Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Олійник Олена Вікторівна

УДК 517.948

НЕЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА МОДЕЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ НЕСАМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені
В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:	доктор фізико-математичних наук, професор **Золотарьов Володимир Олексійович**, Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, м. Харків, провідний науковий співробітник відділу теорії функцій.
Офіційні опоненти:	доктор фізико-математичних наук, професор **Арлінський Юрій Мойсійович**, Східноукраїнський національний університет ім. В. Даля, м. Сєвєродонецьк, завідувач кафедри математичного аналізу; доктор фізико-математичних наук, доцент **Маламуд Марк Михайлович**, Інститут прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов’янськ, провідний науковий співробітник відділу рівнянь з частинними похідними.

Захист відбудеться “19” лютого 2016 р. о 15:15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 у Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4, ауд. 6-49.

З дисертацією можна ознайомитись у Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Автореферат розісланий “____” січня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Ігнатович С. Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Робота присвячена розв’язку та дослідженню систем нелінійних диференціальних рівнянь, вигляд яких в матричній формі співпадає з відомими рівняннями П. Лакса. Ця система рівнянь після виключення довільного параметру дає два співвідношення, перше з яких є лінійним диференціальним рівнянням, а друге є умовою узгодження розв’язку першого рівняння. Система нелінійних диференціальних рівнянь, якій присвячена дисертація, відіграє важливу роль в теорії модельних зображень комутативних систем несамоспряжених операторів, де саме вона і виникла.

Дана система нелінійних диференціальних рівнянь з’явилась у задачах спектрального аналізу систем лінійних несамоспряжених операторів. Трикутні та функціональні моделі, які прийнято вважати аналогами спектральних розкладів для несамоспряжених (неунітарних) операторів, вже більш за півстоліття мають важливе значення у функціональному аналізі та у диференціальних рівняннях.

Теорія трикутних та функціональних моделей збагатила як теоретико-опера-торні задачі, так і теоретико-функціональну математику. Так, задача про розклад дискретного спектру за власними векторами еквівалентна інтерполяційній задачі, проблема повноти замінюється задачею про факторізацію, питання про сумісність повноти власних функцій оператора та його спряженого еквівалентне задачі про розхил між виділеними підпросторами Харді, задача відділення спектральної компоненти замінюється проблемою оберненості оператора Тьоплиця.

Вперше трикутні моделі для несамоспряжених операторів було побудовано М. С. Лівшицем у 1956 році. Функціональні моделі для операторів стиску було побудовано Б. С. Надем і Ч. Фояшем. В основі відповідних конструкцій лежить аналіз структури характеристичної функції М. С. Лівшиця.

Побудова аналогічних моделей для комутативних систем несамоспряжених (неунітарних) операторів стикалася з істотними труднощами. Ідея Надя-Фояша полягала у побудові комутативних унітарних дилатацій для комутативної системи операторів стиску. Але С. Парротом у випадку трьох комутативних операторів стиску було побудовано контрприклад, який показує, що відповідні комутативні унітарні дилатації не завжди існують. Розв’язання проблеми побудови трикутних моделей для комутативних систем несамоспряжених (неунітарних) операторів запропонував М. С. Лівшиць. Йому вдалося комутативність основної системи операторів записати у термінах умов для характеристичної функції. Ідея М. С. Лівшиця полягає в тому, що спочатку будується відповідна унітарна дилатація для одного з операторів комутативної системи, а потім описуються властивості параметрів цієї дилатації в силу комутативності вихідної системи операторів. Дані співвідношення на зовнішні параметри дилатації приводять до умов сплітаємості для характеристичної функції і дають опис комутативності у термінах характеристичної функції. Аналіз цих умов і дозволив М. С. Лівшицю, Л. Л. Ваксману, В. О. Золотарьову, В. Віннікову в окремих випадках здійснити побудову трикутних моделей для комутативних систем несамоспряжених операторів.

Умова сплітаємості на характеристичну функцію дає можливість побудувати ланцюжок спільних інваріантних підпросторів для комутативної системи несамоспряжених операторів, існування якого випливає з відомого результату В. Ломоносова. Виявилося, що побудова даних моделей ґрунтується на розв'язках системи нелінійних диференціальних рівнянь типу Лакса, яка означає, що похідна лінійної матричнозначної функції співпадає з комутатором цієї лінійної функції та іншої матричнозначної функції. Усі елементи цієї системи рівнянь залежать від вільного параметра, виключив який, отримаємо основну нелінійну систему диференціальних рівнянь типу Лакса.

В деяких випадках цю систему рівнянь вивчали Л. Л. Ваксман, В. О. Золотарьов, В. Вінніков. Але загального дослідження нелінійної системи диференціальних рівнянь типу Лакса дотепер не проводилося. Отже, вивчення цієї системи є актуальним та важливим. Саме розв'язку цієї задачі, на якій базується побудова трикутних моделей комутативних систем несамоспряжених операторів, і присвячена дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Основні наукові результати, викладені в дисертації, отримано в ході виконання науково-дослідної роботи "Спектральний аналіз систем операторів та його застосування" (номер держ. реєстрації 0112U001060), що виконувалась відповідно до планів роботи Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

Мета й завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження системи нелінійних диференціальних рівнянь типу Лакса, на яких базується побудова трикутних моделей для комутативних систем лінійних несамоспряжених обмежених операторів. Задумом роботи є не тільки розв'язок відповідної нелінійної системи рівнянь, але й опис класів розв'язків цієї системи. Для досягнення зазначеної мети поставлено ряд завдань:

– дати повний опис розв'язків системи типу Лакса;

– знайти загальні методи знаходження розв'язків системи типу Лакса, які ґрунтуються на алгебро-геометричних методах;

– описати розв'язки системи нелінійних рівнянь в термінах поведінки власних векторів вагової матриці-функції.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є нелінійні системи диференціальних рівнянь типу Лакса.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є аналіз нелінійної системи диференціальних рівнянь типу Лакса. Предметом дослідження є також опис всіх розв'язків цієї системи рівнянь.

Методи дослідження. При роботі над дисертаційним дослідженням розв'язувалася нелінійна система диференціальних рівнянь типу Лакса. При реалізації різних підходів щодо розв'язання, використано: методи інтегрування диференціальних рівнянь (підрозділи 2.1, 2.2); модернізований метод розв'язку обернених задач, методи теорії еліптичних функцій (підрозділи 3.1, 3.2, 3.3); методи лінійної алгебри (розділи 4, 5).

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Отримано у явному вигляді розв'язки системи типу Лакса у випадку

$r = 2$.

2. Одержано опис загальних ізоспектральних властивостей розв'язків системи типу Лакса.

3. Вперше запропоновано покроковий процес знаходження усіх розв'язків системи типу Лакса.

4. Описано розв'язки системи у випадку поліноміальної залежності ваги від розв'язку $\gamma(x)$ при $r = 3, 4$. У випадку простого спектра початкових даних ці розв'язки можуть бути представлені за допомогою еліптичних функцій Якобі.

5. Одержано рівняння для власних функцій ваги в термінах її власних значень і параметрів системи та знайдено його розв'язки.

6. Отримано рівняння для власних функцій матриці, яка є добутком ваги та інволюції, в термінах її власних значень у випадку простого спектра початкових даних та знайдено їх розв'язки. Встановлено, що розв'язки можуть бути представлені через тригонометричні функції.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані при спектральному аналізі комутативних систем несамоспряжених лінійних операторів, а також при побудові трикутних моделей цих систем операторів. Трикутні моделі мають своє застосування у теорії випадкових процесів, теорії повноти та базисности функцій тощо. Матеріали дисертації можуть бути використані у навчальному процесі – при викладанні спецкурсів та проведенні семінарів з диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.

Особистий внесок автора. Результати розділів 2 (підрозділи 2.1, 2.2), 4, 5 отримано здобувачем особисто та опубліковано у роботах [1], [3]. Результати розділу 2 (підрозділи 2.3, 2.4) та розділу 3 отримано у співавторстві з А. А. Луньовим та опубліковано у роботах [2], [4], [5].

У спільних статтях автору належать в роботі [2] теорема 3.1, леми 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, в роботі [4] доведено теореми 2.2, 3.2, наслідки 2.3 та 3.3, результати проілюстровано прикладом 2.4, в роботі [5] доведено теорему 2, наслідок 2 та приклад 2, тлумачення здобутих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались та обговорювались на "Fourth Inter-national Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii" (Донецьк, 14-17 листопада 2012 р.), на міжнародній конференції "Spectral Theory and Differential Equations (STDE-2012) International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday " (Харків, серпень 20-24, 2012 р.), на міжнародній конференції "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях "Тараповские чтения – 2012". (Харків, 01-31 травня 2012 р.), на XIV міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012 р.), на міжнародній математичній конференції "Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди

75-річчя до дня народження академіка А. М. Самойленка (Севастополь, 23-30 червня 2013 р.), міжнародній математичній конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Г. М. (23-24 квітня 2014 р., м. Київ). Основні результати роботи доповідалися на науковому семінарі у Донецькому національному університеті (керівник семінару д. ф.-м. н. Маламуд М. М.) 2012 р., на розширеному засіданні семінару з аналізу у Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна (керівник семінару д. ф.-м. н., проф. Фаворов С. Ю.) 2015 р., на науковому семінарі кафедри прикладної математики у Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна (керівник семінару д. ф.-м. н., проф. Коробов В. І.), 2015 р..

Публікації. Основні результати дисертації повністю відображені у публікаціях. Опубліковано **11** наукових робіт. З них наукових статей у фахових журналах – **5,** тез доповідей на конференціях – **6**.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 123 сторінки. Список використаних джерел займає 9 сторінок і складається з 91 найменування. Результати, що виносяться на захист, сформульовано та доведено у розділах 2 – 5.

Автор висловлює глибоку подяку своєму науковому керівнику В. О. Золотарьову за постійну увагу та підтримку в роботі.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

I. У *вступі* обґрунтовано актуальність наукової проблеми, що розглядається в дисертаційному дослідженні, визначено мету і поставлено задачі. Подано відомості про публікації автора за темою дисертації та про апробацію результатів дослідження.

II. У *першому розділі* наведена постановка задачі, якій присвячена дисертація та основні факти з теорії несамоспряжених операторів згідно теми дисертаційного дослідження. Розглянуто трикутні моделі комутативної системи несамоспряжених операторів і встановлено, що побудова даних моделей ґрунтується на розв'язанні системи нелінійних диференціальних рівнянь типу Лакса. А саме, розглядається задача Коші для рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\big((\sigma_2\alpha(x)+\gamma(x))J\big) = i\left[\dfrac{Ja(x)}{\lambda-\alpha(x)}, (\sigma_2\alpha(x)+\gamma(x))J\right] = 0,\ x\in[0,l], \\ \gamma(0)=\gamma^+, \end{cases}$$

де $\gamma(x)$ – шукана самоспряжена матриця-функція $r\times r$ $(r\in N)$, $a(x)$, σ_2, γ^+, J –

самоспряжені $r \times r$ матриці в $E = C^r$ $(r < \infty)$, причому $a(x) \geq 0$, $tr\,a(x) \equiv 1$ $(x \in [0, l])$, а $J = J^* = J^{-1}$, $[A, B] := AB - BA$ – комутатор матриць $A, B \in C^{r \times r}$, $\alpha(x)$– дійсна неспадна обмежена функція на $[0, l]$, $0 < l < \infty$, $\lambda \in C$.

Це рівняння має вигляд $L' = [A, L]$, де $A = \dfrac{iJa(x)}{\lambda - \alpha(x)}$, $L = (\sigma_2 \alpha(x) + \gamma(x))J$, тому має назву «рівняння типу Лакса».

Шукаємо такі розв’язки, для яких рівність виконується за параметром λ тотожно. Прирівнявши коефіцієнти у даному рівнянні при однакових степенях параметра λ, отримаємо нелінійну систему диференціальних рівнянь типу Лакса

$$\begin{cases} [Ja(x), (\sigma_2 \alpha(x) + \gamma(x))J] = 0, \; x \in [0, l], \\ \gamma'(x)J = i[Ja(x), \sigma_2 J], \; x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+, \end{cases} \tag{1}$$

дослідженню якої присвячена дисертаційна робота.

III. *Другий розділ* присвячено опису загального вигляду розв’язків системи (1) типу Лакса у випадку, коли $\dim E = 2$.

Нехай $\alpha(x) \neq 0$, $\alpha(x)$ – дійсна неспадна обмежена функція на $[0, l]$, $0 < l < \infty$, де $a(x) \geq 0$, $\gamma(x)$, σ_2, γ^+ мають вигляд

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} \xi & \zeta \\ \overline{\zeta} & \eta \end{pmatrix}, \; a(x) = \begin{pmatrix} b(x) & c(x) \\ \overline{c(x)} & 1 - b(x) \end{pmatrix},$$

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(x) & \gamma_{12}(x) \\ \overline{\gamma_{12}}(x) & \gamma_{22}(x) \end{pmatrix}, \; \gamma^+ = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{\;+} & \gamma_{12}^{\;+} \\ \overline{\gamma_{12}^{\;+}} & \gamma_{22}^{\;+} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де ξ, η – дійсні числа; $\gamma_{11}(x), \gamma_{22}(x)$, $b(x)$ $(0 \leq b(x) \leq 1)$ – дійсні функції, $c(x)$, $\gamma_{12}(x)$ – комплекснозначні функції для усіх $x \in [0, l]$.

Теорема 2.2. Нехай J, $a(x) \geq 0$, σ_2, $\gamma(x)$, γ^+ мають вигляд (2). Якщо для $\forall x \in [0, l]$ виконується $\dfrac{|w(x)|^2 + |v(x)|^2}{|\zeta|^2} \leq b(x)(1 - b(x))$, де $v(x)$ деяка дійсна функція,

$$w(x) = \frac{-\overline{\zeta}\gamma_{12}^+ - \overline{\gamma_{12}^+}\zeta - 2i(\xi + \eta)\int_0^x v(t)dt - 2|\zeta|^2 \alpha(x)}{8i\int_0^x v(t)dt + 2\left(\alpha(x)(\xi + \eta) + \gamma_{22}^+ + \gamma_{11}^+\right)},$$

то завжди існує єдиний розв’язок системи (1):

$$\gamma_{11}(x) = 2i\int_0^x v(t)dt + \gamma_{11}^+, \; \gamma_{22}(x) = 2i\int_0^x v(t)dt + \gamma_{22}^+,$$

$$\gamma_{12}(x) = -c(x)\left(\alpha(x)(\xi + \eta) + 4i\int_0^x v(t)dt + \gamma_{11}^+ + \gamma_{22}^+\right) - \zeta\alpha(x), \text{ де } c(x) = \frac{w(x) + iv(x)}{\overline{\varsigma}}.$$

Крім цього, описано загальні властивості даної системи у випадку $\dim E = 2$ у припущенні, що матриця-функція $\gamma(x)$ – розв’язок системи рівнянь (1) типу

Лакса при $\alpha(x)=0$, $J=I$, а саме

$$\begin{cases} [a(x),\gamma(x)]=0,\ x\in[0,l], \\ \gamma'(x)=i[a(x),\sigma_2],\ x\in[0,l], \\ \gamma(0)=\gamma^+. \end{cases} \tag{3}$$

Розглянемо систему рівнянь (3) при $\dim E=r<\infty$. У твердженні 2.1. показано, що $\gamma(x)$ утворює ізоспектральне сімейство самоспряжених матриць, цей факт дозволяє формулювати спектральні властивості $\gamma(x)$ (простоту спектра) у термінах γ^+.

Твердження 2.1. Нехай пара $\{a(x),\gamma(x)\}$ задовольняє систему (3). Тоді матриця $\gamma(x)$ унітарно еквівалентна γ^+ при кожному $x\in[0,l]$.

Наступна теорема надає можливість сформулювати покрокову процедуру знаходження розв'язків нелінійної системи диференціальних рівнянь (3).

Теорема 2.3. Нехай $\gamma^+=diag(\lambda_1 I_{r_1},\dots,\lambda_s I_{r_s})$, $r_1+\dots+r_s=r$, де $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ – різні дійсні числа. Тоді для будь-якого розв'язку $\{a(x),\gamma(x)\}$ системи (3) існує єдина унітарна матриця-функція $U\in AC([0,l],C^{r\times r})$ така, що

$$\gamma(x)=U(x)\gamma^+U^*(x),\ x\in[0,l],\ U(0)=I_r, \tag{4}$$

а матриця-функція $C(x):=-iU^{-1}(x)U'(x)$ є самоспряженою і має нульову блочну діагональ відносно розкладу $C^r=C^{r_1}\oplus\dots\oplus C^{r_s}$. При цьому

$$a(x)=U(x)A(x)U^*(x),\ x\in[0,l], \tag{5}$$

$$A(x)=diag(A_1(x),\dots,A_r(x))=A^*(x),\ A_j\in L^1([0,l],C^{r_j\times r_j}),\ j\in\{1,\dots,r\}. \tag{6}$$

Крім цього, для матриці-функції

$$B(x):=U^*(x)\sigma_2U(x) \tag{7}$$

виконується

$$[C(x),\gamma^+]=[A(x),B(x)],\ x\in[0,l], \tag{8}$$

$$B'(x)=i[B(x),C(x)],\ x\in[0,l],\ B(0)=\sigma_2. \tag{9}$$

Якщо для самоспряжених матриць-функцій $A,C\in L^1([0,l],C^{r\times r})$, $B\in AC([0,l],C^{r\times r})$ виконується (6) – (9) та $U\in AC([0,l],C^{r\times r})$ – розв'язок задачі $U'(x)=i[U(x),C(x)]$, $x\in[0,l]$, $U(0)=I_r$, то $U(x)$ унітарна при кожному $x\in[0,l]$, $B(x)$ має вигляд (7)і пара $\{a(x),\gamma(x)\}$, яка задається формулами (4), (5), є розв'язком системи (3).

Покрокова процедура знаходження усіх розв'язків системи (3):

1. Обираємо ортонормований базис у C^r, в якому матриця γ^+ має діагональний вигляд.
2. Визначаємо деяку матрицю-функцію $A(x)$, яка задовольняє умовам (6).
3. Розв'язуємо задачу Коші для нелінійної системи рівнянь (9) із врахуванням (8) та $C_{jk}(x)=(\lambda_k-\lambda_j)^{-1}(A_j(x)B_{jk}(x)-B_{jk}(x)A_k(x))$, $x\in[0,l]$, $j,k\in\{1,\dots,s\}$, $j\neq k$.
4. Якщо вона має глобальний розв'язок на відрізку $[0,l]$, то обчислюємо ма-

трицю $C(x)$ за формулою у пункті 3.

5. Знаходимо $U(\cdot)$ як єдиний розв’язок задачі Коші $U'(x) = i[U(x), C(x)]$, $x \in [0, l]$, $U(0) = I_r$ для системи звичайних диференціальних рівнянь.
6. За формулами (4), (5) знаходимо розв’язок системи (3).

IV. *Третій розділ* присвячено опису системи нелінійних рівнянь (3) у випадку, коли матриця-функція $a(x)$ має простий спектр і є поліномом k-го степеня $(k \le r-1)$ від $\gamma(x)$ зі скалярними коефіцієнтами, які залежать від x, а у *підрозділі 3.3* – кубічної залежності $a(x)$ від $\gamma(x)$.

Загальний вигляд розв’язку системи (3) у випадку лінійної залежності $a(x)$ від $\gamma(x)$ надає твердження 2.3..

Твердження 2.3. Нехай $\kappa_0, \kappa_1 \in L^1[0, l]$ – дійсні функції. Тоді пара $\{a(x), \gamma(x)\}$, де $a(x) = \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)I$, $x \in [0, l]$, є розв’язком системи (3) тоді і тільки тоді, коли $\gamma(x) = \exp(-iK(x)\sigma_2) \cdot \gamma^+ \cdot \exp(iK(x)\sigma_2)$, де $K(x) := \int_0^x \kappa_1(t)dt$, $x \in [0, l]$.

У *підрозділі 3.1* при $r = 3$ розглянуто випадок квадратичної залежності. У теоремі 3.1.здобуто розв'язок системи (3) при $r = 3$.

Теорема 3.1. Нехай $r = 3$, $\sigma_2 = diag(b_1, b_2, b_3)$, де b_1, b_2, b_3 – різні дійсні числа, і $\gamma^+ = (\gamma^+_{jk})^3_{j,k=1}$, причому $\gamma^+_{jk} = ic_{jk}$, c_{jk} – дійсні числа при $j \ne k$, $c_{13} > 0$, $c_{23} > 0$, $(b_2 - b_3)\gamma_{11}{}^+ + (b_3 - b_1)\gamma_{22}{}^+ + (b_1 - b_2)\gamma_{33}{}^+ = 0$. Позначимо $\alpha_1 = \dfrac{b_3 - b_1}{b_1 - b_2}$, $\alpha_2 = \dfrac{b_2 - b_3}{b_1 - b_2}$, $\psi_j(y) = \sqrt{c_{j3}^2 + \alpha_j(y^2 - c_{12}^2)}$, $j \in \{1,2\}$, $F(y) = \int_{c_{12}}^{y} \dfrac{du}{\psi_1(u)\psi_2(u)}$.

Нехай (y_0^-, y_0^+) – найбільший за включенням інтервал, який містить число c_{12} і на якому коректно визначені функції $\psi_1(\cdot), \psi_1(\cdot), F(\cdot)$, тобто виконуються нерівності $c_{j3}^2 + \alpha_j(y^2 - c_{12}^2) > 0$, $y_0^- < y < y_0^+$, $j \in \{1,2\}$.

Нехай далі $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 \in L^1[0, l]$ – дійсні функції, і $K_j(x) := \int_0^x \kappa_j(t)dt$, $j \in \{1,2\}$, причому $F(y_0^-) < (b_1 - b_2)K_2(x) < F(y_0^+)$, $x \in [0, l]$.

Тоді пара $\{a(x), \gamma(x)\}$, де $a(x) = \kappa_2(x)\gamma^2(x) + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)I$, $x \in [0, l]$, є розв’язком системи (3) тоді і тільки тоді, коли при $x \in [0, l]$ виконуються рівності

$$\gamma_{jj}(x) = \gamma^+_{jj},\ j \in \{1, 2, 3\},\ \gamma_{jk}(x) = i\exp\left(i(b_j - b_k)(K_1(x) + (\gamma^+_{11} + \gamma^+_{22})K_2(x))\right)y_{jk}(x),\ j \ne k, \quad (10)$$

де функції $y_{jk}(\cdot)$, $j \ne k$ задовольняють

$$y_{12}(x) = F^{-1}((b_1 - b_2)K_2(x)),$$
$$y_{j3}(x) = \psi_j(y_{12}(x)),\ j \in \{1,2\},$$
$$y_{kj}(x) = -y_{jk}(x),\ 1 \le j < k \le 3.$$

$F^{-1}(\cdot)$ – функція, обернена до функції $F(\cdot)$(якщо $F(y_0^\pm) = \pm\infty$, то $F^{-1}(\pm\infty) = y_0^\pm$).

Розв'язок системи (3) в умовах попередньої теореми при $c_{12}=0$ має вираз у термінах еліптичних функцій Якобі, що показано у наступному наслідку.

Наслідок 3.2. Нехай в умовах теореми 3.1. $c_{12}=0$, а $b_1<b_3<b_2$. Тоді функції $y_{12}(\cdot)$, $y_{13}(\cdot)$, $y_{23}(\cdot)$ мають вигляд

$$y_{12}(x)=c_{13}\sqrt{\frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}}\operatorname{sn}(z(x);k),$$
$$y_{13}(x)=c_{13}\operatorname{cn}(z(x);k),$$
$$y_{23}(x)=c_{23}\operatorname{dn}(z(x);k),$$

де $z(x)=c_{23}\sqrt{(b_2-b_1)(b_3-b_1)}K_2(x)$, $K_2(x)=\int\limits_0^x \kappa_2(t)dt$, $x\in[0,l]$, $k=\dfrac{c_{13}}{c_{23}}\cdot\sqrt{\dfrac{b_2-b_3}{b_3-b_1}}$.

Приклад 3.2. Нехай $\gamma^+=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&i\\-i&-i&0\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&b&0\\0&0&\frac{1}{b}\end{pmatrix}$, $b>1$.

Тоді пара $\{a(x),\gamma(x)\}$, де $a(x)=\gamma^2(x)$, є розв'язком системи (3), яка буде мати вигляд $\begin{cases}\gamma'(x)=i[\gamma^2(x),\sigma_2],\ x\in[0,l],\\ \gamma(0)=\gamma^+.\end{cases}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\gamma(x)=\begin{pmatrix}0 & ib\operatorname{sn}x & i\operatorname{cn}x\\ -ib\operatorname{sn}x & 0 & i\operatorname{dn}x\\ -i\operatorname{cn}x & -i\operatorname{dn}x & 0\end{pmatrix},$$

де $\operatorname{sn}x=\operatorname{sn}(x;k)$, $\operatorname{cn}x=\operatorname{cn}(x;k)$, $\operatorname{dn}x=\operatorname{dn}(x;k)$ і $k=\sqrt{b^2-1}$.

У *підрозділі 3.2* виконано дослідження випадку квадратичної залежності при $r=4$. Твердження 3.1. та теорема 3.3 надають відповідь щодо розв'язку системи (3) у цьому випадку, який виражається за допомогою тригонометричних та гіперболічних функцій.

Твердження 3.1. Нехай $\sigma_2=diag(b_1,...,b_r)$, $\gamma^+=\alpha_1\sigma_2+\alpha_0 I+iC$, де α_0, α_1 - дійсні числа, матриця $C=(c_{jk})_{j,k=1}^r=-C^*$ і $c_{jj}=0$, $\forall j$, та $\kappa_0,\kappa_1,\kappa_2\in L^1[0,l]$ – дійсні функції. Тоді пара $\{a(x),\gamma(x)\}$, де $a(x)=\kappa_2(x)\gamma^2(x)+\kappa_1(x)\gamma(x)+\kappa_0(x)I$, $x\in[0,l]$ і $\gamma(\cdot)=(\gamma_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^r$, є розв'язком системи (3) тоді і тільки тоді, коли при $x\in[0,l]$ справджуються рівності (10) $K_j(x):=\int\limits_0^x\kappa_j(t)dt$, $j\in\{1,2\}$, а функції $y_{jk}(\cdot)$ при $j\neq k$, задовольняють систему

$$\begin{cases} y'_{jk}(x) = \left(b_k - b_j\right)\cdot \kappa_2(x) \sum\limits_{s=1,\, s\neq j,k}^{r} y_{js}(x) y_{sk}(x),\ x\in[0,l],\ j\neq k, \\ y_{kj}(x) = \overline{-\,y_{jk}(x)},\ x\in[0,l],\ j\neq k, \\ y_{jk}(0) = c_{jk},\ j\neq k. \end{cases} \tag{11}$$

Окрім того, якщо c_{jk} дійсні при $j \neq k$, то будь-який розв'язок системи (11) є дійсним.

Теорема 3.3. Нехай $r=4$, $\sigma_2 = diag(b_1,...,b_4)$, де b_1, b_2, b_3, b_4 – різні дійсні числа, для яких виконуються $b_4 < b_1 < b_2 < b_3$, $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$.

Позначимо $\alpha_3 = \dfrac{b_3 - b_2}{b_3 - b_1}$, $\alpha_4 = \dfrac{b_4 - b_2}{b_4 - b_1}$, $\alpha = \dfrac{c_{14}}{c_{13}}$.

Далі $c_{jk} = -c_{kj}$, $j,k \in \{1,2,3,4\}$, $c_{1k} > 0$ при $k \in \{2,3,4\}$, $c_{2k} = \sqrt{\alpha_k}\cdot c_{1k}$, $k\in\{3,4\}$, $c_{34} = 0$.

Позначимо $\beta_3 = \dfrac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$, $\beta_4 = \dfrac{b_2 - b_1}{b_4 - b_1}$, $\beta = \beta_3 + \beta_4 \alpha^2$, $F(y) = \displaystyle\int_{c_{13}}^{y} \frac{du}{u\sqrt{c_{12}^2 + \beta\cdot\left(u^2 - c_{13}^2\right)}}$,

$v(x) = F^{-1}(\rho\cdot K_2(x))$, $\rho = \sqrt{(b_3 - b_1)(b_3 - b_2)}$.

Нехай $\left(y_0^-, y_0^+\right)$ – найбільший за включенням інтервал, який містить число c_{13} і виконуються нерівності $c_{12}^2 + \beta\cdot\left(y^2 - c_{13}^2\right) > 0$, $y_0^- < y < y_0^+$.

Нехай далі $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 \in L^1[0,l]$ – дійсні функції, і $K_j(x) := \int_0^x \kappa_j(t)dt$, $j\in\{1,2\}$, причому $F\left(y_0^-\right) < \rho\cdot K_2(x) < F\left(y_0^+\right)$, $x\in[0,l]$.

Тоді пара $\{a(x), \gamma(x)\}$, де $a(x) = \kappa_2(x)\gamma^2(x) + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)I$, $x\in[0,l]$, є розв'язком системи (3) тоді і тільки тоді, коли при $x\in[0,l]$ виконуються рівності (10), а функції $y_{jk}(\cdot)$ при $j\neq k$, мають вигляд:

$$\begin{aligned} &y_{12} = \sqrt{c_{12}^2 + \beta\cdot\left(v^2 - c_{13}^2\right)}, \quad y_{13}(x) = v(x), \\ &y_{14}(x) = \alpha\cdot v(x), \quad y_{23}(x) = \sqrt{\alpha_3}\cdot v(x), \\ &y_{24}(x) = -\sqrt{\alpha_4}\cdot\alpha\cdot v(x), \quad y_{34}(x) = 0, \\ &y_{kj}(x) = y_{jk}(x), \quad 1 \le j < k \le 4. \end{aligned}$$

Розв'язок системи (3), коли $c_{12} = 0$ зображується в термінах тригонометричних та гіперболічних функцій, що доведено у наслідку 3.3.

Наслідок 3.3. Нехай в умовах теореми 3.3. $c_{12} = 0$, що визначає вигляд матриці iC таким чином $iC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \\ \overline{c_{13}} & \overline{c_{23}} & 0 & 0 \\ \overline{c_{14}} & \overline{c_{24}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді для функцій $y_{12}(x)$, $y_{13}(x)$ має місце:

$y_{12}(x)=c_{13}\cdot\sqrt{\beta}\cdot\tan(z(x))$, $y_{13}(x)=\dfrac{c_{13}}{\cos(z(x))}$, при $\beta>0$; або

$y_{12}(x)=c_{13}\cdot\sqrt{\beta}$, $y_{13}(x)=0$, при $\beta<0$; або

$y_{12}(x)=c_{13}\cdot\sqrt{\beta}\cdot\operatorname{th}(z(x))$, $y_{13}(x)=\dfrac{c_{13}}{\operatorname{ch}(z(x))}$, при $\beta<0$,

де $z(x)=c_{13}\cdot\rho\cdot\sqrt{\beta}\cdot K_2(x)$, $K_2(x):=\int\limits_0^x \kappa_2(t)dt$.

Приклад 3.4. Нехай $\gamma^+=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2i & i\\ 0 & 0 & \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i\\ -2i & -\sqrt{2}i & 0 & 0\\ -i & \sqrt{2}i & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&2b&0\\0&0&0&-b\end{pmatrix}$, $b>0$.

Тоді пара $\{a(x),\gamma(x)\}$, де $a(x)=\gamma^2(x)$, є розв'язком системи (3) тоді і тільки тоді, коли

$$\gamma(x)=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}tg(2bx) & \dfrac{2}{\cos(2bx)} & \dfrac{1}{\cos(2bx)}\\ & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} & -\dfrac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)}\\ -\dfrac{2}{\cos(2bx)} & -\dfrac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} & 0 & 0\\ -\dfrac{1}{\cos(2bx)} & \dfrac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

У *підрозділі 3.3* при $r=4$ розглянуто випадок кубічної залежності матриці функції $a(x)$ від $\gamma(x)$, а саме, коли $a(x)=\kappa(x)\cdot\gamma^3(x)$, де $\kappa\in L^1[0,l]$ – дійсна функція. Отримано явні розв'язки нелінійної системи рівнянь типу Лакса у термінах еліптичних функцій.

Теорема 3.5. Нехай $r=4$, $\gamma^+=diag(\lambda_1,...,\lambda_4)$, де $\lambda_1,...,\lambda_4$ – різні дійсні числа, такі, що $\lambda_3\, i\, \lambda_4$ знаходяться між $\lambda_1\, i\, \lambda_2$,
$a(x)=\kappa(x)\cdot\gamma^3(x)$, де $\kappa\in L^1[0,l]$ – дійсна функція,
$\sigma_2=\left(b_{jk}^{(0)}\right)_{j,k=1}^4=i\beta_{jk}$, β_{jk} – дійсні додатні числа при $j\neq k$, $b_{jj}^{(0)}=\beta_1\lambda_j+\beta_0$, $j\in\{1,...4\}$. Матриця $C(x)=\left(c_{jk}(x)\right)_{j,k=1}^4$ має нульову діагональ, матриця $B(x)$ така, що виконується $B(x)=\left(b_{jk}(x)\right)_{j,k=1}^4=B^*(x)$.

Позначимо $\psi(y)=\sqrt{\beta_{12}^2-\beta_3\cdot\left(y^2-\beta_{13}^2\right)-\beta_4\cdot\beta_{14}^2\cdot\left(\left(\dfrac{y}{\beta_{13}}\right)^{2\alpha}-1\right)}$; $F(y)=\int\limits_{\beta_{13}}^{y}\dfrac{dt}{t\cdot\psi(t)}$.

$\alpha_j=\sqrt{\dfrac{\lambda_2-\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_1}}$, $\beta_j=\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_j-\lambda_1}$, $j\in\{3,4\}$; $\alpha=\dfrac{\sqrt{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_4)}\cdot(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4)}{\sqrt{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\cdot(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}$.

Тоді елементи матриці $B(x)$ з (7) мають вигляд $b_{jk}(x) = i \cdot \exp\left(-i\beta_1 \cdot \left(\lambda_j^3 - \lambda_k^3\right) \int_0^x \kappa(t)dt \right) y_{jk}(x)$ при $j \neq k$, де дійсні функції $y_{jk}(x)$ визначаються рівностями

$$\begin{aligned} & y_{12}(x) = \psi\left(y_{13}(x)\right),\ y_{13}(x) = F^{-1}\left(\sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} \int_0^x \kappa(t)dt \right), \\ & y_{14}(x) = \beta_{14} \left(\frac{y_{13}(x)}{\beta_{13}} \right)^{\alpha}, \quad y_{2j}(x) = \alpha_j \cdot y_{1j}(x),\ j \in \{3, 4\}, \\ & y_{34}(x) = 0,\ y_{kj}(\cdot) = y_{jk}(\cdot),\ j \neq k, \end{aligned} \tag{12}$$

де $F^{-1}(\cdot)$ − функція, обернена до функції $F(\cdot)$.

Розв'язок (12) при додаткових умовах може бути представлений за допомогою еліптичних функцій Якобі, що показано у наслідку 3.4.

Наслідок 3.4. В умовах теореми 3.5. визначимо $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = a$, $\lambda_3 = -b$, $\lambda_4 = b$, де $a, b \in \mathrm{R}$ таким чином, щоб задовольнялася умова $0 < a < 3b$, крім цього $\beta_{13}{}^2 = \frac{1}{2}$, $\beta_{14}{}^2 = 2$, $\beta_{12}{}^2 = \frac{3ab - a^2}{a^2 - b^2}$.

Тоді розв'язок $y_{jk}(x)$ при $j \neq k$ (12) набуває вигляду

$$y_{12}(x) = -i\sqrt{\frac{2a}{a+b}} \cdot \frac{\mathrm{cn}\left(z(x)+N,k\right) \cdot \mathrm{dn}\left(z(x)+N,k\right)}{\mathrm{sn}\left(z(x)+N,k\right)}, \qquad y_{13}(x) = \mathrm{sn}\left(z(x)+N,k\right),$$

$$\mathrm{y}_{14}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{sn}\left(z(x)+N,k\right)},\ y_{23}(x) = k \cdot \mathrm{sn}\left(z(x)+N,k\right), \qquad \mathrm{y}_{24}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{k} \cdot \mathrm{sn}\left(z(x)+N,k\right)},$$

де $k^2 = \frac{a+b}{a-b}$, $z(x) = -i\sqrt{2a \cdot (a-b)} \cdot \int_0^x \kappa(t)dt$, $N = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}}$.

V. У *четвертому розділі* пропонується інший підхід до вивчення системи (1) типу Лакса, який ґрунтується на описі поведінки власних вектор-функцій $\{h_k(x)\}_1^r$ матриці $a(x)$, яка має простий спектр.

Теорема 4.1. Нехай матриця-функція $a(x)$ розміру $r \times r$ має простий спектр $\sigma(a(x)) = \{\mu_k(x), 1 \leq k \leq r\}$, а відповідні власні вектори $h_k(x)$ такі, що $a(x)h_k(x) = \mu_k(x)h_k(x)$. Якщо матриця-функція $\gamma(x)$ є розв'язком системи рівнянь (3), а ξ_k є її власними числами (які не залежать від x), то власні функції $\{h_k(x)\}_1^r$ є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} h_k'(x) = i\sum_{s \neq k} \beta_{sk}(x) \dfrac{\mu_s(x) - \mu_k(x)}{\xi_k - \xi_s} h_s(x),\ 1 \leq k, s \leq r, \\ h_k(0) = h_k^0, \end{cases} \tag{13}$$

де $\beta_{sk}(x)$ мають представлення $\beta_{sk}(x) = \langle \sigma_2 h_k(x), h_s(x) \rangle$ при $\boldsymbol{1 \leq k, s \leq r}$.

У випадку $r=3$ та при дії оператора σ_2 на базисні вектори за правилом:

$$\begin{cases} \sigma_2 h_1(x) = \psi(x) h_1(x), \\ \sigma_2 h_2(x) = \upsilon(x) h_3(x), \\ \sigma_2 h_3(x) = \overline{\upsilon}(x) h_2(x), \end{cases} \tag{14}$$

де $\psi(x)$ – дійсна функція, а $\upsilon(x)$ – комплекснозначна функція, система (13) набуває вигляду:

$$\begin{cases} h_1'(x) = 0, \\ h_2'(x) = ic(x) h_3(x), \\ h_3'(x) = i\overline{c}(x) h_3(x), \\ h_i(0) = h_i^0,\ i = 1, 2, 3; \end{cases} \tag{15}$$

де $c(x) = \dfrac{\mu_3(x) - \mu_2(x)}{\xi_2 - \xi_3} \cdot \upsilon(x)$ – комплекснозначна функція.

Теорема 4.2. Якщо $c(x) = a(x) + ib(x)$ – комплекснозначна функція, де $a(x)$, $b(x)$ дійсні, лінійно залежні функції, тобто $\exists\, \lambda, \mu : \lambda\mu \neq 0$ і $\lambda a(x) + \mu b(x) \equiv 0$, то система рівнянь (15) має єдиний розв'язок

$$\begin{cases} h_1(x) = h_1^0, \\ h_2(x) = h_2^0 \cos\varphi(x) + h_3^0 \dfrac{-b(x) + ia(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}} \sin\varphi(x), \\ h_3(x) = h_3^0 \cos\varphi(x) + h_2^0 \dfrac{b(x) + ia(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}} \sin\varphi(x), \end{cases}$$

де $\varphi(x) = \int_0^x \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}\,dt$.

Якщо відмовитися від умови лінійної залежності $a(x)$ та $b(x)$, то має місце теорема 4.3.

Теорема 4.3. Якщо $c(x) = a(x) + ib(x)$ – комплекснозначна функція, де $a(x)$, $b(x)$ дійсні, такі, що $a'(x)b(x) - a(x)b'(x) = k\sqrt{\left(a^2(x) + b^2(x)\right)^3}$, де k – константа, то система рівнянь (13) має єдиний розв'язок

$$\begin{cases} h_1(x) = h_1^0, \\ h_2(x) = \dfrac{b(x) - ia(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}} \left(\sqrt{\lambda_1}\left(B_1 e^{\varphi(x)} - B_2 e^{-\varphi(x)}\right) + \sqrt{\lambda_2}\left(B_3 e^{\psi(x)} - B_4 e^{-\psi(x)}\right)\right), \\ h_3(x) = B_1 e^{\varphi(x)} + B_2 e^{-\varphi(x)} + B_3 e^{\psi(x)} + B_4 e^{-\psi(x)}, \end{cases}$$

де B_k комплексні числа $k \in \{1, \dots, 4\}$ визначаються з початкових умов, $\varphi(x) = \sqrt{\lambda_1} \int_0^x \sqrt{a^2(p) + b^2(p)}\,dp$, $\psi(x) = \sqrt{\lambda_2} \int_0^x \sqrt{a^2(p) + b^2(p)}\,dp$, λ_i такі, що виконується $\lambda_i^2 = \dfrac{-\left(2 + k^2\right) \pm \sqrt{k^2\left(k^2 + 4\right)}}{2}$, $i \in \{1, 2\}$.

Підрозділ 4.3 присвячено аналізу системи рівнянь (13) у випадку $r=3$ та при дії оператора σ_2 на базисні вектори за правилом:

$$\begin{cases} \sigma_2 h_1(x) = \psi(x)h_1(x) + \rho(x)h_3(x), \\ \sigma_2 h_2(x) = \qquad\qquad\quad \upsilon(x)h_3(x), \\ \sigma_2 h_3(x) = \overline{\rho(x)}h_1(x) + \overline{\upsilon}(x)h_2(x), \end{cases}$$

де $\psi(x)$ – дійсна функція, а $\upsilon(x)$, $\rho(x)$ – комплекснозначні функції. Таким чином, система (13) має вигляд:

$$\begin{cases} h_1'(x) = ik(x)h_3(x), \\ h_2'(x) = ic(x)h_3(x), \\ h_3'(x) = i\bar{k}(x)h_1(x) + i\bar{c}(x)h_2(x), \\ h_i(0) = h_i^0,\ i = 1, 2, 3; \end{cases} \tag{16}$$

де $c(x) = \dfrac{\mu_3(x) - \mu_2(x)}{\xi_2 - \xi_3} \cdot \upsilon(x)$, $k(x) = \dfrac{\mu_1(x) - \mu_3(x)}{\xi_3 - \xi_1} \cdot \rho(x)$.

Лема 4.3. Якщо $c(x) = c$, $k(x) = k$ – константи, то система рівнянь (16) має єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} h_1(x) = h_1^0 + \dfrac{ikh_3^0}{\sqrt{k^2+c^2}}\sin\left(\sqrt{k^2+c^2}\,x\right) + \dfrac{k^2h_1^0 + ckh_2^0}{k^2+c^2}\cos\left(\sqrt{k^2+c^2}\,x - 1\right), \\ h_2(x) = h_2^0 + \dfrac{ich_3^0}{\sqrt{k^2+c^2}}\sin\left(\sqrt{k^2+c^2}\,x\right) + \dfrac{ckh_1^0 + c^2h_2^0}{k^2+c^2}\cos\left(\sqrt{k^2+c^2}\,x - 1\right), \\ h_3(x) = h_3^0\cos\left(\sqrt{k^2+c^2}\,x\right) + \dfrac{ikh_1^0 + ich_2^0}{\sqrt{k^2+c^2}}\sin\left(\sqrt{k^2+c^2}\,x\right). \end{cases}$$

Лема 4.4. Якщо $c(x)$, $k(x)$ – дійсні функції, то для розвязків системи (16) виконується співвідношення

$$\|h_1(x)\|^2 + \|h_2(x)\|^2 + \|h_3(x)\|^2 = const.$$

Теорема 4.5. Якщо $c(x)$, $k(x)$ – дійсні функції, $c(x)\cos\varphi(x) + k(x)\sin\varphi(x) = 0$, де $\varphi(x)$ – диференційовна функція, причому $\varphi'(x) = C\sqrt{k^2(x) + c^2(x)}$, C – константа, то система рівнянь (16) має єдиний розв'зок

$$\begin{cases} h_1(x) = h_1^0\cos\beta(x) - Ch_2^0\sin\beta(x) - i\left(1 - C^2\right)h_3^0\sin\beta(x)\cos\varphi(x), \\ h_2(x) = h_2^0\cos\beta(x) + Ch_1^0\sin\beta(x) + i\left(1 - C^2\right)h_3^0\sin\beta(x)\sin\varphi(x), \\ h_3(x) = \dfrac{h_1^0 - iCh_3^0\sin\varphi(x)}{\cos\varphi(x)}\sin\alpha + ih_3^0\cos\beta(x), \end{cases}$$

де $\beta(x) = \sqrt{C^2+1}\int\limits_0^x \sqrt{k^2(t) + c^2(t)}dt.$

У *підрозділі 4.4* досліджується основна система рівнянь у випадку $r=3$, матриця $a(x)$ має кратний спектр, а σ_2 діє на базисні вектори $\{h_k(x)\}_1^r$ за формулою (14). Показано, що у цьому випадку розв'язок виражається за допомогою тригонометричних функцій.

VI. *П'ятий розділ* роботи присвячено аналізу системи нелінійних рівнянь (1) типу Лакса у припущенні, що $J \neq I$ і $\alpha(x) = 0$.

У наступній теоремі отримано рівняння для власних функцій матриці $Ja(x)$ в термінах власних значень $Ja(x)$ у випадку простого спектра початкових даних.

Теорема 5.1. Нехай $\mu_k(x)$ – комплекснозначні власні значення матриці $Ja(x)$, а $\{h_k(x)\}_1^r$ відповідний базис власних векторів, причому $\mu_k(x) \neq \overline{\mu}_s(x)$ $(k \neq s)$. Якщо $\xi_k(x)$ – комплекснозначні власні значення оператора $\gamma(x)J$, тоді справедливою є наступна система рівнянь:

$$\begin{cases} h_k'(x) = i\sum_{s\neq k} \alpha_{sk}(x)\dfrac{\mu_s(x)-\mu_k(x)}{\xi_k(x)-\overline{\xi}_s(x)}h_s(x), 1 \le k,s \le r, \\ h_k(0) = h_k^0, \end{cases} \tag{17}$$

де $\alpha_{sk}(x) = \langle \sigma_2 Jh_k(x), Jh_s(x) \rangle$ при $1 \le k,s \le r$.

У *підрозділі 5.2* знайдено всі розв'язки системи рівнянь (17) у випадку, коли $\sigma_2 J$ на базисні вектори $\{h_k(x)\}_1^r$ діє за формулами

$$\begin{cases} \sigma_2 Jh_1(x) = \psi(x)h_1(x), \\ \sigma_2 Jh_2(x) = \upsilon(x)h_3(x), \\ \sigma_2 Jh_3(x) = \overline{\upsilon}(x)h_2(x), \end{cases}$$

де $\psi(x)$ – дійсна функція, а $\upsilon(x)$ – комплекснозначна функція.
В цьому випадку система рівнянь (17) приймає вигляд, аналогічний (15), тому для неї будуть вірними усі результати підрозділу 3.2.

У *підрозділі 5.3* знайдено всі розв'язки системи рівнянь (17) у випадку, коли $\sigma_2 J$ на базисні вектори $\{h_k(x)\}_1^r$ діє за формулами

$$\begin{cases} \sigma_2 Jh_1(x) = \psi(x)h_1(x) + \rho(x)h_3(x), \\ \sigma_2 Jh_2(x) = \qquad\qquad\qquad\quad \upsilon(x)h_3(x), \\ \sigma_2 Jh_3(x) = \overline{\rho}(x)h_1(x) + \overline{\upsilon}(x)h_2(x), \end{cases}$$

де $\psi(x)$ – дійсна функція, а $\upsilon(x)$, $\rho(x)$ – комплекснозначні функції.
В цьому випадку система рівнянь (17) приймає вигляд, аналогічний (16), тому для неї будуть вірними усі результати підрозділу 4.3. Встановлено, що в даному випадку розв'язок системи (17) виражається через тригонометричні функції від аргументу, що залежить від x, та будується за матрицею σ_2 .

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена дослідженню системи нелінійних диференціальних рівнянь типу Лакса, на базі якої ґрунтується побудова трикутних моделей для комутативних систем лінійних несамоспряжених операторів. В дисертації отримано наступні результати:

1. Отримано всі розв'язки нелінійної системи диференціальних рівнянь типу Лакса у випадку $r = 2$. При розв'язанні пред'явлено незалежні параметри, у термінах яких описуються усі розв'язки системи $\{a(x), \gamma(x)\}$, якими у даному випадку є один з матричних елементів матриці-функції $a(x)$ та елементи матриці σ_2, а також початкові умови γ^+.
2. Знайдено опис загальних ізоспектральних перетворень системи типу Лакса та вказано покроковий метод побудови усіх розв'язків системи. Знайдено загальний вигляд розв'язку нелінійної системи диференціальних рівнянь у випадку лінійної залежності матриці-функції $a(x)$ від $\gamma(x)$.
3. Знайдено всі розв'язки системи типу Лакса у випадку поліноміальної залежності матриці-функції $a(x)$ від $\gamma(x)$ при $r = 3, 4$, які в окремих випадках записуються в термінах еліптичних функцій. Незалежними параметрами, в термінах яких одержано розв'язки нелінійної системи диференціальних рівнянь типу Лакса у даному випадку, є функції, що є коефіцієнтами відповідного поліному.
4. Побудовано розв'язки системи типу Лакса $r = 3$ на базі аналізу власних значень матриці $a(x)$. У даному випадку роль незалежних параметрів відіграють власні значення $\{\mu_k(x)\}$ матриці-функції $a(x)$ та власні значення $\{\xi_k\}$ матриці початкових значень γ^+. Розв'язки можуть бути представлені за допомогою тригонометричних функцій.
5. Побудовано розв'язки системи типу Лакса $r = 3$ на базі аналізу власних значень матриці $Ja(x)$ в термінах її власних значень у випадку простого спектра початкових даних та знайдено їх розв'язки. Встановлено, що розв'язки можуть бути представлені через тригонометричні функції.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Олейник Е. В. Решение нелинейных уравнений специального вида / Е. В. Олейник // Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика та механіка». – 2012. – № 1018. – С. 62–75.

2. Лунев А. А., Олейник Е. В. Об одном классе систем уравнений типа Лакса / А. А. Лунев, Е. В. Олейник // Український математичний вісник. – 2013. – Т. 10. – № 4. – С. 507–531; English translation in: Lunyov Anton A., Oliynyk Elena V. On one class of systems of Lax-type equations / A. A. Lunyov, E. V. Oliynyk // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 198. – № 4. – P. 420-437.

3. Олейник Е. В. Об интегрировании нелинейной системы дифференциальных уравнений / Е. В. Олейник // Український математичний журнал. – 2014. – Т. 66.– № 9. – С. 1223–1234.

4. Lunyov A. A., Oliynyk E. V. On Integration of One Class of Systems of Lax-Type Equations / A. A. Lunyov, E. V. Oliynyk // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2014. – Vol. 11. – № 1. – P.45-62.

5. Лунев А. А., Олейник Е. В. Об одном классе систем уравнений типа Лакса / А. А. Лунев, Е. В. Олейник // Доповіді НАН України. – 2015. – № 1. – С. 25–30.

6. Олейник Е. В. Исследование одного класса систем уравнений типа Лакса / Е. В. Олейник // Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii : тез. доповідей конф., 14-17 листопада 2012 р. – Донецьк. – С. 57-58.

7. Oliynyk O. V. The study of one class non-linear equations of a special kind / O. V. Oliynyk // Spectral Theory and Differential Equations (STDE-2012), International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday : Abstracts of conference re-ports, August 20-24, 2012. – Kharkiv. – P. 82-83.

8. Олейник Е. В. Некоторые решения специальной системы нелинейных уравнений / Е. В. Олейник // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях "Тараповские чтения – 2012" : тез. доповідей конф., 01-31 мая 2012 г., Харьков. – С. 83.

9. Олейник Е. В. Решение нелинейных уравнений специального вида / Е. В. Олейник // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука : тез. доповідей конф., 19-21 квітня 2012 р., Київ. – С. 328.

10. Олейник Е. В. О собственных векторах одного класса систем уравне-ний типа Лакса / Е. В. Олейник // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські чи-тання DIF-2013. Диференціальні рівняння теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка : тез. доповідей конф., 23-30 червня 2013 р. – Севастополь, 2013. – С. 148.

11. Олейник Е. В. Об интегрировании одной нелинейной системы диффе-ренциальных уравнений/ Е. В. Олейник // Современные проблемы математики "Тараповские чтения – 2013" : тез. докладов международной школы-конф., 29 сентября – 4 октября 2013 г., Харьков. – С. 105.

АНОТАЦІЯ

Олійник О. В. Нелінійні диференціальні рівняння та модельні зображення систем лінійних несамоспряжених операторів. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Харківський наці-

ональний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2015.

Дисертацію присвячено дослідженню системи нелінійних диференціальних рівнянь типу Лакса, на базі якої ґрунтується побудова трикутних моделей для комутативних систем лінійних несамоспряжених операторів. Дана система рівнянь типу Лакса еквівалентна задачі опису загальних ланцюжків інваріантних підпросторів комутативних систем несамоспряжених обмежених операторів, існування яких випливає з відомої теореми В. Ломоносова. Загальне дослідження системи типу Лакса дотепер не проводилося за виключенням окремих випадків (Л. Л. Ваксман, В. О. Золотарьов, В. Вінніков).

Отримано всі розв'язки системи типу Лакса у випадку $r=2$. Знайдено опис загальних ізоспектральних перетворень системи типу Лакса та вказано покроковий метод побудови усіх розв'язків системи. Знайдено загальний вигляд розв'язку нелінійної системи диференціальних рівнянь у випадку лінійної залежності матриці-функції $a(x)$ від $\gamma(x)$. Доведено, що у випадку поліноміальної залежності матриці-функції $a(x)$ від $\gamma(x)$ при $r=3,4$ деякі розв'язки записуються в термінах еліптичних функцій.

Для нелінійної матричної $r\times r$ системи диференціальних рівнянь типу Лакса у випадку $r=2,3,4$ пред'явлено конкретні розв'язки та вказано незалежні параметри, в термінах яких вони записуються.

Ключові слова: трикутні моделі, несамоспряжені оператори, еліптичні функції, комутативні системи.

АННОТАЦИЯ

Олейник Е. В. Нелинейные дифференциальные уравнения и модельные представления систем линейных несамосопряженных операторов. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, 2015.

Диссертация посвящена исследованию системы нелинейных дифференциальных уравнений типа Лакса, на решениях которых базируется построение треугольных моделей коммутативных систем линейных несамосопряженных ограниченных операторов. Данная система уравнений типа Лакса эквивалентна задаче описания общих цепочек инвариантных подпространств коммутативных систем несамосопряженных ограниченных операторов, существование которых следует из известной теоремы В. Ломоносова. Общие исследования системы типа Лакса не проводились за исключением частных случаев (Л. Л. Ваксман, В. А. Золотарев, В. Винников). Поэтому естественным является восполнение этого пробела в данной области дифференциальных уравнений.

В диссертации в двумерном случае дано полное описание всех решений нелинейной системы дифференциальных уравнений типа Лакса. При решении в этом случае предъявлены независимые параметры, в терминах которых описываются все решения системы $\{a(x), \gamma(x)\}$. Таковыми в данном случае являются один из матричных элементов матрицы-функции $a(x)$ и элементы матрицы σ_2, а также начальные условия γ^+. При $r \geq 2$ в работе указана пошаговая процедура решения системы типа Лакса, основанная на изоспектральных преобразованиях. При полиномиальной зависимости матрицы-функции $a(x)$ от решения $\gamma(x)$ при $r = 3, 4$, получены явные решения изучаемой нелинейной системы дифференциальных уравнений, которые в частных случаях выражаются в терминах эллиптических функций Якоби, или тригонометрических, или гиперболических функций. При $r = 3, 4$ в качестве независимых параметров выбираются коэффициенты полинома $a(x) = \kappa_{r-1}(x)\gamma^{r-1}(x) + ... + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)I$. Если $a(x)$ выражается через $\gamma(x)$ линейным образом, то решение изучаемой системы дается в общем виде для любого $r \in \mathrm{N}$. Таким образом, при $r = 2, 3, 4$ указаны независимые параметры решения нелинейной системы дифференциальных уравнений типа Лакса.

В работе предложен и другой способ нахождения решений нелинейной системы дифференциальных уравнений, основанный на исследовании поведения собственных вектор-функций весовой матрицы. Для этих вектор-функций получена система дифференциальных уравнений, для которой в случае $r = 3$ найдены все решения. При специальном выборе параметров полученные решения выражаются через тригонометрические функции. В случае $J \neq I$ этот метод позволяет при $r = 3$ указать явные решения изучаемой нелинейной системы дифференциальных уравнений типа Лакса. Предложенный метод решения, основанный на изучении поведения собственных векторов весовой матрицы-функции, позволил дать ряд других решений в отличие от описанного ранее метода пошаговой процедуры. В этом случае роль независимых параметров, в терминах которых записываются решения нелинейной системы дифференциальных уравнений, играют собственные числа $\{\mu_k(x)\}$ матрицы-функции $a(x)$, собственные числа $\{\xi_k\}$ начальной матрицы γ^+ и функции, отвечающие матричным элементам σ_2 в базисе собственных векторов матрицы $a(x)$.

Ключевые слова: треугольные модели, несамосопряженные операторы, эллиптические функции, коммутативные системы.

ANNOTATION

Oliynyk E. V. Nonlinear differential equations and model representation of systems of linear non-selfadjoint operators – Manuscript.

Thesis of the dissertation for obtaining of the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.02 – differential equations. – V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2015.

The thesis is dedicated to the study of the system of non-linear differential Lax equations, on which the construction of triangular models for commutative systems of linear non-selfadjoint operators is based. This system of Lax equations is equivalent to the problem of description of general chains of invariant subspaces of commutative systems of non-selfadjoint bounded operators, the existence of which follows from the well-known theorem by V. Lomonosov. General study of a system of Lax equations was not conducted, except for some particular cases (L. L. Vaksman, V. A. Zolotarev, V. Vinnikov).

All the solutions of a Lax system in the case of $r = 2$ are obtained. General isospectral transforms of a Lax system are described and the step-by-step method of construction of all the solutions of the system is introduced. General form of the solution of non-linear system of differential equations in the case of linear dependency of the matrix-function $a(x)$ on $\gamma(x)$ is found. In the case of polynomial dependency of a matrix-function $a(x)$ on $\gamma(x)$, as $r = 3, 4$, some solutions are written in terms of elliptic functions.

For the non-linear matrix $r \times r$ system of differential Lax equations in the case of $r = 2, 3, 4$ concrete solutions are produced and independent parameters, in terms of which they are written, are shown.

Keywords: triangular model, non-selfadjoint operators, elliptic functions, commutative systems.