^0) \leqslant (\tau^{-1}\theta_n^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}}, \tag{22}$$

або (20) має місце.

Цікаво отримати більш точну верхню оцінку розв'язків. Для цього скористаємося наступною додатковою умовою. Будемо казати, що неспадна неперервна функція ψ задовольняє умові (A), якщо для будь-якого $\varepsilon \in (0,1)$ існує таке значення $u_0(\varepsilon) \geqslant 1$, що справедлива нерівність

$$\psi(\varepsilon u) \leqslant \varepsilon^{\mu}\psi(u), \tag{A}$$

з деякою сталою $\mu > 0$ і для всіх $u \geqslant u_0(\varepsilon)$.

Твердження 3.1 Нехай виконані умови (17), (18) і u невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (16), $f \in C^1(R^1_+)$ та $f'(u) \geqslant 0$. Нехай $\partial\Omega_T$ параболічна межа області Ω_T, припустимо, що $\lim\limits_{(x,t)\to\partial\Omega_T} u(x,t) = +\infty$ і має місце нерівність з деякими сталими $0 \leqslant a \leqslant 1$, $c > 0$

$$\delta(u) = \frac{F(u)}{f(u)} \leqslant c\, u^a. \tag{23}$$

Нехай $\psi(u) = u^{-1}\Phi^{\frac{1}{m_n p_n + a - 1}}(u)$ задовольняє умові (A), $(x^0, t^0) \in \Omega_T$ і $8\rho = dist(x^0, \partial\Omega)$. Зафіксуємо $\tau \in (0, \min(\rho^{p_n}, t^0, T - t^0))$ і $\theta_i \in (0, \rho)$ для $i \in I'$, тоді існує така додатня стала c_3, яка залежить тільки від відомих параметрів $n, \nu_1, \nu_2, m_1, ..., m_n, p_1, ..., p_n$, що або справедлива нерівність (21), або наступна оцінка має місце

$$\Phi(u(x^0, t^0)) \leqslant c_3 \theta_n^{-p_n} u^{m_n p_n + a - 1}(x^0, t^0). \tag{24}$$

З іншого боку, якщо множина I' пуста, тобто $m_1(p_1 - 1) = m_2(p_2 - 1) = ... = m_n(p_n - 1)$ і $\psi(u) = u^{-1}\Phi^{\frac{1}{m_n p_n + a - 1}}(u)$ задовольняє умові (A), тоді або виконується оцінка (22), або (24).

Приклад 3.1 Першим приклад функції f, яка задовольняє умовам твердження 3.1, є $u^q, q > m_n(p_n - 1)$ з $a = 1$. Припустимо для простоти, що $\mathrm{dist}(x^0, \partial\Omega) = |x^0|$, з нерівностей (20), (24) виводимо, що справедлива оцінка

$$u(x^0, t^0) \leqslant c \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^0|^{\frac{p_i}{q - m_i(p_i - 1)}} + (t^0)^{\frac{1}{q-1}} \right)^{-1}.$$

У випадку, коли $m_1 = m_2 = ... = m_n = 1$ нерівність була отримана І.І. Скрипніком[2].

Приклад 3.2 Наведемо ще один приклад функції f, яка задовольняє умовам твердження 3.1. Це експоненціальна функція: $f(u) = e^u$ з $a = 0$. Будемо вважати, що $(8\rho)^{p_n} = |x^0|^{p_n} + t^0$, тоді з (20), (24) отримаємо оцінку

$$u(x^0, t^0) \leqslant c |\ln(|x^0|^{p_n} + t^0)|.$$

---

[2]Skrypnik I.I. Removability of isolated singularity for anisotropic parabolic equations with absorption / I.I. Skrypnik // Manuscr. Math. — 2013. — Vol. 140. — P. 145—178.

Для анізотропного випадку ця оцінка є новою.

Твердження 3.2 Нехай виконані умови (17), $m_1 = m_2 = ... = m_n = 1$, $2 < p = p_1 = p_2 = ... = p_n$ і u невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (16), припустимо також, що $f \in C^1(R^1_+)$, $f' \geqslant 0$ і функція $\Psi(u) = u^{-1}\Phi^{\frac{1}{p}}(u)$ задовольняє умові (A). Нехай $(x^0, t^0) \in \Omega_T$ і $Q_{8\rho,8\tau}(x^0, t^0) \subset \Omega_T$, тоді існує така додатня стала c_4, яка залежить тільки від n, ν_1, ν_2, p, що справедлива або оцінка

$$u(x^0, t^0) \leqslant (\tau^{-1}\rho^p)^{\frac{1}{p-2}},$$

або

$$\Phi(u(x,t)) \leqslant c_4 \rho^{-p} u^p(x,t),$$

для майже всіх точок $(x,t) \in Q_{\rho,\tau}(x^0, t^0)$.

Підрозділ 3.2 містить дослідження розв'язків квазілінійного параболічного рівняння в дивергентному вигляді

$$u_t - divA(x,t,u,\nabla u) + a_0(u) = 0,\ (x,t) \in \Omega_T, \tag{25}$$

які задовольняють початкову умову

$$u(x,0) = 0,\ \ x \in \Omega \setminus \{0\}, \tag{26}$$

де $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega-$ обмежена область в $R^n, n \geqslant 2, 0 < T < \infty$.

Припускається, що коефіцієнти рівняння $A = (a_1, ..., a_n)$ і a_0 задовольняють умові Каратеодорі, структурним нерівностям (7), (8) та

$$a_0(u) \geqslant \nu_1 f(u), \tag{27}$$

де $f(u)-$ неперервна додатня функція, ν_1 додатня стала та для показників m_i справедливі нерівності (10).

Введемо необхідні означення.

Означення 3.3 Будемо казати, що функція φ належить простору $V_{2,m}(\Omega_T)$, якщо $\varphi \in C_{loc}(0,T, L^{1+m^-}_{loc}(\Omega))$ і має місце нерівність $\sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_T} |\varphi|^{m_i+m^--2} |\varphi_{x_i}|^2 dxdt < \infty$ з $m^- = \min(m_1, 1)$.

Означення 3.4 Слабким розв'язком задачі (25), (26) будемо називати невід'ємну функцію $u(x,t)$, яка задовольняє включенню $u\psi \in V_{2,m}(\Omega_T) \cap\ L^2_{loc}(0,T; W^{1,2}_{loc}(\Omega))$ та інтегральній тотожності

$$\int\limits_{\Omega} u(x,\tau)\psi\varphi dx +$$

$$+\int_0^\tau\int_\Omega \{-u(\psi\varphi)_t + A(x,t,u,\nabla u)\nabla(\psi\varphi) + a_0(u)\psi\varphi\}\,dx\,dt = 0 \qquad (28)$$

для будь-якої пробної функції $\varphi \in W^{1,2}_{loc}(0,T;L^2_{loc}(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0,T;\overset{o}{W}{}^{1,2}_{loc}(\Omega))$, будь-якої функції ψ з $C^1(\overline{\Omega}_T)$, яка обертається в нуль в околі точки $(0,0)$ й для будь-якого $\tau \in (0,T)$.

Щоб сформулювати головний результат підрозділу введемо позначення. Нехай $(x^0,t^0) \in \Omega_T$, для довільних $\tau, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n > 0, \theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$ визначимо циліндричну область $Q_{\theta,\tau}(x^0,t^0) := \{(x,t) : \left|t-t^0\right| < \tau,\ \left|x_i - x_i^0\right| < \theta_i,\ i = \overline{1,n}\}$ та позначимо $M(\theta,\tau) := \sup\limits_{Q_{\theta,\tau}(x^0,t^0)} u$, $F(\theta,\tau) := \sup\limits_{Q_{\theta,\tau}(x^0,t^0)} F(u)$, $F(u) = \int\limits_0^u s^{m^- -1} f(s)ds$, $m^+ = max(m_n, 1)$.

Теорема 3.2 Нехай виконані умови (7), (8), (27), (10) і $u-$ слабкий невід'ємний розв'язок рівняння (25), припустимо також, що $f \in C^1(R^1_+)$ і $f'(u) \geqslant 0$. Нехай $(x^0,t^0) \in \Omega_T$, зафіксуємо $\sigma \in (0,1)$, і нехай $Q_{8\theta,8\tau}(x^0,t^0) \subset \Omega_T$, $\rho = \begin{cases} \theta_n, & m_n > 1, \\ \tau^{\frac{1}{2}}, & m_n < 1. \end{cases}$

Тоді існують такі додатні сталі c_4, c_5, які залежать тільки від $n, \nu_1, \nu_2, m_1, ..., m_n$, що або справедлива нерівнсть

$$u(x^0,t^0) \leqslant \left(\frac{\theta_n^2}{\tau}\right)^{\frac{1}{m_n-1}} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\rho}{\theta_i}\right)^{\frac{2}{m^+-m_i}}, \qquad (29)$$

або має місце оцінка

$$(M(\sigma\theta,\sigma\tau))^{1-m^-+\frac{n(m-m^-)}{2}} F(M(\sigma\theta,\sigma\tau)) \leqslant$$

$$\leqslant c_4(1-\sigma)^{-\gamma}\rho^{-2}(M(\theta,\tau))^{m^++1+\frac{n(m-m^-)}{2}}. \qquad (30)$$

Якщо виконується умова

$$F(\varepsilon u) \leqslant \varepsilon^{m^++m^-+\beta} F(u),\ \beta > 0, \qquad (31)$$

тоді має місце

$$F(M(\theta,\tau)) \leqslant c_5(1-\sigma)^{-\gamma} M^{m^++m^-}(\theta,\tau)\rho^{-2}. \qquad (32)$$

У **підрозділі 3.3** вивчаються розв'язки квазілінійного параболічного рівняння

$$u_t - divA(x,t,u,\nabla u) + g(x,t,\nabla u) = b(x,t,u,\nabla u), \quad (x,t) \in \Omega_T, \qquad (33)$$

які задововольняють початкову умову (26).

Будемо припускати, що коефіцієнти рівняння $A : \Omega \times R^1_+ \times R^1_+ \times R^n \to R^n$, $g, b : \Omega \times R^1_+ \times R^1_+ \times R^n \to R^1$ задовольняють наступним умовам:

- $A(\cdot,\cdot,u,\xi)$, $g(\cdot,\cdot,\xi)$, $b(\cdot,\cdot,u,\xi)$ є вимірними за Лебегом для всіх $u \in R^1_+, \xi \in R^n$;
- $A(x,t,\cdot,\cdot)$, $g(x,t,\cdot)$, $b(x,t,\cdot,\cdot)$ неперервні майже для усіх $(x,t) \in \Omega_T$, $A = (a_1, a_2, ...a_n)$;
- виконуються структурні нерівності (7) та
$$\begin{gathered} |a_i(x,t,u,\xi)| \leqslant \nu_2 u^{m_i-1}|\xi_i|,\ i=\overline{1,n}, \\ \nu_1 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{q_i} \leqslant g(x,t,\xi) \leqslant \nu_2 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{q_i}, \\ |b(x,t,u,\xi)| \leqslant \nu_2 u^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} u^{m_i-1}|\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{gathered} \tag{34}$$
де ν_1, ν_2 деякі додатні сталі.

Припускається, що для показників рівняння виконуються нерівність (10) та
$$\frac{2+nm}{1+n} \leqslant q < 2, \quad \max_{0\leqslant i \leqslant n} q_i < q\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}. \tag{35}$$

Означення 3.5 Будемо казати, що функція u належить простору $L^{\overline{q}}(0,T;$ $W^{1,\overline{q}}(\Omega))$, якщо $\iint\limits_{\Omega_T} |u|^q dxdt + \sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_T} |u_{x_i}|^{q_i} dxdt < \infty$.

Означення 3.6 Будемо казати, що функція u належить простору $V_m(\Omega_T)$, якщо $u \in C(0,T; L^{1+m^-}(\Omega))$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_T} |u|^{m_i+m^- -2}|u_{x_i}|^2 dxdt < \infty$, де $m^- = \min(1, m_1)$.

Означення 3.7 Слабким розв'язком задачі (33), (26) будемо називати невід'ємну функцію $u(x,t)$, яка задовольняє включенню $u\psi \in V_m(\Omega_T) \cap L^{\overline{q}}(0,T;$ $W^{1,\overline{q}}(\Omega))$ та інтегральній тотожності

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega} u(x,\tau)\psi^p \varphi\, dx + \int\limits_{0}^{\tau} \int\limits_{\Omega} (-u(\psi^p\phi)_t + A(x,t,u,\nabla u)\nabla(\psi^p\varphi) + \\ +g(x,t,\nabla u)\psi^p\varphi - b(x,t,u,\nabla u)\psi^p \varphi\,)\, dxdt = 0, \end{gathered} \tag{36}$$

при $p = \max(2+m_n, \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} q_i)$, будь-якому $0 < \tau < T$, і будь-якій пробній функції φ:$\varphi \in W^{1,2}(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; \overset{o}{W}{}^{1,2}(\Omega))$ й будь-якій функції $\psi \in C^1(\overline{\Omega}_T)$, яка обертається в 0 в околі точки $(0,0)$.

Це гарантує, що $\lim\limits_{\tau\to 0}\int\limits_{\Omega} u(x,\tau)\ \psi^p\,\varphi\, dx = 0$ і всі інтеграли в тотожності (36) є збіжними.

Сформулюємо головний результат підрозділу.

Теорема 3.3 Нехай виконані умови (7), (10), (34), (35). Тоді існує додатня стала c_6, яка залежить тільки від $\nu_1, \nu_2, n, m_1, \dots, m_n, q_1, \dots, q_n$, що справедлива наступна оцінка

$$u(x,t) \leqslant c_6 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{2}{(2-m)q+(q-2)m_i}} + t^{\frac{1}{q(1-m)+2(q-1)}} \right)^{q-2} \tag{37}$$

для $(x,t) \in \Omega_T \setminus \{(0,0)\}$.

У **підрозділі 3.4** результати дослідження з першого підрозділу застосовуються для доведення нерівності Гарнака для рівняння (16) у випадку, коли $2 < p_1 = p_2 = ... = p_n$, $m_1 = m_2 = ... = m_n = 1$.

Теорема 3.4 Нехай u невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (16) на множині Ω_T, виконана умова (17) і $2 < p_1 = p_2 = ... = p_n$, $m_1 = m_2 = ... = m_n = 1$. Припустимо також, що $a_0(u) \leqslant \nu_2 f(u)$, і нехай $f \in C^1(R^1_+)$, $f \geqslant 0$ і функція $\Psi(u) = u^{-1}F^{\frac{1}{p}}(u)$ задовольняє умові (A). Тоді існують такі додатні сталі c_7, c_8, які залежать тільки від ν_1, ν_2, n, p і не залежать від самого розв'язку u, що має місце нерівність

$$u(x^0,t^0) \leqslant c_7 \inf_{B_\rho(x^0)} u(x, t^0+\tau),\ \tau = \rho^p \left(\frac{c_8}{u(x^0,t^0)} \right)^{p-2},$$

для всіх циліндрів $Q_{8\theta,8\tau}(x^0,t^0) \subset \Omega_T$.

У **четвертому розділі** розглядається питання усувності ізольованої особливості для слабких розв'язків рівнянь, які розглянуті в попередньому розділі. Для отримання умов усувності застосовано метод точних поточкових оцінок розв'язків типу "нелінійного потенціалу", який був запропонований І. В. Скрипніком для еліптичних дивергентних квазілінійних рівнянь та адаптований в поданій роботі для анізотропних параболічних рівнянь.

У **підрозділі 4.1** досліджується квазілінійне пароболічне рівняння (25), модельним випадком якого є анізотропне рівняння пористого середовища з абсорбційним членом вигляду u^q

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \left(u^{m_i-1}u_{x_i}\right)_{x_i} + u^q = 0.$$

У першому пункті цього підрозділу досліджується випадок, коли $m_i \geqslant 1$, $i = \overline{1,n}$. Результат усувності сформульован у наступній теоремі.

Теорема 4.1 Нехай виконані умови (18) з $p_i = 2, i = \overline{1,n}$, (7), (8) і u невід'ємний слабкий розв'язок задачі (25), (26). Припустимо, що $f(u) = u^q$ і виконується наступна умова

$$q \geqslant m + \frac{2}{n}, \tag{38}$$

тоді особливість в точці $(0,0)$ є усувною.

У другому пункті розглядається рівняння, в якого частина показників $m_i < 1, i = \overline{1,s}$ (сингулярний випадок), а інша частина $m_i > 1, i = \overline{s+1,n}$ (вироджений випадок). Основним результатом є така теорема.

Теорема 4.2 Нехай виконані умови (7), (8), (10) і u невід'ємний слабкий розв'язок задачі (25), (26). Припустимо, що $f(u) = u^q$ і

$$q \geqslant m + \frac{2}{n},$$

тоді особливість в точці $(0,0)$ є усувною.

У **підрозділі 4.2** розглянуто розв'язки рівняння (33), яке було розглянуто у підрозділі 3.3. Основним результатом є умова усувності ізольованих особливостей анізотропного рівняння пористого середовища з градієнтною абсорбцією, яка сформульована у наступній теоремі.

Теорема 4.3 Нехай виконані умови (7), (10), (34), (35) і u невід'ємний слабкий розв'язок задачі (33), (26). Припустимо, що $q = \dfrac{2+nm}{1+n}$ і $q_i = \dfrac{2+nm}{1+n+\frac{n}{2}(m-m_i)}$, $i = \overline{1,n}$, тоді особливість в точці $(0,0)$ є усувною.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків дивергентних нелінійних анізотропних параболічних рівнянь в околі сингулярної точки. Дана задача ускладнюється тим, що загальна якісна теорія для анізотропних еліптичних і параболічних рівнянь не побудована. Крім того, точний вигляд фундаментального розв'язку для таких рівнянь невідомий. Але незважаючи на це, було встановлено умови усувності особливості для анізотропних параболічних рівнянь і для таких рівнянь з абсорбцією та градієнтною абсорбцією, які були отримані за допомогою метода І. В. Скрипніка точних поточкових оцінок розв'язків типу "нелінійного потенціалу", запропонованого ним для еліптичних дивергентних квазілінійних рівнянь та адаптованого в поданій роботі для анізотропних параболічних рівнянь.

Модельними випадками рівнянь, які досліджені, є анізотропне рівняння пористого середовища та це ж рівняння з абсорбцією та градієнтною абсорбцією. В дисертаційній роботі вдалося знайти універсальний підхід в дослідженнях властивостей розв'язків анізотропного рівняння пористого середовища, який не залежить від значень показників анізотропії.

Окремої уваги заслуговують оцінки типу Келлера-Оссермана, які описані в розділі 3. Вони мають багато застосувань, у даній роботі використані для отримання умов усувності особливостей для рівнянь з абсорбційним членом. Ці оцінки також відіграють важливу роль в теорії великих розв'язків, а саме їх застосовують для доведення існування або неіснування таких розв'язків. Ще за допомогою оцінок типу Келлера-Оссермана можна отримати нерівність типу Гарнака, як це було зроблено в розділі 3.

Всі отримані результати у дисертаційній роботі є новими, сформулюємо найбільш важливі з них:

- отримано достатню умову усувності ізольованих особливостей для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь;
- отримано оцінки типу Келлера-Оссермана для подвійно нелінійного анізотропного параболічного рівняння з абсорбційним членом, який залежить тільки від розв'язку;
- отримано оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропних параболічних рівнянь з абсорбційним членом $f(u)$;
- отримано оцінки типу Келлера-Оссермана для анізотропних параболічних рівнянь з градієнтною абсорбцією;
- доведено нерівність Гарнака зі сталою, яка не залежить від розв'язку, для нелінійного параболічного рівняння з абсорбційним членом;
- отримано достатню умову усувності ізольованих особливостей для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з абсорбційним членом вигляду u^q;
- отримано достатню умову усувності ізольованих особливостей для розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з градієнтним абсорбційним членом.

Всі основні результати дисертації наведені з повними і строгими математичними доведеннями. Отримані результати мають теоретичний характер, вони можуть слугувати підґрунтям для проведення подальших наукових досліджень у відповідній проблематиці та можуть бути використані при розробці, читанні курсів для підготовки фахівців з диференціальних рівнянь, математичної фізики, а також суміжних напрямків.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧКИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Шань М. О. Апріорні оцінки типу Келлера-Оссермана для двічі нелінійних анізотропних параболічних рівнянь з абсорбцією / М. О. Шань // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. — 2018. — Т. 32. — С. 149—159.

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

2. Shan M. A. Removability of an isolated singularity for solutions of anisotropic porous medium equation with absorption term / M. A. Shan // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 222. — P. 741—749.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)

3. Shan M. A. Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous medium equation / M. A. Shan // Annali di Matematica Pure ed Applicata. — 2017. — Vol. 196. — P. 1913—1926.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 1.268), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)

4. Shan M. A. Keller-Osserman a priori estimates and the Harnack inequality for quasilinear elliptic and parabolic equations with absorption term / M. A. Shan, I.I. Skrypnik // Nonlinear Analysis. — 2017. — Vol. 155. — P. 97—114.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 1.291), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)

   Особистий внесок здобувача. Здобувачу належать Proposition 1.3, Proposition 1.4, Theorem 1.2, Theorem 1.4.

5. Shan M. A. Keller-Osserman a priori estimates and removability result for the anisotropic porous medium equation with absorption term / M. A. Shan // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — V. 235. — P. 63—73.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)

6. Shan M. A. Keller-Osserman estimates and removability result for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. A. Shan, I.I. Skrypnik // Mathematische Nachrichten. — 2019. — Vol. 292. — P. 436—453.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 0.847), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet)

   Особистий внесок здобувача. Здобувачу належать Theorem 1.1, Theorem 1.2.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Shan M. A. On the precise condition for removability of isolated singularities for anisotropic porous media equation / M. A. Shan // International Conference on Differential Equations: International conference dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20–24, 2016: abstr. — Lviv, 2016. — P. 107.

8. Shan M. A. Removability of isolated singularity for anisotropic porous medium equation with absorption term / M. A. Shan // Differential equations and Applications: 5th International conference for young scientists, dedicated to Yaroslav Lopatynsky, November 9–11, 2016: abstr. — Kyiv, 2016. — P. 129—130.

9. Shan M. O. On the precise condition for removability of isolated singularities for anisotropic porous medium equation with absorption term / M. O. Shan // XVII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям "Еругинские чтения-2017", 16-20 мая 2017 г.: тез. докладов. — Минск, 2017. — С. 29—30.

10. Shan M. A. Removability result for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. A. Shan // Differential Equations, Mathematical Physics and Applications: International Conference, October 17-19, 2017: abstr. — Cherkasy, 2017. — P. 76—77.

11. Shan M. O. Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous media equation / M. O. Shan // Матеріали наукової конференції професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів наукового ступеня за підсумками науково-дослідної роботи за період 2015-2016 рр., ДонНУ імені Василя Стуса, 15–18 травня 2017 р.: тези доп. — Вінниця, 2017. — С. 211—212.

12. Shan M. A. Keller-Osserman a priori estimates and removability of isolated singularities for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. A. Shan // Mathematics, informatics and information technologies:

International conference dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, April 19-21, 2018: abstr. — Balti, 2018. — P. 78—79.

13. Шань М. О. Результат усувності для анізотропного рівняння пористого середовища з абсорбційним членом / М. О. Шань // Сучасні проблеми механіки та математики: Міжнародна наукова конференція, 22-26 травня, 2018 р.: тези доп. — Львів, 2018. — С. 180.

14. Shan M. O. Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous medium equation with gradient absorption term / M. O. Shan // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Міжнародна наукова конференція, присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17–19 вересня 2018 р.: тези доп. – Чернівці, 2018. — С. 34.

15. Shan M. A. Removable singularities for anisotropic parabolic equations / M. A. Shan // Contemporary Analysis and Nonlinear Boundary Problems: workshop dedicated to the 80th anniversary of B.V. Bazaliy and to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, October 17–18, 2018: abstr. — Sloviansk, 2018. — P. 8—9.

16. Shan M. O. Removability result for anisotropic parabolic equations / M. O. Shan // 6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, June 18–20, 2019: abstr. — Vinnytsia, 2019. — P. 66—68.

АНОТАЦІЯ

Шань М. О. Усувні особливості розв'язків анізотропних параболічних рівнянь. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 - диференціальні рівняння - Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2019.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків дивергентних нелінійних анізотропних параболічних рівнянь в околі сингулярної точки. Дана задача ускладнюється тим, що загальна якісна теорія для анізотропних еліптичних і параболічних рівнянь не побудована. Крім того, точний вигляд фундаментального розв'язку для таких рівнянь невідомий. Але не зважаючи на це, було встановлено умови усувності особливості для анізотропних параболічних рівнянь і для таких рівнянь з абсорбцією та градієнтною абсорбцією, які були отримані за допомогою метода І.В. Скрипніка точних поточкових оцінок розв'язків типу "нелінійного потенціалу", запропонованого ним для еліптичних дивергентних квазілінійних рівнянь та адаптованого в поданій роботі для анізотропних параболічних рівнянь.

Модельними випадками рівнянь, які досліджені, є анізотропне рівняння пористого середовища та це ж рівняння з абсорбцією та градієнтною абсорбцією. В дисертаційній роботі вдалося знайти універсальний підхід в дослідженнях властивостей розв'язків вказаних рівнянь, який не залежить від значень показників анізотропії.

Окремої уваги заслуговують оцінки типу Келлера-Оссермана. Вони мають багато застосувань, у даній роботі використані для встановлення умов усувності особливостей для рівнянь з абсорбційним членом та для отримання нерівності типу Гарнака.

Ключові слова: анізотропні параболічні рівняння, абсорбція, градієнтна абсорбція, слабкі розв'язки, усувність ізольованих особливостей, оцінки типу Келлера-Оссермана.

АННОТАЦИЯ

Шань М. А. Устранимые особенности решений анизотропных параболических уравнений. - Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения - Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина Министерства образования и науки Украины, Харьков, 2019.

Диссертационная работа посвящена исследованию асимптотического поведения решений дивергентных нелинейных анизотропных параболических уравнений в окрестности сингулярной точки. Данная задача осложняется тем, что общая качественная теория для анизотропных эллиптических и параболических уравнений не построена. Кроме того, точный вид фундаментального решения для таких уравнений неизвестен. Но несмотря на это, были установлены условия устранимости особенности для анизотропных параболических уравнений и для таких уравнений с абсорбцией и градиентной абсорбцией, которые были получены с помощью метода И.В. Скрыпника точных поточечных оценок решений типа "нелинейного потенциала", предложенного им для эллиптических дивергентных квазилинейных уравнений и адаптированного в представленной работе для анизотропных параболических уравнений.

Модельным случаем рассматриваемых уравнений является анизотропное уравнение пористой среды и это же уравнение с абсорбцией и градиентной абсорбцией. В диссертационной работе удалось найти универсальный подход в исследованиях свойств решений указанных уравнений, который не зависит от значений показателей анизотропии.

Отдельного внимания заслуживают оценки типа Келлера-Оссермана. Они имеют много применений, в данной работе использованы для получения условий устранимости особенностей для уравнений с абсорбционным членом и для получения неравенство типа Гарнака.

Ключевые слова: анизотропные параболические уравнения, абсорбция, градиентная абсорбция, слабые решения, устранимость изолированных особенностей, оценки типа Келлера-Оссермана.

ABSTRACT

Shan M. O. Removable singularities for solutions of anisotropic parabolic equations.– Qualifying scientific work as a manuscript.

A thesis on the degree of Candidate of Science on specialty 01.01.02 - differential equations – V. N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The thesis is devoted to the study of asymptotic behavior of solutions of divergent nonlinear anisotropic parabolic equations near a singular point. This problem is complicated by the fact that a general qualitative theory for anisotropic elliptic and parabolic equations is not constructed. The question of the possible removability of a singularity is clearly due to the rate of growth of the solution near this point. Therefore, an important step in the research of such problems is to obtain a priori estimates of the solution near the singularity. In spite of the fact that the exact form of the fundamental solution for such equations is unknown, the conditions for removability of singularity

for the anisotropic parabolic equations and for such equations with the absorption and gradient absorption terms were established. These conditions were obtained by the method of precise pointwise estimates of solutions of type "nonlinear potential"which was proposed by I. V. Skrypnyk for elliptic divergent quasilinear equations and adapted in this paper for anisotropic parabolic equations.

The thesis consists of introduction, four sections, conclusions, list of references and an appendix with the lists of published papers of the author.

First section is devoted to the survey and analysis of the literature. During the review of the literature, current research areas and important open issues in this area were identified, and the purpose of the work was formulated.

In the second section we study of nonnegative weak solutions of a quasilinear parabolic equation in a divergent form model of which is anisotropic porous medium equation

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \left(u^{m_i-1} u_{x_i}\right)_{x_i} = 0.$$

The condition of removability of isolated singularity is established for such equation. We also obtain new precise integral and pointwise estimates near an isolated singularity.

In the third section weak solutions of anisotropic parabolic equations with absorption and gradient absorption are investigated, pointwise upper bounds in terms of distance to the boundary for these solutions are obtained. Such estimates are called estimates of Keller-Osserman type. Estimates of this type play a crucial role in the theory of existence or nonexistence of large solutions, in the problems of removable singularities for solutions to elliptic and parabolic equations. Up to our knowledge all the known estimates for large solutions to elliptic and parabolic equations are related with equations for which some comparison properties hold. Anisotropic elliptic and parabolic equations have been the object of very few works because in general such properties do not hold. The main ones concern equations only in the precise choice of absorption term. Despite of the lack of comparison principle, we give a proof of the Keller–Osserman a priori estimates for solutions to quasilinear parabolic equations model of which are doubly nonlinear anisotropic parabolic equation with absorption term, anisotropic porous medium equation with absorption and gradient absorption

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \left(u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}\right)_{x_i} + f(u) = 0, \;\; m_i > 1, p_i \geqslant 2, i = \overline{1,n},$$

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \left(u^{m_i-1} u_{x_i}\right)_{x_i} + f(u) = 0,$$

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \left(u^{m_i-1} u_{x_i}\right)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{q_i} = 0.$$

We give more precise sub-estimate for solutions of doubly nonlinear anisotropic parabolic equation with absorption under additional condition of absorption term. We also give the Keller-Osserman type estimates for this equation in the case of a precise choice of the absorption term, namely power and exponential function. Using these estimates we give a simple proof of the Harnack inequality for solutions of evolution p-Laplace equations with absorption term.

The forth section is devoted the question of the removability of isolated singularity for the solutions of the equations, which were investigated in the previous section. Using received earlier Keller-Osserman type estimates the removability of isolated singularity for solutions of these equations has been proved.

The main difficulty lies in the fact that we consider anisotropic porous medium equation in what some part of anisotropic exponents m_i can be less than 1 (singular case) and the other can be greater than 1 (degenerate case). These two cases are typically considered separately in the literature, the definitions of the solution are formulated separately for each case, the qualitative properties of the solutions are also proves separately even in the isotropic case ($m_1 = m_2 = ... = m_n$). In the thesis we have found a universal approach in the study of the properties of solutions of the anisotropic porous medium equation which does not depend on the values of anisotropic exponents.

Keywords: anisotropic parabolic equations, absorption, gradient absorption term, weak solution, removability of isolated singularity, Keller-Osserman type estimates.