

Відгук

- офіційного опонента на дисертаційну роботу
Соловйової Марії В'ячеславівни «Наближення операторами і функціоналами,
що досягають норми», висунуту на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Починаючи з роботи Бішопа і Фелпса (1961 р.), в якій встановлено щільність у спряженому просторі множини функціоналів, які досягають норми в банаховому просторі, набув розвитку напрямок досліджень з цієї властивості. Болобаш (1970 р.) розвинув цей результат та довів, що існує наближення пари функціонал та вектор, на якому майже досягається норма, функціоналом та вектором, на якому норма досягається.

Узагальнення властивості Бішопа – Фелпса для операторів, які діють із одного банахового простору в інший, не має точної відповіді за винятком окремих випадків. Тобто питання, коли множина операторів, які діють із одного банахового простору в інший та досягають норми, є щільною у відповідному просторі, досі залишається відкритим.

Дисертація присвячена вивченню властивості Бішопа – Фелпса – Болобаша для функціоналів, операторів і ліпшицевих функцій. Для лінійних операторів ця властивість вперше була введена в роботі Акости, Арона, Гарсії, Маестре (2008 р.). А це означає, що оператор та точку, на якій майже досягається норма, можна наблизити відповідно оператором та точкою, на якій норма в точності досягається, причому апроксимація є тим кращою, чим ближче було значення даного оператора на відповідній точці до норми. Дослідження цієї властивості для різних просторів активно проводилось протягом останнього часу. Але, питання, які стосуються найкращої можливої оцінки наближення (властивості Бішопа – Фелпса – Болобаша), теж є відкритими, тому їх дослідження є актуальним.

Ароном, Каскалесом, Кошушкіною (2011) було встановлено, що простір $C(K)$ має властивість Бішопа – Фелпса – Болобаша для асплундованих операторів. Каскалес, Кадець, Гуірао поширили цей результат на рівномірні алгебри $A \subset C(K)$.

У 2014 році Чікою, Кадецем, Маріном, Морено-Пулідом, Рамбли-Бараною були визначені два модулі, які характеризували найкращу можливу оцінку у властивості Бішопа – Фелпса – Болобаша для функціоналів. Окрім того, було встановлено, що якщо банаховий простір має максимальний модуль Бішопа – Фелпса – Болобаша, то цей простір містить майже ізометричні копії простору $l_1^{(2)}$. Актуальним залишилось питання про покращення оцінки для модуля тих просторів, які не містять майже ізометричних копій простору $l_1^{(2)}$.

Ще одним із важливих, актуальних питань є поширення теореми Бішопа – Фелпса – Болобаша на нелінійні ліпшицеві функції із банахового простору X в \mathbb{R} .

Саме цим трьом актуальним задачам і присвячена дисертація Соловйової М. В.

Метою дослідження дисертаційної роботи Соловйової М. В. є отримання аналогів теореми Бішопа – Фелпса – Болобаша та одержання найкращих оцінок наближення, а саме:

- встановити зв'язок між параметром рівномірної неквадратності банахового простору (параметром, який показує наскільки двовимірні підпростори віддалені від $l_1^{(2)}$) та сферичним модулем Бішопа – Фелпса – Болобаша;
- довести аналог теореми Бішопа – Фелпса – Болобаша для ліпшицевих функцій;
- поширити результат статті Каскалеса, Кадеця та Гуірао «Теорема Бішопа – Фелпса – Болобаша для рівномірних алгебр» на більш широкий клас просторів Y , які не є рівномірними алгебрами;
- ввести поняття модулів Бішопа – Фелпса – Болобаша для операторів та отримати оцінки для цих модулів у випадку, коли оператор діє у простір з властивістю β .

Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, п'яти розділів, списку використаних джерел, який містить 66 найменувань.

У вступі обґрунтовано актуальність теми та дано аналіз сучасного стану проблеми, сформульовані мета, завдання дослідження, наукову новизну одержаних результатів, а також подано відомості про апробацію роботи.

Перший розділ присвячений історичному огляду проблеми, якій присвячена дисертаційна робота. Окрім результатів, які отримали попередники за темою дисертації, викладені для подальшого розуміння основні поняття та означення.

Другий розділ присвячений визначенню зв'язку між параметром рівномірної неквадратності та сферичним модулем Бішопа – Фелпса – Болобаша. Одним із важливих результатів цього розділу є теорема 2.11, в якій встановлено оцінку між сферичним модулем Бішопа – Фелпса – Болобаша та параметром рівномірної неквадратності. Важливою є оцінка для модифікованих модулів Бішопа – Фелпса – Болобаша (теорема 2.19).

Розділ 3 присвячений поширенню теореми Бішопа – Фелпса – Болобаша на нелінійні ліпшицеві функції $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Основним результатом цього розділу є теорема 3.11, в якій доведено, що будь-який рівномірно опуклий простір має властивість Бішопа – Фелпса – Болобаша для ліпшицевих функцій.

В четвертому розділі поширюються результати про властивість Бішопа – Фелпса – Болобаша для асплундових операторів. До головних результатів цього розділу слід віднести теорему 4.11, в якій доведено, що кожний банаховий простір із АСК та кожний банаховий простір із АСК_p має властивість Бішопа – Фелпса – Болобаша для асплундованих операторів.

В розділі 5 дано поширення теореми Бішопа – Фелпса – Болобаша на вектрнозначний випадок. До основних результатів цього розділу слід віднести теореми 5.3 та 5.10 для сферичного модуля Бішопа – Фелпса – Болобаша, а також теореми 5.18 та 5.19 для модифікованого сферичного модуля Бішопа – Фелпса – Болобаша.

Дисертація написана чіткою ясною мовою, з відповідною аргументацією кожної задачі, що вивчається. Всі результати є новими і змістовними.

До зауважень слід віднести:

- 1) слід окремо було дати визначення класу АСК;
- 2) в розділі 5 слід було б дослідити оцінку

$$\Phi^s(x, y, \varepsilon) \leq \min \left\{ \sqrt{2\varepsilon} \sqrt{\frac{1+p}{1-p}}, 1 \right\},$$
 хоча це є темою подальшого

дослідження.

Незважаючи на ці недоліки, вважаю, що дисертація Соловйової М. В. є закінченим науковим дослідженням і повністю відповідає вимогам, які пред'являються до дисертацій, висунутих на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук, так як:

- a) Отримана оцінка для сферичного модуля Бішопа – Фелпса – Болобаша через параметр рівномірної неквадратності.
- b) Доведено, що модуль Бішопа – Фелпса – Болобаша не виражається через параметр рівномірної неквадратності.
- c) Введено поняття модифікованих модулів Бішопа – Фелпса – Болобаша та отримана точна оцінка зверху.
- d) Наведені приклади рівномірно неквадратних просторів, у яких оцінка для модифікованого модуля Бішопа – Фелпса – Болобаша залишається точною.
- e) Введено властивість Бішопа – Фелпса – Болобаша для ліпшицевих функцій у сенсі досягнення норми за напрямком.
- f) Доведено, що рівномірно опуклі простори мають властивість Бішопа – Фелпса – Болобаша для ліпшицевих функцій.
- g) Введена властивість АСК та наведені приклади просторів, які мають цю властивість, та просторів, які не мають цієї властивості.
- h) Доведено, що якщо простір Y має АСК структуру, то для будь-якого простору X пара (X, Y) має властивість Бішопа – Фелпса – Болобаша для асплундових операторів.
- i) Введено поняття модулів Бішопа – Фелпса – Болобаша для операторів, отримані оцінки зверху для цих модулів, коли простір, у який діють оператори, має властивість β та виконано дослідження цих оцінок на точність.

Науковий рівень дисертації високий, а всі результати обґрунтовані і опираються на чіткі і коректні доведення. Отримані результати носять теоретичний характер і можуть бути використані в теорії розширень лінійних

операторів, в спектральному аналізі лінійних операторів з сингулярними потенціалами. Дослідження, яке проведено автором, може бути корисним в наукових розробках, що проводяться в Інституті НАН України, Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України, Інституті прикладних задач механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна, Львівському національному університеті ім. І. Франка. Автореферат ідентичним чином відображає основні положення і твердження дисертації. Публікації містять головні результати дисертаційної роботи.

На підставі вищезгаданого вважаю, що дисертаційна робота М. В. Соловйової виконана на відповідному рівні, а дисертант заслуговує присвоєння йому ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Доктор фізико-математичних наук, професор,
провідний науковий співробітник
Фізико-технічного інституту низьких
температур ім. Б. І. Веркіна НАН України

В. О. Золотарьов

