МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

Ковальов Юрій Григорійович

УДК 517.984.7

НЕВІД'ЄМНІ САМОСПРЯЖЕНІ РОЗШИРЕННЯ І МОДЕЛІ ТОЧКОВИХ ВЗАЄМОДІЙ

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат дисертації
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків–2015

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у Східноукраїнському національному університеті імені Володимира Даля Міністерства освіти і науки України, м. Сєвєродонецьк.

Науковий керінвик: доктор фізико-математичних наук, професор
Арлінський Юрій Мойсейович,
Східноукраїнський національний університет
імені Володимира Даля
Міністерства освіти і науки України,
м. Сєвєродонецьк,
завідувач кафедри математичного аналізу

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Сторож Олег Георгійович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка
Міністерства освіти і науки України,
професор кафедри математичного
та функціонального аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор
Золотарьов Володимир Олексійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
імені Б. І. Вєркіна НАН України, м. Харків,
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій

Захист відбудеться 25 грудня 2015 р. о 15-15 на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4, ауд. 6-49.

З дисертацією можна ознайомитися у Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Автореферат розісланий 18 листопада 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованної вченої ради Ігнатович С. Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія самоспряжених та квазі-самоспряжених розширень невід'ємних симетричних операторів грає важливу роль в теорії лінійних операторів у гільбертових просторах та її застосуваннях. Фундаментальні результати було отримано у роботах Дж. фон Неймана, К. Фрідріхса та М. Г. Крейна, М. І. Вішика, М. Ш. Бірмана. Фрідріхс довів, що напівобмежений знизу симетричний оператор має принаймні одне самоспряжене розширення з тією ж нижньою межею. Використовуючи дробово-лінійні перетворення, Крейн звів задачу до проблеми опису усіх самоспряжених стискаючих розширень нещільно визначеного ермітова стиску. Серед усіх невід'ємних самоспряжених розширень Крейн відмітив два екстремальних – максимальне (жорстке) та мінімальне (м'яке), у сенсі асоційованих квадратичних форм. Пізніше Бірман та Вішик доповнили результати Крейна для додатно визначеного оператора.

Інший підхід це метод граничних трійок, початок якому поклав J. W. Calkin у 1939 році. Метод просторів граничних значень або граничних трійок для опису областей визначення напівобмежених, зокрема невід'ємних, самоспряжених розширень, а також максимальних акретивних квазі-самоспряжених розширень невід'ємних симетричних операторів отримав розвиток в працях М. І. Вішика, Ф. С. Рофе-Бекетова, В. Е. Лянце, А. Н. Кочубея, М. Л. Горбачука та В. І. Горбачук, В. А. Михайлеця, О. Г. Сторожа, В. О. Деркача, М. М. Маламуда, Ю. М. Арлінського, Е. Р. Цекановського, С. О. Кужеля, Л. П. Нижника, J. F. Brasche, S. Hassi, H. Neidhardt, H. S. V. de Snoo. В роботах В. О. Деркача та М. М. Маламуда отримано абстрактні граничні умови для невід'ємних самоспряжених та максимальних акретивних квазі-самоспряжених розширень у термінах введеної ними функції Вейля, пов'язаної з граничною трійкою. У 2005 році Арлінський та Цекановський запропонували новий підхід до опису усіх невід'ємних самоспряжених розширень невід'ємного симетричного оператора у внутрішніх термінах.

В теорії спектрального аналізу лінійних операторів та в теорії диференціальних рівнянь буває зручним представлення оператора (диференціального рівняння) в дивергентній формі, тобто у вигляді добутку $L_2^*L_1$, де L_1, L_2 замкнені щільно визначені лінійні оператори та $L_1 \subset L_2$. У працях V. Prokaj, Z. Sebestyén та J. Stochel показано, що кожний невід'ємний симетричний оператор штучним чином може бути представлений у дивергентній формі, а також отримано опис екстремальних самоспряжених розширень. Дивергентна форма невід'ємного симетричного оператора дозволяє, зокрема, знайти граничну трійку, зручну для опису невід'ємних самоспряжених розширень у термінах абстрактних граничних умов.

В останні 50 років теорія самоспряжених розширень невід'ємного симетричного оператора з успіхом застосовується для дослідження квантовомеханічних моделей точкових взаємодій. Це моделі, що описують рух елементарної частинки у полі точкового потенціала. Операторна постановка задачі пов'язана з дослідженням формального симетричного оператора (оператора Шредінгера) – вільного гамільтоніана, збуреного дельта-функціями Дірака, що зосереджені у точках взаємодій. Для моделі з однією точкою взаємодії Березін та Фаддєєв першими у 1961 році запропонували асоціювати із дельта-збуренням вільного гамільтоніана самоспряжені розширення невід'ємного симетричного оператора з нульовими граничними умовами у точці взаємодії. Моделі точкових взаємодій вивчались в роботах S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, W. Kirsh, O. Ogurisu, G. Stolz, J. Weidmann, В. М. Адамяна, Ю. М. Арлінського, Ю. М. Березанського, А. Н. Кочубея, А. С. Костенко, В. Д. Кошманенко, С. А. Кужеля, В. Е. Лянце, М. М. Маламуда, В. А. Михайлеця, Л. П. Ніжніка та інших.

Виявляється актуальним розвиток методу, запропонованого Арлінським та Цекановським, для опису усіх квазі-самоспряжених m-акретивних та m-секторіальних розширень невід'ємного симетричного оператора, дослідження зображень невід'ємних симетричних операторів у дивергентній формі та параметризація їх невід'ємних самоспряжених розширень, опис усіх самоспряжених та квазі-самоспряжених розширень операторів Шредінгера з дельта-потенціалом, а також дослідження властивостей систем дельта-функцій Дірака.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана згідно з планами наукової роботи кафедри математичного аналізу Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля та в рамках держбюджетних тем "Аналітичні функції в спектральній теорії лінійних операторів в гільбертовому просторі" (номер державної реєстрації № 0108U000152), "Перетворення Шура для операторно-значних аналітичних функцій та його застосування до лінійних систем та проблеми моментів" (номер державної реєстрації № 0111U000039) та в рамках держбюджетної теми "Спектральні проблеми теорії диференціальних і різницевих операторів" (номер державної реєстрації №0115U000556) у Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова.

Мета та задачі дослідження. Основною метою дисертації є встановлення нових властивостей невід'ємних симетричних операторів та їх невід'ємних самоспряжених розширень, нових методів опису квазі-самоспряжених m-акретивних та m-секторіальних розширень невід'ємних симетричних щільно визначених операторів та застосування отриманих результатів до симетричних операторів у моделях квантової механіки, пов'язаних з точковими взаємодіями. Задачами є:

- подальше дослідження симетричних операторів, що мають дивергентне представлення, та їх невід'ємних самоспряжених розширень, зокрема, екстремальних розширень Фрідріхса та Крейна;

- параметризація у внутрішніх термінах усіх квазі-самоспряжених m-акретивних та m-секторіальних розширень невід'ємних симетричних щільно визначених операторів;

- опис розширень симетричних операторів у моделях точкових взаємодій у випадку нескінченного числа точок взаємодій, встановлення критеріїв диз'юнктності та трансверсальності розширень Фрідріхса та Крейна;

- дослідження на базисність Риса систем дельта-функцій Дірака у замиканні їх лінійних оболонок в просторах Соболєва $W_2^{-1}(\mathbb{R})$, $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$, $d = 2, 3$;

- побудова граничних трійок та обчислення відповідних функцій Вейля для спряженого мінімального оператора Шредінгера у випадку нескінченного числа точкових взаємодій на прямій, на площині та у просторі.

Методи дослідження. У дисертації використовується та розвивається підхід Арлінського-Цекановського до опису усіх невід'ємних самоспряжених розширень невід'ємних симетричних операторів, метод граничних пар та трійок для спряженого оператора, методи опису екстремальних розширень операторів у дивергентній формі.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертації отримані такі нові наукові результати:

- доведено, що кожний замкнений щільно визначений невід'ємний симетричний оператор $\dot{A}$, що має диз'юнктні невід'ємні самоспряжені розширення, припускає нескінченно багато факторизацій у вигляді $\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$, де $\mathcal{L}_0$ – замкнений невід'ємний симетричний оператор та $\mathcal{L}$ його невід'ємне самоспряжене розширення; схожа факторизація встановлена для нещільно визначеного замкненого невід'ємного симетричного оператора з нескінченними індексами дефекту, у випадку скінченних індексів дефекту доведена неможливість факторизації такого типу;

- наведена конструкція невід'ємних щільно визначених симетричних операторів $\mathcal{L}_0$ та їх невід'ємних самоспряжених розширень $\mathcal{L}$ таких, що $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}\mathcal{L}_0) = \{0\}$, зокрема, $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^2) = \{0\}$;

- встановлено певний зв'язок просторів Соболєва $W_2^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 1, 2, 3$, $W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y)$ та гільбертова простору ℓ_2, за допомогою якого отримані результати щодо базисності Риса деяких систем функцій;

- доведено, що системи дельта-функцій Дірака $\{\delta(\cdot - y),\ y \in Y \subset \mathbb{R}\} \subset W_2^{-1}(\mathbb{R})$, $\{\delta(\cdot - y),\ y \in Y \subset \mathbb{R}^d,\ d = 2,\ 3\} \subset W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$ та $\{\delta'(\cdot - y),\ y \in Y\} \subset W_2^{-2}(\mathbb{R})$, $\{\delta(\cdot - y), \delta'(\cdot - y),\ y \in Y\} \subset W_2^{-2}(\mathbb{R})$ утворюють базиси

Риса у своїх лінійних оболонках, якщо Y – зчисленна множина точок у $\mathbb{R}^d$ та $\inf\{|y-y'|,\ y,y' \in Y, y \neq y'\} > 0$;

- досліджено властивості диз'юнктності та трансверсальності розширень Фрідріхса та Крейна мінімальних операторів Шредінгера, що відповідають нескінченному числу точкових взаємодій: доведено трансверсальність для випадків δ, δ' та $\delta - \delta'$ взаємодій на прямій; доведено диз'юнктність, але не трансверсальність у випадку δ взаємодій на площині; доведено диз'юнктність та встановлено критерій трансверсальності у випадку δ взаємодій у просторі;

- розвинено метод Арлінського-Цекановського для параметризації у внутрішніх термінах усіх квазі-самоспряжених m-акретивних та m-секторіальних розширень невід'ємного симетричного щільно визначеного оператора, у тому числі описано усі квазі-самоспряжені m-акретивні та m-секторіальні гамільтоніани, що відповідають скінченному числу δ' взаємодій;

- дано опис розширень Фрідріхса та Крейна операторів у дивергентній формі, зокрема, дано опис розширень Фрідріхса та Крейна мінімальних операторів Шредінгера A_0, A' та H_0, що відповідають нескінченному числу δ, δ' та $\delta - \delta'$ взаємодій на прямій;

- однаковим чином побудовано граничні трійки та обчислено функції Вейля для точкових взаємодій на площині та у просторі; побудовано базисні граничні трійки та надано параметризацію усіх невід'ємних самоспряжених розширень для операторів A_0, A' та H_0.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Отримані результати можуть бути застосовані у теорії розширень невід'ємних симетричних операторів та її застосуванні до задач математичної фізики.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та плану досліджень, постановка задач та формулювання основних гіпотез належить науковому керівнику. Викладені в дисертації основні результати отримані автором самостійно. У статті [1] автору дисертації належить частина теореми 3, що стосується m-акретивного розширення, та розділ "1-D Schrodinger operator with δ' interactions" з теоремою 5. У статті [3] автору дисертації належить доведення теореми 3.4 та розділ 4. У статті [4] автору дисертації належить доведення теореми 3.4 (для m-акретивного розширення) і твердження 3.8 та розділи 4 і 5. У статті [5] ідея конструкції в розділі 5 належить науковому керівнику, а її реалізація – автору дисертації, теореми 1.1, 1.2 також доведено автором.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на таких конференціях:

- Міжнародна конференція – 21а Кримська осіння математична школа-симпозіум (КРОМШ-2010), 17-29 вересня 2010 р., с. Батиліман, м. Севастополь, Крим, Україна;

- Міжнародна конференція по функціональному аналізу, присвячена 90-річчю В. Е. Лянце, 17-21 листопада 2010 р., м. Львів, Україна;

- Міжнародна конференція – VIII літня математична школа "Алгебра, Топологія, Аналіз та застосування", 5-15 липня 2011 р., смт. Лазурне, Херсонська область, Україна;

- 8а Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 60-річчю від дня народження професора В. М. Усенка, 5-12 липня 2011 р., м. Луганськ, Україна;

- Міжнародна конференція – 22а Кримська осіння математична школа-симпозіум (КРОМШ-2011), 17-29 вересня 2011 р., с. Батиліман, м. Севастополь, Крим, Україна;

- Міжнародна конференція, присвячена 120-річчю С. Банаха, 17-21 вересня 2012 р., м. Львів, Україна;

- Кримська міжнародна математична конференція (КММК-2013), 23 вересня – 3 жовтня 2013 р., м. Судак, Крим, Україна.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 7 статтях у фахових виданнях [1]–[7] та у 7 тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях [8]–[14].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, шести розділів, що поділені на підрозділи, висновків та списку літератури, що займає 10 сторінок та містить 96 найменувань. Обсяг роботи складає 140 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та задачі дослідження, відмічено наукову новизну отриманих результатів та наведено їх апробацію.

Перший розділ містить огляд літератури за темою дисертації: теорія самоспряжених та квазі-самоспряжених розширень невід'ємних симетричних операторів, оператори у дивергентній формі та їх екстремальні розширення, ланцюги оснащених просторів.

З **другого розділу** починається викладення основних результатів. У другому розділі досліджуються оператори у дивергентній формі та їх самоспряжені розширення, зокрема екстремальні розширення Фрідріхса та

Крейна. Нехай лінійні оператори L_1 та L_2 задовольняють умови $L_1,\ L_2 \in \mathcal{C}(H, \mathfrak{H})$ та $L_1 \subset L_2$, тоді оператор вигляду

$$\mathcal{A} = L_2^* L_1 \tag{1}$$

називається *оператором у дивергентній формі.* У підрозділі 2.1 розвинено підхід Арлінського Ю. М. до опису екстремальних розширень операторів у дивергентній формі.

Теорема 2.1.1 *Нехай оператори L_1 та L_2 задовольняють умови:*

$$L_1,\ L_2 \in \mathcal{C}(H, \mathfrak{H}),\ L_1 \subset L_2,\ \overline{\mathrm{dom}}\, L_1 = \overline{\mathrm{dom}}\, L_2 = H, \tag{2}$$

та

$$\mathrm{dom}\,(L_1) \cap \mathrm{dom}\,(S_2) \ \text{ щільно у } \ \mathrm{dom}\,(L_1). \tag{3}$$

1) Якщо оператор $\mathcal{A} = L_2^* L_1$ щільно визначений та його спряжений задано рівністю:

$$\mathcal{A}^* = L_1^* L_2, \tag{4}$$

тоді:

(i) $\mathcal{D}[\mathcal{A}] = \mathrm{dom}\,(L_1),\ \mathcal{A}[u,v] = (L_1 u, L_1 v),\ u, v \in \mathrm{dom}\,(L_1)$,

(ii) *розширення Фрідріхса оператора $\mathcal{A}$ є оператор $\mathcal{A}_F = L_1^* L_1$, тобто*

$$\begin{array}{l} \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_F) = \{f \in \mathrm{dom}\,(L_1) : L_1 f \in \mathrm{dom}\,(L_1^*)\}, \\ \mathcal{A}_F f = L_1^* L_1 f = L_1^* L_2 f, \quad f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_F), \end{array}$$

(iii) *розширення Крейна оператора $\mathcal{A}$ це оператор $\mathcal{A}_K = L_2^* P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2$, тобто*

$$\begin{array}{l} \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_K) = \{f \in \mathrm{dom}\,(L_2) : P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 f \in \mathrm{dom}\,(L_2^*)\}, \\ \mathcal{A}_K f = L_2^* P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 f,\ f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_K), \end{array}$$

і

$$\begin{array}{l} \mathcal{D}[\mathcal{A}_K] = \mathrm{dom}\,(L_2), \\ \mathcal{A}_K[u,v] = (P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 u, P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 v),\ u, v \in \mathrm{dom}\,(L_2), \end{array}$$

(iv) *розширення Фрідріхса та Крейна оператора $\mathcal{A}$ трансверсальні.*

2) Якщо оператор $\mathcal{A} = L_2^* L_1$ щільно визначений, оператор $L_1^* L_1$ є його фрідріхсовим розширенням та в H є підпростором лінійний многовид

$$\mathfrak{M} := \ker\,(L_1^* L_2 + I), \tag{5}$$

тоді $\mathcal{A}^* = L_1^* L_2$.

Нехай оператори $\mathcal{L}_0$ та $\mathcal{L}$ задовольняють таку умову:

(A) $\mathcal{L}_0$ – щільно визначений замкнений невід'ємний симетричний оператор в H та $\mathcal{L}$ – його самоспряжене розширення.

У теоремі 2.1.3 доведено: якщо $\mathcal{L}_0^2$ щільно визначений та $(\mathcal{L}_0^2)^* = \mathcal{L}_0^{*2}$, тоді

$$(\mathcal{L}\mathcal{L}_0)^* = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}, \quad (\mathcal{L}_0\mathcal{L})^* = \mathcal{L}\mathcal{L}_0^*.$$

Далі, у теоремі 2.1.4 наведено конструкцію базисних граничних трійок та дано опис усіх невід'ємних самоспряжених розширень невід'ємного симетричного оператора у дивергентній формі.

Теорема 2.1.4 *Нехай оператори L_1 та L_2 задовольняють умову* (2) *та нехай сукупність $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ є граничною трійкою для пари операторів $L_1 \subset L_2$. Якщо оператор $\mathcal{A} = L_2^* L_1$ щільно визначений та $\mathcal{A}^* = L_1^* L_2$, тоді*

1) *гранична трійка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma, GP_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2\}$ є базисною для $\mathcal{A}^*$;*

2) *відображення*

$$\Theta \mapsto \mathcal{A}_\Theta := \mathcal{A}^* \upharpoonright \Gamma^{-1}\Theta = \mathcal{A}^* \upharpoonright \left\{f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}^*) : (\Gamma f, GP_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 f) \in \Theta\right\}$$

встановлює бієктивну відповідність між усіма невід'ємними самоспряженими розширеннями $\mathcal{A}_\Theta$ оператора $\mathcal{A}$ та усіма невід'ємними самоспряженими відношеннями Θ в $\mathcal{H}$.

У підрозділі 2.2 наведено конструкції таких операторів:

1) для довільного підпростору $\mathfrak{M}$ у H, $\dim \mathfrak{M} = \dim \mathfrak{M}^\perp = \infty$, наведена конструкція обмеженого невід'ємного самоспряженого оператора X з щільною областю значень такого, що $\mathfrak{M} \cap \mathrm{ran}\,(X^{1/2}) = \mathfrak{M}^\perp \cap \mathrm{ran}\,(X^{1/2}) = \{0\}$. У роботі Шмюдгена показано, що для довільного замкненого необмеженого щільно визначеного оператора B у H існує підпростір $\mathfrak{L}$ такий, що $\mathfrak{L} \cap \mathrm{dom}\,(B) = \mathfrak{L}^\perp \cap \mathrm{dom}\,(B) = \{0\}$. Тобто, для довільного обмеженого невід'ємного самоспряженого оператора F з щільною областю значень у H існує підпростір $\mathfrak{L}$ такий, що $\mathfrak{L} \cap \mathrm{ran}\,(F^{1/2}) = \mathfrak{L}^\perp \cap \mathrm{ran}\,(F^{1/2}) = \{0\}$.

2) Нехай $X_0 = X^{1/2} P_{\mathfrak{M}} X^{1/2}$, де $P_{\mathfrak{M}}$ – укорочений оператор Крейна, $H = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^\perp$, $\dim \mathfrak{M} = \dim \mathfrak{M}^\perp = \infty$, тоді $A = X^{-1}$, $A_0 = X_0^{-1}$ – щільно визначені невід'ємні необмежені самоспряжені оператори такі, що $\mathrm{dom}\,(A) \cap \mathrm{dom}\,(A_0) = \{0\}$,

$$\mathrm{dom}\,(A_0^{1/2}) \subset \mathrm{dom}\,(A^{1/2}), \ \ ||A_0^{1/2}\varphi|| = ||A^{1/2}\varphi|| \ \forall \varphi \in \mathrm{dom}\,(A_0^{1/2}). \qquad (6)$$

3) Визначимо

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}) := \mathrm{dom}\,(A^{1/2}),\ \mathcal{L}h = A^{1/2}h,\ h \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}),\\ &\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) := \mathrm{dom}\,(A_0^{1/2}),\ \mathcal{L}_0 g = A^{1/2}g,\ g \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0). \end{aligned} \qquad (7)$$

Тоді $\mathcal{L}_0$ – щільно визначений замкнений невід'ємний симетричний оператор та $\mathcal{L}$ його невід'ємне самоспряжене розширення. До того ж, $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0 = A_0$,

$\mathcal{L}^2 = A$. Оскільки $\operatorname{dom}(\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0) \cap \operatorname{dom}(\mathcal{L}^2) = \{0\}$, то

$$\operatorname{dom}(\mathcal{L}\mathcal{L}_0) = \{0\}.$$

Зокрема, $\operatorname{dom}(\mathcal{L}_0^2) = \{0\}$. Але $\mathcal{L}_0\mathcal{L}$ щільно визначений у H та $(\mathcal{L}_0\mathcal{L})_F = \mathcal{L}^2$, $(\mathcal{L}_0\mathcal{L})_K = \mathcal{L}_0\mathcal{L}_0^*$, $(\mathcal{L}_0\mathcal{L})^* = \mathcal{L}\mathcal{L}_0^*$.

Основними результатами другого розділу є результати пункту 2.2.2 – це факторизація невід'ємних симетричних операторів. Дано параметризацію запису невід'ємного симетричного оператора у дивергентній формі за допомогою його диз'юнктних невід'ємних самоспряжених розширень.

Теорема 2.2.6. *Нехай $\dot{A}$ – щільно визначений замкнений невід'ємний симетричний оператор в H, який має диз'юнктні невід'ємні самоспряжені розширення. Тоді $\dot{A}$ припускає нескінченно багато факторизацій вигляду:*

$$\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0, \tag{8}$$

*де оператори $\mathcal{L}_0$ і $\mathcal{L}$ задовольняють умову **(A)**, та існує бієктивна відповідність між усіма факторизаціями оператора $\dot{A}$ у формі* (8) *та усіма парами $\langle A_0, A_1\rangle$ диз'юнктних невід'ємних самоспряжених розширень оператора $\dot{A}$, що задовольняють умову* (6)*. Ця відповідність висловлюється формулами* (7)*. Більш того,*

1) *якщо індекси дефекту оператора $\dot{A}$ скінченні, то необхідно, щоб оператор $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ співпадав з фрідріхсовим розширенням A_F оператора $\dot{A}$;*

2) *якщо індекси дефекту оператора $\dot{A}$ нескінченні, то оператор $\mathcal{L}_0$ можна обрати так, що $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ співпадає чи не співпадає з фрідріхсовим розширенням оператора $\dot{A}$;*

3) *якщо $\dot{A}$ припускає трансверсальні невід'ємні самоспряжені розширення та якщо $\mathcal{L}^2$ трансверсальне до A_F (зокрема, якщо $\mathcal{L}^2$ співпадає з розширенням Крейна оператора $\dot{A}$), то необхідно, щоб оператор $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ співпадав з фрідріхсовим розширенням оператора $\dot{A}$.*

У пункті 2.2.3 доведено аналогічну теорему для випадку нещільно визначеного симетричного оператора.

Теорема 2.2.7

1) *Нещільно визначений замкнений невід'ємний симетричний оператор із скінченними індексами дефекту не припускає представлення у дивергентній формі.*

2) *Нещільно визначений замкнений невід'ємний симетричний оператор $\dot{A}$ з нескінченними індексами дефекту та такий, що має диз'юнктні самоспряжені розширення (оператори), припускає нескінченно багато факторизацій:*

$$\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0,$$

де $\mathcal{L}_0$ – щільно визначений замкнений невід'ємний симетричний оператор та $\mathcal{L}$ – його невід'ємне самоспряжене розширення.

У **третьому розділі** підхід Арлінського-Цекановського до опису усіх невід'ємних самоспряжених розширень щільно визначеного невід'ємного симетричного оператора у внутрішніх термінах розвинено для опису усіх квазі-самоспряжених m-акретивних та m-секторіальних розширень. Визначимо в $\mathrm{dom}\,(S^*)$ скалярний добуток $(f,g)_+ = (f,g) + (S^*f, S^*g)$, та позначимо гільбертів простір $\mathrm{dom}\,(S^*)$ як H_+. Нехай $\mathfrak{N}_F = H_+ \ominus \mathrm{dom}\,(S_F)$ та $\mathfrak{N}_0 := \mathrm{ran}\,(S_F^{1/2}) \cap \mathfrak{N}_F$. Якщо $\mathfrak{N}_0 \neq \{0\}$, тоді оператор S має не єдине невід'ємне самоспряжене розширення. Визначимо на $\mathfrak{N}_0$ невід'ємну півторалінійну форму ω_0:

$$\omega_0[e,g] = (\widehat{S}_F^{-1/2} e, \widehat{S}_F^{-1/2} g)_+.$$

Арлінський та Цекановський дали опис усіх невід'ємних самоспряжених розширень щільно визначеного невід'ємного симетричного оператора у такому вигляді:

Теорема 1.2.21 *Оператор S має єдине невід'ємне самоспряжене розширення тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{N}_0 = \{0\}$. Нехай $\mathfrak{N}_0 \neq \{0\}$, тоді формули*

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(\widetilde{S}) = \mathrm{dom}\,(S) \oplus (I + S_F\widetilde{U})\mathrm{dom}\,(\widetilde{U}), \\ &\widetilde{S}(\varphi + h + S_F\widetilde{U}h) = S_F(\varphi + h) - \widetilde{U}h, \quad \varphi \in \mathrm{dom}\,(S),\ h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U}), \end{aligned} \tag{9}$$

дають опис бієктивної відповідності між усіма невід'ємними самоспряженими розширеннями $\widetilde{S}$ оператора S та усіма $(+)$-самоспряженими операторами $\widetilde{U}$ в $\mathfrak{N}_F$, що задовольняють умову:

$$0 \le \widetilde{U} \le W_0^{-1}. \tag{10}$$

Основним результатом третього розділу є наступна теорема, яка є узагальненням теореми 1.2.21.

Теорема 3.1.1 *Нехай S невід'ємний щільно визначений замкнений симетричний оператор. Існує бієктивна відповідність між усіма квазі-самоспряженими m-акретивними розширеннями $\widetilde{S}$ оператора S та усіма $(+)$-m-акретивними операторами $\widetilde{U}$ в $\mathfrak{N}_F$, що задовольняють умову:*

$$\mathrm{ran}\,(\widetilde{U}) \subset \mathfrak{N}_0 \quad \text{та} \quad \mathrm{Re}\,(\widetilde{U}e, e)_+ \ge \omega_0[\widetilde{U}e], \quad \forall e \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U}).$$

Ця відповідність визначається формулами:

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(\widetilde{S}) = \mathrm{dom}\,(S) \oplus (I + S_F\widetilde{U})\mathrm{dom}\,(\widetilde{U}), \\ &\widetilde{S}(\varphi + e + S_F\widetilde{U}e) = S_F(\varphi + e) - \widetilde{U}e,\ \varphi \in \mathrm{dom}\,(S),\ e \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U}). \end{aligned} \tag{11}$$

Розширення $\widetilde{S}$, яке визначено формулами (11)*, є m-секторіальним тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{array}{l} \text{оператор } \widetilde{U} \text{ є } (+)\text{-m-акретивним в } \mathfrak{N}_F, \ \mathrm{ran}\,(\widetilde{U}) \subset \mathfrak{N}_0 \\ \text{та є секторіальною півторалінійна форма} \\ \tau_{\widetilde{U}}[e,h] := (\widetilde{U}e,h)_+ - \omega_0[\widetilde{U}e,\widetilde{U}h], \ e,h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U}). \end{array}$$

Замкнена форма $\widetilde{S}[\cdot,\cdot]$, що асоційована з $\widetilde{S}$, визначається наступними формулами, для $u,v \in \mathcal{D}[S]$, $f,g \in \mathcal{D}[\widetilde{U}^{-1}]$:

$$\begin{array}{l} \mathcal{D}[\widetilde{S}] = \mathcal{D}[S] \dotplus S_F\mathcal{D}[\widetilde{U}^{-1}], \ \ \widetilde{S}[u + S_F f, v + S_F g] = \\ = (S_F^{1/2}u - \widehat{S}_F^{-1/2}f, S_F^{1/2}v - \widehat{S}_F^{-1/2}g) + \widetilde{U}^{-1}[f,g] - \omega_0[f,g]. \end{array}$$

Розширення $\widetilde{S}$ та S_F диз'юнктні тоді та тільки тоді, коли оператор $\widetilde{U}$ має обернений, та трансверсальні тоді та тільки тоді, коли $\widetilde{U}^{-1}$ – обмежений оператор.

Також встановлено критерій екстремальності для квазі-самоспряжених m-акретивних розширень $\widetilde{S}$.

Твердження 3.1.3 *Наступні умови є еквівалентними:*

1) *квазі-самоспряжене m-акретивне розширення $\widetilde{S}$ невід'ємного симетричного оператора S є екстремальним;*

2) *(+)-m-акретивний оператор $\widetilde{U}$ в $\mathfrak{N}_F$ з* (11) *задовольняє умову:*

$$\mathrm{ran}\,(\widetilde{U}) \subset \mathfrak{N}_0, \ \ \mathrm{Re}\,(\widetilde{U}h,h)_+ = \omega_0[\widetilde{U}h], \ \ \forall h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U});$$

3) *(+)-m-акретивний оператор $\widetilde{U}$ в $\mathfrak{N}_F$ з* (11) *задовольняє умову:*

$$\mathrm{ran}\,(\widetilde{U}) \subset \mathfrak{N}_0, \ \ \mathrm{Re}\,((\widetilde{U}P_{\widetilde{U}})^{-1}e,e)_+ = \omega_0[e], \ \ \forall e \in \mathrm{ran}\,(\widetilde{U}), \qquad (12)$$

де $P_{\widetilde{U}}$ (+)-ортогональний проектор в $\mathfrak{N}_F$ на $\overline{\mathrm{ran}}\,(\widetilde{U})$.

У випадку симетричного оператора із скінченними індексами дефекту доведено таке твердження.

Твердження 3.2.1 *Нехай невід'ємний симетричний оператор S має індекси дефекту $\langle m,m\rangle$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_F$ та нехай $\{e_1,\ e_2,\ ...,\ e_m\}$ – лінійний базис підпростору $\mathfrak{N}_F$. Позначимо через $\mathcal{G}$ та $\mathcal{W}_0$ наступні $m \times m$ матриці:*

$$\mathcal{G} = ||(e_k,e_j)_+||_{k,j=1}^m, \quad \mathcal{W}_0 = ||\omega_0[e_k,e_j]||_{k,j=1}^m.$$

Існує бієктивна відповідність між

1) *усіма m-акретивними квазі-самоспряженими розширеннями $\widetilde{S}$ оператора S та усіма $m \times m$ матрицями $\mathcal{U} = ||u_{kj}||_{k,j=1}^m$, що задовольняють умову:*

$$\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^* \geq 2\mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*; \qquad (13)$$

2) усіма m-секторіальними квазі-самоспряженими розширеннями $\widetilde{S}$ *оператора* S *та усіма* $m \times m$ *матрицями* $\mathcal{U} = ||u_{kj}||_{k,j=1}^{m}$, *що задовольняють умову:*

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha \cdot (\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^*) + i(\mathcal{U}\mathcal{G} - \mathcal{G}\mathcal{U}^*) \geq 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*, \\ \operatorname{tg}\alpha \cdot (\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^*) - i(\mathcal{U}\mathcal{G} - \mathcal{G}\mathcal{U}^*) \geq 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*. \end{cases}$$

Ця відповідність дається формулами:

$$\operatorname{dom}(\widetilde{S}) = \left\{ \varphi + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j + \sum_{k,j=1}^{m} u_{kj}\lambda_k S_F e_j, \ \ \varphi \in \operatorname{dom}(S), \ \lambda_j \in \mathbb{C}, j \leq m \right\},$$

$$\widetilde{S}\left(\varphi + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j + \sum_{k,j=1}^{m} u_{kj}\lambda_k S_F e_j \right) = S_F\varphi + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j S_F e_j - \sum_{k,j=1}^{m} u_{kj}\lambda_k e_j.$$

Якщо $\mathcal{U} = \mathcal{G}\mathcal{W}_0^{-1}$, *то відповідне розширення є розширенням Крейна.*

Четвертий розділ присвячено встановленню та опису певного зв'язку між просторами Соболєва та гільбертовим простором ℓ_2. У підрозділі 4.1 розглянуто одновимірний випадок. Нехай Y – скінченна або зчисленна монотонна послідовність точок на $\mathbb{R}$, яка задовольняє умову:

$$\inf\{|y' - y''|, \ y', y'' \in Y, \ y' \neq y''\} = d_1 > 0. \tag{14}$$

Нехай $\mathbb{J}$ – одна з множин $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_+$ для випадку нескінченного Y.

Твердження 4.1.1. *1) Якщо* $g \in W_2^2(\mathbb{R})$, *тоді* $\{g(y_j), \ \ y_j \in Y\}$, $\{g'(y_j), \ y_j \in Y\} \in \ell_2(\mathbb{J})$. *Більш за те, існує додатна константа c така, що для усіх* g *з* $W_2^2(\mathbb{R})$ *справджуються нерівності:*

$$\|\{g(y_j)\}\|_{\ell_2(\mathbb{J})} \leq c\|g\|_{W_2^2(\mathbb{R})}, \ \|\{g'(y_j)\}\|_{\ell_2(\mathbb{J})} \leq c\|g\|_{W_2^2(\mathbb{R})}.$$

2) Якщо $\{a_j, \ j \in \mathbb{J}\}$, $\{b_j, \ j \in \mathbb{J}\} \in \ell_2(\mathbb{J})$, *тоді існує функція* g *з* $W_2^2(\mathbb{R})$ *така, що* $g(y_j) = a_j, \ g'(y_j) = b_j, \quad \forall j \in \mathbb{J}$.

Твердження 4.1.3. *1) Якщо* $\varphi \in W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y)$, *тоді* $\{\varphi(y_j + 0) - \varphi(y_j - 0), \ \ y_j \in Y\} \in \ell_2(\mathbb{J})$.
2) Якщо $\vec{a} = \{a_j, \ j \in \mathbb{J}\} \in \ell_2(\mathbb{J})$, *тоді існує функція* φ *з* $W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y)$ *така, що* $\varphi(y_j + 0) - \varphi(y_j - 0) = a_j, \ j \in \mathbb{J}$.

У підрозділі 4.2 розглянуто дво- та тривимірний випадки. Нехай $Y = \{y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ – зчисленна множина точок у $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, така, що

$$\inf\{|y_j - y_k|, \ j \neq k\} =: d_*(Y) > 0. \tag{15}$$

Твердження 4.2.1. *Нехай* Y *задовольняє умову* (15) *та нехай* $\{a_j, \ j \in \mathbb{N}\} \in \ell_2(\mathbb{N})$, *тоді існує функція* $f(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 2, 3$, *така, що* $||f||_2 = 1$ *та* $f(y_j) = A \cdot a_j, \forall j \in \mathbb{N}, \ A = const$.

П'ятий розділ присвячено дослідженню властивостей мінімальних операторів Шредінгера A_0, A' та H_0 з δ, δ' та $\delta-\delta'$ потенціалами, відповідно. Нехай множина точок Y задовольняє умову (14). Розглянемо наступні диференціальні оператори в $L_2(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{dom}\,(A_0)=\left\{f\in W_2^2(\mathbb{R}):f(y)=0,\ y\in Y\right\},\ A_0:=-\frac{d^2}{dx^2},\tag{16}$$

$$\mathrm{dom}\,(A')=\left\{g\in W_2^2(\mathbb{R}):g'(y)=0,\ y\in Y\right\},\ A':=-\frac{d^2}{dx^2},\tag{17}$$

$$\mathrm{dom}\,(H_0)=\left\{f\in W_2^2(\mathbb{R}):f(y)=0,\ f'(y)=0,\ y\in Y\right\},\ H_0:=-\frac{d^2}{dx^2}\tag{18}$$

та

$$\begin{array}{l}\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)=\{f\in W_2^1(\mathbb{R}):f(y)=0,\ y\in Y\},\ \mathcal{L}_0=i\frac{d}{dx},\\ \mathrm{dom}\,(\mathcal{L})=W_2^1(\mathbb{R}),\ \mathcal{L}=i\frac{d}{dx}.\end{array}$$

Оператор $\mathcal{L}_0$ є щільно визначеним симетричним та його спряжений визначається формулою $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*)=W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y)$, $\mathcal{L}_0^*=i\frac{d}{dx}$. Отже $\mathcal{L}_0\subset\mathcal{L}\subset\mathcal{L}_0^*$. Оператори (16)–(18) та їх спряжені мають такий запис у дивергентній формі:

$$A_0=\mathcal{L}\mathcal{L}_0,\ A'=\mathcal{L}_0\mathcal{L},\ H_0=\mathcal{L}_0^2,\ A_0^*=\mathcal{L}_0^*\mathcal{L},\ A'^*=\mathcal{L}\mathcal{L}_0^*,\ H_0^*=\mathcal{L}_0^{*2}.$$

Дано опис розширень Фрідріхса та Крейна операторів A_0, A' та H_0 у дивергентній формі. Наприклад, для оператора A_0:

$$\begin{array}{l}\mathrm{dom}\,(A_{0F})=\left\{f\in W_2^1(\mathbb{R}):f'\in W_2^1(\mathbb{R}\backslash Y),\ f(y)=0,\ y\in Y\right\},\\ \mathrm{dom}\,(A_{0K})=\left\{f\in\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}):P_{\overline{\mathrm{ran}\,(\mathcal{L}_0)}}\mathcal{L}f\in\mathrm{dom}\,(\mathcal{L})\right\}=\\ =\left\{f\in W_2^1(\mathbb{R}):f'-\sum\limits_k\dfrac{1}{d_k}(f(y_{k+1})-f(y_k))\chi_k\in W_2^1(\mathbb{R})\right\},\\ A_{0K}=-\frac{d^2}{dx^2},\ A_{0F}=-\frac{d^2}{dx^2}.\end{array}$$

Нехай

$$\begin{array}{l}\Phi=\overline{\mathrm{span}}\,\{\delta'(x-y),\ y\in Y\}\quad(\text{замикання в}\quad W_2^{-2}(\mathbb{R})),\\ \Psi_{-1}=\overline{\mathrm{span}}\,\{\delta(x-y),\ y\in Y\}\quad(\text{замикання в}\quad W_2^{-1}(\mathbb{R})),\\ \Omega=\overline{\mathrm{span}}\,\{\delta(x-y),\ \delta'(x-y),\ y\in Y\}\quad(\text{замикання в}\quad W_2^{-2}(\mathbb{R})).\end{array}$$

Використовуючи результати четвертого розділу, ми доводимо таке твердження.

Твердження 5.1.1. *Системи функцій* $\{\delta(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\{\delta'(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ *та* $\{\delta(x-y_j),\ \delta'(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ *утворюють базис Риса підпросторів, відповідно,* Ψ_{-1}, Φ *та* Ω.

Спираючись на це, ми доводимо наступне твердження.

Твердження 5.1.6. *Розширення Фрідріхса та Крейна операторів* H_0, A' *та* A_0 *є трансверсальними.*

У пункті 5.1.5 побудовано базисні граничні трійки для операторів A', A_0 та H_0, та описано їх усі невід'ємні самоспряжені розширення. Наприклад, для оператора A':

Твердження 5.1.7. *Нехай*

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \mathbb{C}^m, & Y \text{ містить } m \text{ точок}, \\ \ell_2(\mathbb{J}), & Y \text{ нескінченна}, \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \mathrm{dom}\,(\Gamma) = W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y), & \Gamma u = \{i(u(y_j+0) - u(y_j-0)),\ j \in \mathbb{J}\}, \\ \mathrm{dom}\,(G) = W_2^1(\mathbb{R}), & Gf = \{f(y_j),\ j \in \mathbb{J}\}. \end{array}$$

Тоді

(i) $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ *- гранична трійка для пари* $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0^*$;

(ii) *гранична трійка* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma, G\mathcal{L}_0^*\}$ *є базисною для* A'^*, *де* $G\mathcal{L}_0^*$ *визначається співвідношенням* $G\mathcal{L}_0^* f = \{if'(y_j),\ j \in \mathbb{J}\},\ f \in \mathrm{dom}\,(A'^*)$;

(iii) *відображення*

$$\begin{array}{l} \Theta \mapsto A'_\Theta = A'^* \restriction \{f \in \mathrm{dom}\,(A'^*) : \\ (\{i(f(y_j+0) - f(y_j-0)),\ j \in \mathbb{J}\}, \{if'(y_j),\ j \in \mathbb{J}\}) \in \Theta\} \end{array}$$

встановлює бієктивну відповідність між усіма невід'ємними самоспряженими розширеннями оператора A' *та усіма невід'ємними самоспряженими лінійними відношеннями* Θ *в* $\mathcal{H}$.

У підрозділі 5.2 дано опис усіх m-акретивних гамільтоніанів, що відповідають скінченному числу δ' взаємодій на прямій. Нехай

$$\mathrm{dom}\,(A') = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) : f'(y_j) = 0, j = 1, ..., m\},\ A' = -\tfrac{d^2}{dx^2}. \tag{19}$$

Теорема 5.2.1. *Нехай оператор* A' *визначено формулами* (19). *Тоді формули*

$$\begin{array}{l} \mathrm{dom}\,(\widetilde{A'}) = \left\{ f_0(x) + \sum\limits_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) + \sum\limits_{k,j=1}^m u_{kj}\lambda_k h_j(x) \right\}, \\ f_0(x) \in \mathrm{dom}\,(A'), (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{C}^m, \\ \widetilde{A'} \left(f_0(x) + \sum\limits_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) + \sum\limits_{k,j=1}^m u_{kj}\lambda_k h_j(x) \right) = \\ = -\tfrac{d^2}{dx^2} f_0(x) + \sum\limits_{j=1}^m \lambda_j h_j(x) - \sum\limits_{k,j=1}^m u_{kj}\lambda_k g_j(x), \end{array}$$

дають опис бієктивної відповідності між

1) *усіма m-акретивними квазі-самоспряженими розширеннями* $\widetilde{A}'$ *оператора* A' *та усіма матрицями* $\mathcal{U} = ||u_{kj}||_{k,j=1}^{m}$, *що задовольняють умову:*
$$\mathcal{UG} + \mathcal{GU}^* \geq 2\mathcal{UW}_0\mathcal{U}^*,$$

2) *усіма m-секторіальними квазі-самоспряженими розширеннями* $\widetilde{A}'$ *оператора* A' *та усіма матрицями* $\mathcal{U} = ||u_{kj}||_{k,j=1}^{m}$, *що задовольняють умову:*

$$\begin{cases} \tan\alpha \cdot (\mathcal{UG} + \mathcal{GU}^*) + i(\mathcal{UG} - \mathcal{GU}^*) \geq 2\tan\alpha \cdot \mathcal{UW}_0\mathcal{U}^*, \\ \tan\alpha \cdot (\mathcal{UG} + \mathcal{GU}^*) - i(\mathcal{UG} - \mathcal{GU}^*) \geq 2\tan\alpha \cdot \mathcal{UW}_0\mathcal{U}^*, \end{cases}$$

де $\mathcal{W}_0 = ||\omega_{kj}||_{k,j=1}^{m}$, $\mathcal{G} = ||g_{kj}||_{k,j=1}^{m}$,

$$\begin{aligned} g_{kj} &= \tfrac{\pi}{\sqrt{2}} \exp(-\tfrac{|y_k - y_j|}{\sqrt{2}})(\cos\tfrac{|y_k - y_j|}{\sqrt{2}} - \sin\tfrac{|y_k - y_j|}{\sqrt{2}}), \\ \omega_{kj} &= \tfrac{\pi}{\sqrt{2}} \exp(-\tfrac{|y_k - y_j|}{\sqrt{2}})(\cos\tfrac{|y_k - y_j|}{\sqrt{2}} + \sin\tfrac{|y_k - y_j|}{\sqrt{2}}), \\ g_j(x) &= i\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \exp\left(-\tfrac{|x - y_j|}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\tfrac{|x - y_j|}{\sqrt{2}}\right), \\ h_j(x) &= i\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \exp\left(-\tfrac{|x - y_j|}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\tfrac{|x - y_j|}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Шостий розділ починається з опису у внутрішніх термінах усіх невід'ємних гамільтоніанів, що відповідають скінченному числу точкових взаємодій на площині.

У підрозділі 6.2, використовуючи зв'язок просторів Соболєва $W_2^1(\mathbb{R}^d)$ та $W_2^2(\mathbb{R}^d)$ $d = 2,\ 3$, із гільбертовим простором ℓ_2, ми доводимо таке твердження.

Твердження 6.2.1. *За умови* (15) *система дельта-функцій* $\{\delta(x - y_j),\ x \in \mathbb{R}^d\}_{j\in\mathbb{N}}$ *утворює базис Риса підпростору*

$$\Phi_{Y,d} := \overline{\text{span}}\{\delta(\cdot - y),\ y \in Y\} \quad (\textit{замикання в} \quad W_2^{-2}(\mathbb{R}^d),\ d = 2,\ 3).$$

Теорема 6.2.10. *Розширення Фрідріхса* $(A_{Y,2})_F (= A_d)$ *та Крейна* $(A_{Y,2})_K$ *оператора* $A_{Y,2}$ *диз'юнктні, але не трансверсальні.*

Теорема 6.2.11. *Нехай*

$$M_{jk} = \begin{cases} \frac{1 - e^{-|y_k - y_j|}}{|y_k - y_j|}, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

Розширення Фрідріхса та Крейна оператора $A_{Y,3}$ *диз'юнктні. Вони трансверсальні тоді і тільки тоді, коли оператор* M, *що визначений матрицею* $\|M_{jk}\|_{j,k}$, *обмежений на* $\ell_2(\mathbb{N})$.

В останньому пункті побудовано уніфіковану конструкцію граничних трійок для $A^*_{Y,d}$ для обох випадків $d = 2$ і $d = 3$, а також обчислено γ-поле та функцію Вейля. Використовуючи властивості функції Вейля, ми наводимо ще одне доведення диз'юнктності та критерій трансверсальності розширень $(A_{Y,d})_F$ та $(A_{Y,d})_K$.

ВИСНОВКИ

У дисертації досліджуються симетричні оператори в дивергентній формі та їх невід'ємні самоспряжені розширення, зокрема розширення Фрідріхса та Крейна. Доведено, що кожний замкнений щільно визначений невід'ємний симетричний оператор, що має диз'юнктні невід'ємні самоспряжені розширення, припускає нескінченно багато факторизацій вигляду $\mathcal{L}\mathcal{L}_0$, де $\mathcal{L}_0$ – замкнений невід'ємний симетричний оператор та $\mathcal{L}$ його невід'ємне самоспряжене розширення; така факторизація встановлена для нещільно визначеного замкненого невід'ємного симетричного оператора з нескінченними індексами дефекту, а у випадку скінченних індексів дефекту доведена неможливість факторизації такого типу.

Розвивається підхід Арлінського-Цекановського для опису усіх квазісамоспряжених m-акретивних та m-секторіальних розширень невід'ємного симетричного оператора у внутрішніх термінах. Дано параметризацію усіх невід'ємних гамільтоніанів, що відповідають скінченному числу точкових взаємодій на площині, та m-акретивних гамільтоніанів, що відповідають скінченному числу точкових δ' взаємодій на прямій.

У дисертації встановлено певний зв'язок просторів Соболєва $W_2^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 1, 2, 3$, $W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y)$ та гільбертова простору ℓ_2. За допомогою цього зв'язку доведено, що системи дельта-функцій Дірака утворюють базиси Риса у своїх лінійних оболонках у негативних просторах Соболєва. У дивергентній формі дано опис екстремальних розширень Фрідріхса та Крейна мінімальних операторів Шредінгера, що відповідають точковим δ, δ' та δ–δ' взаємодіям на прямій, доведена їх трансверсальність та побудовано базисні граничні трійки і дано опис усіх невід'ємних гамільтоніанів. Доведено диз'юнктність, але не трансверсальність розширень Фрідріхса та Крейна мінімального оператора Шредінгера для випадку точкових взаємодій на площині; а для випадку точкових взаємодій у просторі доведено диз'юнктність та дано критерій трансверсальності. Уніфіковано побудовано базисні граничні трійки та обчислено функції Вейля для спряжених мінімальних операторів Шредінгера для випадків точкових взаємодій на площині та у просторі.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Arlinskii Yu. *Quasi-self-adjoint maximal accretive extensions of nonnegative symmetric operators* / Yu. Arlinskii, Yu. Kovalev, E. Tsekanovskii //

TEKA Kom. Motor. i Energ. Roln. – OL PAN. – 2010. – Vol. XA. – P. 6–14.

2. Ковальов Ю. Г. *Невід'ємні 2D гамільтоніани для точкових взаємодій* / Ю. Г. Ковальов // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. – 2010. – № 8(150). – С. 150-159.

3. Arlinskii Yu. *Operators in divergence form and their Friedrichs and Kreĭn extensions* / Yu. Arlinskii, Yu. Kovalev // Opuscula Mathematica. – 2011. – Vol. 31, № 4. – P. 501–517.

4. Arlinskii Yu. *Accretive and sectorial extensions of nonnegative symmetric operators* / Yu. Arlinskii, Yu. Kovalev, E. Tsekanovskii // Complex Analysis and Operator Theory. – 2012. – № 6. – P. 677–718.

5. Arlinskiĭ Yu. *Factorizations of nonnegative symmetric operators* / Yu. Arlinskii, Yu. Kovalev // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2013. – Vol. 19, № 3. – P. 211–226.

6. Kovalev Yu. G. *1D Nonnegative Schrödinger operators with point interactions* / Yu. G. Kovalev // Matematychni Studii. – 2013. – V. 39, № 2. – P. 150–163.

7. Ковалев Ю. Г. *К теории неотрицательных гамильтонианов на плоскости и в пространстве* / Ю. Г. Ковалев // Український математичний вісник. – 2014. – Том 11, № 2. – С. 203-226. English translation in Journal of Math. Sciences. – 2015. – V. 204, № 3. – P. 315-322.

8. Ковалев Ю. Г. *Квази-самосопряженные максимальные аккретивные расширения неотрицательных симметрических операторов* / Ю. Г. Ковалев // Двадцать Первая Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум КРОМШ-2010 (17-29 сентября 2010, Ласпи–Батилиман, Крым, Украина). – Тезисы докладов, Симферополь, 2010. – С. 22.

9. Kovalev Yu. G. *Quasi-self-adjoint maximal accretive extensions of nonnegative symmetric operators* / Yu. G. Kovalev // International Conference on Functional Analysis dedicated to the 90-th anniversary of V. E. Lyantse (17-21 November, 2010, Lviv, Ukraine). – Abstracts, Lviv, 2010. – P. 57-58.

10. Arlinskii Yu. M. *Operators in divergence form and their Friedrichs and Krein extensions* / Yu. M. Arlinskii, Yu. G. Kovalev // Summer School "Algebra, Topology, Analysis and Applications" (July 5-15, 2011, Kherson-Lazurne, Ukraine). – Abstracts, Kherson, 2011. – P. 4.

11. Arlinskii Yu. M. *Operators in divergence form and their extremal extensions* / Yu. M. Arlinskii, Yu. G. Kovalev // 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of professor Vitaliy Mikhaylovich Usenko (July 5-12, 2011, Lugansk, Ukraine). – Abstracts, Lugansk, 2011. – P. 7.

12. Kovalev Yu. *On nonnegative selfadjoint extensions of the operators given in divergence form* / Yu. Kovalev// The Twenty Second Crimea Autumn Mathematical School KROMSH-2011 (September 17-29, 2011, Laspi-Batiliman, Crimea). – Abstracts, Simferopol, 2011. – P. 64.

13. Kovalev Yu. *1D nonnegative Schrodinger operators with point interactions* / Yu. Kovalev // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (September 17-21, 2012, Lviv, Ukraine). – Abstracts, Lviv, 2012. – P. 51.

14. Kovalev Yu. *2D and 3D nonnegative Schrödinger operators with point interactions* / Yu. Kovalev // Crimea International Mathematical Conference (September 22 – October 4, 2013, Sudak, Crimea). – Abstracts, Sudak, 2013. – P. 44.

АНОТАЦІЯ

Ковальов Ю.Г. *Невід'ємні самоспряжені розширення та моделі точкових взаємодій.* – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2015.

Задача існування та опису усіх самоспряжених та квазі-самоспряжених розширень невід'ємного симетричного оператора є предметом дослідження багатьох математиків та має численні застосування до моделей точкових взаємодій.

В дисертації вивчаються властивості невід'ємних симетричних операторів та їх невід'ємних самоспряжених розширень у дивергентній формі. Встановлюється критерій представлення невід'ємного симетричного оператора в дивергентній формі за допомогою необмеженого невід'ємного симетричного оператора та його невід'ємного самоспряженого розширення, та надається параметризація такої факторизації.

Підхід Арлінського-Цекановського для опису усіх невід'ємних самоспряжених розширень невід'ємного симетричного оператора у внутрішніх термінах розширюється для опису усіх квазі-самоспряжених m-акретивних та m-секторіальних розширень невід'ємного симетричного оператора.

В роботі встановлено певний зв'язок між просторами Соболєва та гільбертовим простором послідовностей ℓ_2. За допомогою цього зв'язку доведено базисність Риса дельта-функцій Дірака у своїх лінійних оболонках.

Вище зазначені результати застосовуються для дослідження моделей точкових взаємодій. Дано опис усіх невід'ємних гамільтоніанів, що відповідають точковим взаємодіям на прямій, площині та у просторі, та усіх квазі-самоспряжених m-акретивних та m-секторіальних гамільтоніанів, що відповідають точковим взаємодіям на прямій. Досліджуються властивості диз'юнктності та трансверсальності екстремальних розширень Крейна та Фрідріхса мінімальних операторів Шредінгера з дельта-потенціалами.

Ключові слова: самоспряжені розширення, квазі-самоспряжені розширення, розширення Фрідріхса, розширення Крейна, оператор Шредінгера, дельта-функція, точкові взаємодії, дивергентність, симетричний оператор.

АННОТАЦИЯ

Ковалев Ю.Г. *Неотрицательные самосопряженные расширения и модели точечных взаимодействий.* – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. – Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, 2015.

Теория самосопряженных расширений неотрицательных симметрических операторов является предметом изучения многих математиков уже на протяжении около 80 лет и имеет множество приложений, в том числе и к моделям точечных взаимодействий в квантовой механике. Начало теории расширений было положено Дж. фон Нейманом, и получило развитие в работах Фридрихса, Крейна. Фридрихс построил экстремальное расширение с той же нижней гранью, как у исходного симметрического оператора. В своей работе Крейн с помощью дробно-линейных преобразований свел задачу к описанию всех сжимающих расширений неплотно заданного эрмитова сжатия. Для положительно определенного симметрического оператора результаты Крейна дополнили Бирман и Вишик. Другой подход в теории расширений это подход так называемых граничных троек и связанных с ними функций Вейля. Этот подход активно развивали В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, В. А. Деркач, А. Н. Кочубей, С. О. Кужель, В. Э. Лянце, О. Г. Сторож, М. М. Маламуд, Ю. М. Арлинский, Э. Р. Цекановский и др. Арлинским и Цекановским в 2005 году был предложен новый подход для описания всех собственных неотрицательных самосопряженных расширений неотрицательного симметрического оператора во внутренних терминах с использованием расширения Фридрихса.

В диссертации расширяется подход Арлинского-Цекановского для параметризации всех квази-самосопряженных максимальных аккретивных и максимальных секториальных расширений неотрицательного симметрического оператора во внутренних терминах. Получен критерий экстремальности квази-самосопряженного максимального аккретивного расширения.

В теории дифференциальных уравнений и спектрального анализа линейных операторов бывает удобно представление дифференциального уравне-

ния или оператора в дивергентной форме (в виде произведения). V. Prokaj, Z. Sebestyén и J. Stochel в своих работах показали, что каждый неотрицательный симметрический оператор искусственным образом может быть представлен в дивергентной форме, и дали описание экстремальных самосопряженных расширений. В работе P. A. Deift показано, что оператор Лапласа, Штурма-Лиувилля, электромагнитный и акустический операторы имеют естественное представление в дивергентной форме.

В диссертации изучаются свойства операторов в дивергентной форме. Для неотрицательного симметрического оператора в дивергентной форме описаны экстремальные расширения Фридрихса и Крейна и ассоциированные с ними полуторалинейные формы, и исследованы их свойства дизъюнктности и трансверсальности. Установлен критерий представления неотрицательного симметрического оператора и неплотно заданного эрмитова оператора в дивергентной форме с помощью неограниченного неотрицательного симметрического оператора и его самосопряженного расширения, и дана параметризация такой факторизации. Построена конструкция двух операторов – плотно определенного неотрицательного симметрического и его самосопряженного расширения таких, что область определения их суперпозиции тривиальна, в частности квадрат построенного плотно определенного неотрицательного симметрического оператора имеет нулевую область определения.

Установлена определенная связь пространств Соболева и гильбертова пространства суммируемых в квадрате последовательностей. С помощью этой связи доказана базисность Рисса дельта-функций Дирака в своих линейных оболочках в негативных пространствах Соболева. Описанные выше результаты применяются в исследовании моделей точечных взаимодействий. Описаны все неотрицательные гамильтонианы, соответствующие точечным взаимодействиям на прямой, на плоскости и в пространстве, и все квази-самосопряженные m-аккретивные и m-секториальные гамильтонианы, соответствующие точечным взаимодействиям на прямой. Исследованы свойства дизъюнктности и трансверсальности расширений Фридрихса и Крейна минимальных операторов Шрёдингера с дельта потенциалами, а именно, для случая прямой указанные расширения трансверсальны, в случае плоскости дизъюнктны, но не трансверсальны, и в случае пространства они дизъюнктны и установлен критерий их трансверсальности.

Ключевые слова: самосопряженные расширения, квази-самосопряженные расширения, расширение Фридрихса, расширение Крейна, оператор Шрёдингера, дельта-функция, точечные взаимодействия, дивергентность, симметрический оператор.

ABSTRACT

Kovalev Yu.G. *Nonnegative selfadjoint extensions and point interactions models.* – Manuscript.

Thesis for candidate's degree in physics and mathematics by speciality 01.01.01 – Mathematical Analysis. – V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2015.

The problem of existence and description of all selfadjoint and all quasi-selfadjoint extensions of a nonnegative symmetric operator has been investigated by lots of authors and has many applications for point interactions models.

In the thesis, properties of nonnegative symmetric operators and their nonnegative selfadjoint extensions in divergence form are investigated. A criteria of representation of a nonnegative symmetric operator in divergence form through unbounded nonnegative symmetric operator and his nonnegative selfadjoint extension is obtained, a parametrization of this factorization is given.

The Arlinskii-Tsekanovskii approach for an intrinsic parametrization of all nonnegative selfadjoint extensions of a nonnegative symmetric operator extends for parametrization of all quasi-selfadjoint m-accretive and m-sectorial extensions of a nonnegative symmetric operator.

In the thesis, certain connections between the Sobolev spaces and the Hilbert space ℓ_2 are obtained. The Riesz bases properties of Dirac's delta-functions in their linear span are proved using this connections.

Above results are applied for investigation of point interaction models. Descriptions of all nonnegative Hamiltonians of point interactions on a line, on a plane and in a space, and all quasi-selfadjoint m-accretive and m-sectorial Hamiltonians of point interactions on a line are given. Properties of disjointness and transversalness of the Friedrichs and Krein extremal extensions of minimal Schrödinger operators with delta-potential are investigated.

Keywords: selfadjoint extensions, quasi-selfadjoint extensions, Friedrichs extension, Krein extension, Schrödinger operator, delta-function, point interactions, divergence, symmetric operator.

Підписано до друку 26.10.15.
Формат 60x84x16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 0.9. Тир. 100 прим. Зам.69

Надруковано у копі-центрі «МОДЕЛІСТ»
(ФО-П Миронов М.В., Свідоцтво ВО4№022953)
м. Харків, вул. Червонопрапорна, 3 літер Б-1
Тел. 7-170-354
www.modelist.in.ua